3　連続する n 個の数の和

3.1　定理たち

問い 7

連続した n 個の自然数の和が n^2 になるような数 n は存在するか．また, 連続のスタート地点はどのような数か.

定理 3.1.1

問い 7 を満たす偶数は存在しない.

証明. 連続な $n(\in 2\mathbb{N})$ 個の数の初項を a とする．すると, 連続する n 個の数の和は,

$$\begin{aligned} S &= a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a + (n-1)) \\ &= na + (1 + 2 + \cdots + (n-1)) \\ &= na + \frac{1}{2}(n-1)n \\ &= n\left(a + \frac{1}{2}(n-1)\right) \\ &= \frac{1}{2}n(2a + n - 1) \end{aligned}$$

$S = n^2$ が成立すると仮定すると,

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{1}{2}n(2a + n - 1) \\ n &= \frac{1}{2}(2a + n - 1) \\ 2n &= 2a + n - 1 \\ 2a &= n + 1 \end{aligned}$$

さて, $n \in 2\mathbb{N}$ なので, (右辺)=(奇数)
一方で, $2a$ は偶数なので, 矛盾．よって, 「$S = n^2$ が成立する」という仮定が誤り.
i.e. 問い 7 を満たす偶数は存在しない. □

定理 3.1.2

全ての奇数は, 問い 7 を満たす.

証明. 連続な $n(\in 2\mathbb{N} - 1)$ 個の数の初項を a とする．すると, 連続する n 個の数の和は, 定理 3.1.1 と同様に

$$S = \frac{1}{2}n(2a + n - 1)$$

$S = n^2$ が成立すると仮定すると,

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{1}{2}n(2a + n - 1) \\ n &= \frac{1}{2}(2a + n - 1) \\ 2n &= 2a + n - 1 \\ n &= 2a - 1 \end{aligned}$$

全ての奇数 n に対して $a \in \mathbb{N}$ を算出できるため, 主張は示せる. □

系 3.1.3
問い 7 を満たす, 連続する n 個の数の初項は $\dfrac{n+1}{2}$ である.

証明. 自明 $\square$

3.2 パズルへ

定理を踏まえて, 以下の条件を満たすような $n \times n$ の平面パズルを作りたい.

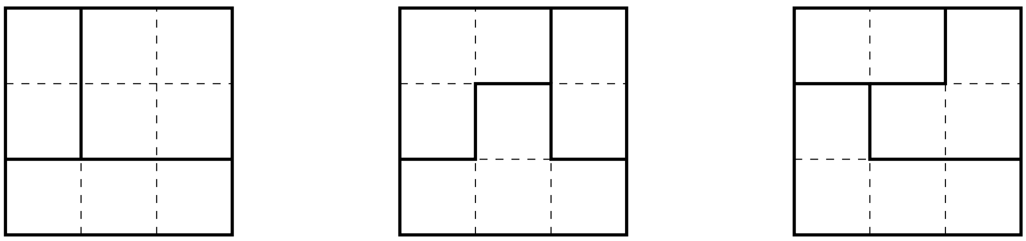
- n ピースにする.
- 各々のピースの面積は異なる.
- ピースの面積を小さい順に並べると, 連続する自然数となる.

例 1 ($n = 3$ のとき)

条件は, 以下の通り.

- ピースは 3 個.
- 面積は 2, 3, 4 の 3 パターン.

この場合, 以下の 3 パターンが生成可能.

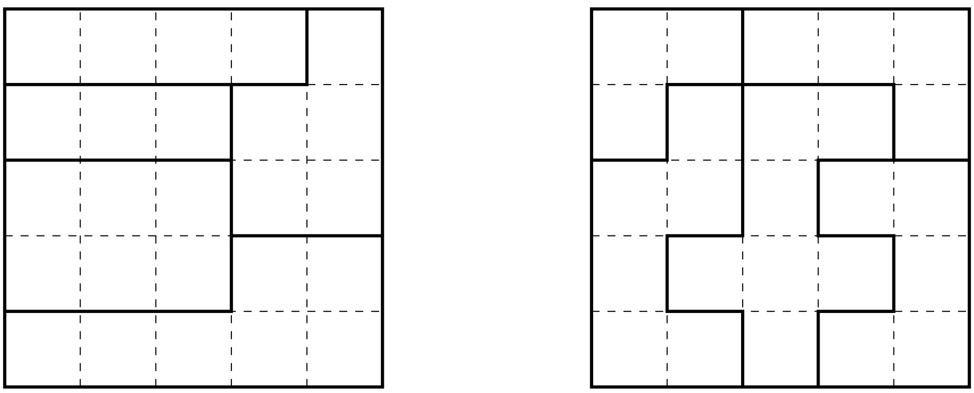


例 2 ($n = 5$ のとき)

条件は, 以下の通り.

- ピースは 5 個.
- 面積は 3, 4, 5, 6, 7 の 5 パターン.

この場合, 以下のパターンなどが生成可能.



etc...

n を増やすと, パターン数は増大する. 何通りのパズル製作ができるかを計算することも面白そうではあるが, ここでは次なる問いについて検討する.

問い 8

各々の面積のピースは 1 つしか作れない. このとき, $\forall n$ に対し, 面積の連続な n 個のピースを使って $n \times n$ のマスを埋めることができるピースの形はどのようなものか.

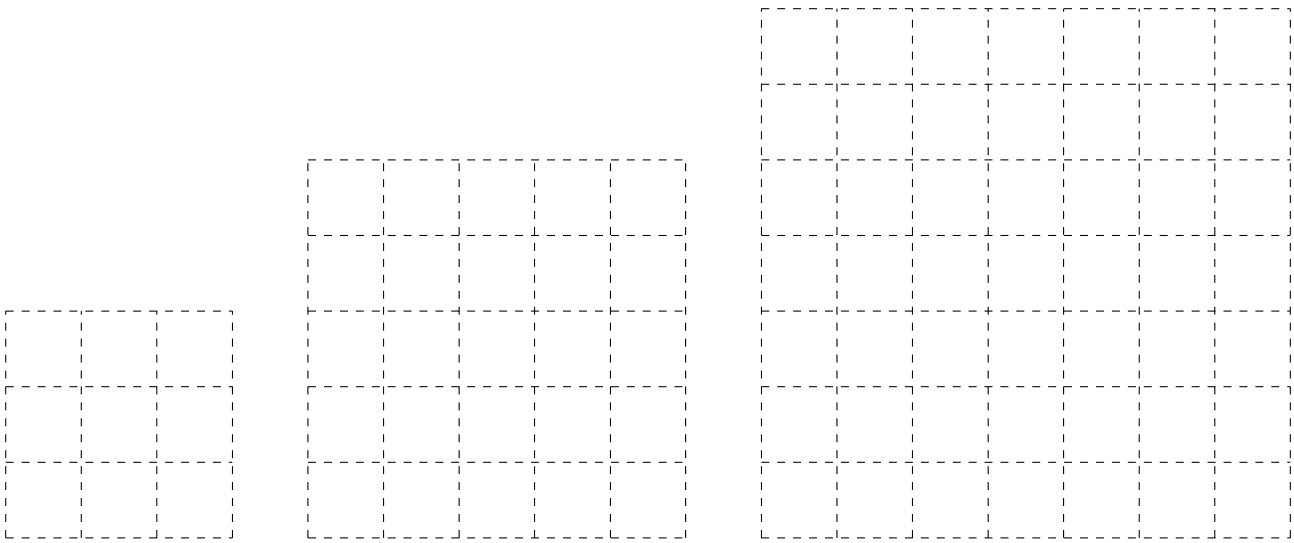
問い 9

問い 7 を満たす a, b から, $a^2 + b^2 = c^2$ のパズルを製作することができるか.

3.3 問い 8 の解決へ

3.3.1 3-5-7 パズル

問い 8 について, $n = 3, 5, 7$ の 3 つに絞って検討してみる. つまり, 下のマスに敷き詰め可能なピース (面積 $= 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$) をどう作るか.



また, 必要なピースは以下の通りである.

$$
\begin{array}{lccccccccc}
3 \times 3 \cdots & 2, & 3, & 4, & & & & & & \\
5 \times 5 \cdots & & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & & & \\
7 \times 7 \cdots & & & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10
\end{array}
$$

極端な話をすると, 共通でないものは自由に作成すれば良い. そのため, 共通の多いものから順に制作することにする.