

## 1 二次方程式とグラフの関係性

### 検討

二次関数  $y = x^2 + 3x - 4$  について、いろいろ調べてみよう。

### まとめ

$$y = ax^2 + bx + c \text{ について}$$

$D = b^2 - 4ac$			
$a > 0$ で グラフの形			
$a < 0$ で グラフの形			
$x$ 軸との 位置関係			
$x$ 軸との 共有点の個数			
$ax^2 + bx + c = 0$ の実数解			

練習 1

以下の 2 次方程式を解け.

(1)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

(2)  $x^2 + 2x + 1 = 0$

(3)  $x^2 + x - 3 = 0$

練習 2

次の 2 次関数のグラフと  $x$  軸の共有点の個数を求めよ.

(1)  $y = x^2 + 4x - 5$

(2)  $y = -2x^2 + 3x - 1$

(3)  $y = 3x^2 - 4x + 5$

練習 3

以下の問いに答えよ.

- (1) 2次方程式  $x^2 + 2x + m = 0$  が, 異なる 2 つの実数解を持つとき, 定数  $m$  の値の範囲を求めよ.

- (2)  $m$  を定数とする. 2次方程式  $x^2 + mx + 1 = 0$  が重解を持つように, 定数  $m$  の値を求めよ. また, その重解を求めよ.

練習 4

以下の問いに答えよ.

- (1) 2次関数  $y = x^2 + 4x + m$  のグラフと  $x$  軸の共有点の個数は, 定数  $m$  の値によってどのように変わるか.

- (2)  $m$  を定数とする. 2次関数  $y = x^2 + 2x + m$  のグラフと  $x$  軸の共有点の個数を求めよ.

## 1.1 定数分離

### 例題

2次関数  $y = x^2 + 4x + 3 - k$  が  $x$  軸と共有点を持たないように、定数  $k$  の値の範囲を求めよ。

定数分離

### 練習

(1) 方程式  $y = x^2 + 4x + 3 - k$  と  $x$  軸の共有点の個数を求めよ。

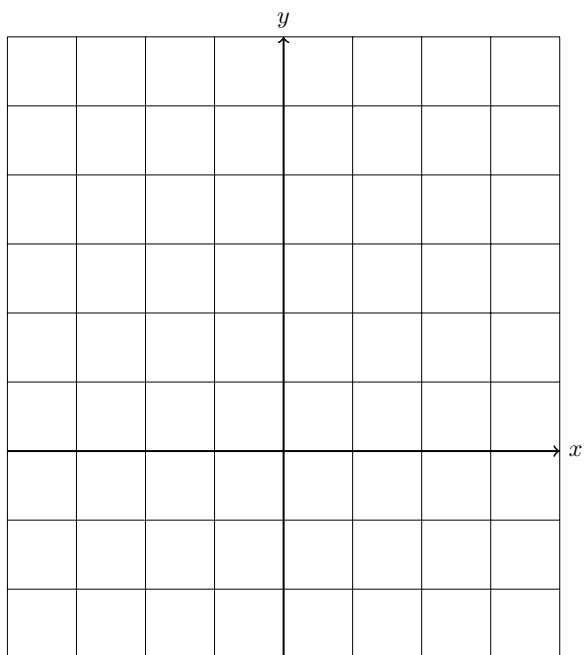
(2) 方程式  $y = -x^2 + 2x + 1 - 2k$  と  $x$  軸の共有点の個数を求めよ。

## 1.2 連立方程式って

### 復習

(1) 連立方程式  $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$  を解け.

(2) 2つのグラフを描き, 共有点の座標を求めてみよう.



### 練習

(1) 放物線  $y = x^2 + 5x + 5$  と, 直線  $y = x + 2$  の共有点の座標を求めよ.

(2) 放物線  $y = 2x^2 + 3$  と, 直線  $y = -3x + 5$  の共有点の座標を求めよ.

(3) 放物線  $y = x^2 + 3x + 3$  と, 直線  $y = x + 2$  の共有点の座標を求めよ.

練習

- (1) 放物線  $y = x^2 + 3x + 1$  と、直線  $y = x + k$  が接するとき、定数  $k$  の値を求めよ。また、そのときの接点の座標を求めよ。
- (2) 放物線  $y = -x^2 + 2$  と、直線  $y = x - k$  が共有点を持たないように、定数  $k$  の値の範囲を求めよ。

## 2 二次関数の最大・最小

### 2.1 基本

#### 復習

二次関数  $y = x^2 - 2x + 2$  について、

(1) 軸と頂点を求めよ.

(2) 最大値・最小値を求めよ.

(3)  $(0 \leq x \leq 4)$  での最大値・最小値を求めよ.

#### 練習

以下の二次関数の最大値・最小値を求めよ.

(1)  $y = x^2 - 4x + 2$  ( $0 \leq x \leq 4$ )

(2)  $y = 2x^2 + 12x - 5$  ( $-4 \leq x \leq 2$ )

(3)  $y = -x^2 - 4x + 1$  ( $0 \leq x \leq 3$ )



## 2.2 縦に動く

例

2次関数  $y = x^2 + 2x + c$  ( $-2 \leq x \leq 2$ ) について、

(1) 最大値が3になるように定数  $c$  の値を定めよ。

(2)  $c$  の値が (1) で求めた値であるとき、与えられた2次関数の最小値を求めよ。

練習

以下の条件を満たすように定数  $c$  の値を求めよ。また、そのときの最大値・最小値のもう一方を求めよ。

(1)  $y = x^2 - 2x + c$  ( $-2 \leq x \leq 2$ ) について、最大値が5

(2)  $y = 2x^2 + 4x + c$  ( $-2 \leq x \leq 0$ ) について、最小値が1

### 2.3 定義域が動く

例

$a$  を正の定数とする. 以下の関数について, 各問いに答えよ.

$$y = x^2 - 4x + 2 \quad (0 \leq x \leq a)$$

(1) 最大値を求めよ.

(2) 最小値を求めよ.

練習 1

$a$  を正の定数とする. 以下の関数について, 各問いに答えよ.

$$y = x^2 - 2x \quad (0 \leq x \leq a)$$

(1) 最大値を求めよ.

(2) 最小値を求めよ.

練習 2

$a$  を正の定数とする. 以下の関数について, 各問いに答えよ.

$$y = 2x^2 + 8x - 5 \quad (0 \leq x \leq a)$$

(1) 最大値を求めよ.

(2) 最小値を求めよ.

## 2.4 定義域が動く (ver. 2)

例

$a$  を正の定数とする. 以下の関数について, 各問いに答えよ.

$$y = x^2 - 4x + 2 \quad (a \leq x \leq a + 2)$$

(1) 最大値を求めよ.

(2) 最小値を求めよ.

練習

$a$  を正の定数とする. 以下の関数について, 各問いに答えよ.

$$y = x^2 - 6x + 5 \quad (a \leq x \leq a + 2)$$

(1) 最大値を求めよ.

(2) 最小値を求めよ.

## 2.5 軸が動く

例

$a$  を正の定数とする. 以下の関数について, 各問いに答えよ.

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + 1 \quad (0 \leq x \leq 2)$$

(1) 最大値を求めよ.

(2) 最小値を求めよ.

練習

$a$  を正の定数とする. 以下の関数について, 各問いに答えよ.

$$y = x^2 - 4ax + 4a^2 + 3 \quad (1 \leq x \leq 3)$$

(1) 最大値を求めよ.

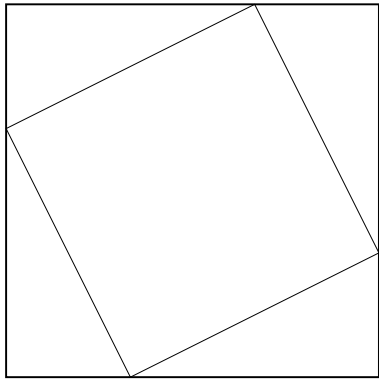
(2) 最小値を求めよ.



## 2.6 活用

### 例題

1 辺が 4(cm) である正方形に内接する正方形について考える.



(1) 最小値を予想しよう.

(2) 内接正方形の面積を  $y(\text{cm}^2)$ , AP の長さを  $x(\text{cm})$  とする.  $y$  を  $x$  の式で表せ.

(3) 最小値を求めよ.

練習問題

対角線の長さの和が8である菱形について、以下の問いに答えよ。  
(「予想 → 解く」の癖をつける。)

(1) 面積の最大値を求めよ。

(2) 周の長さの最小値を求めよ。

### 3 二次不等式とグラフの関係性

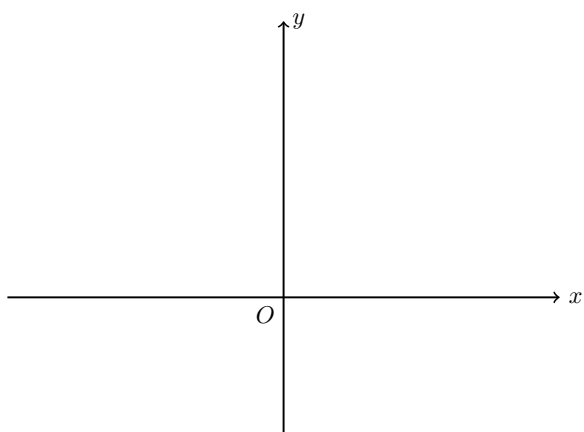
#### 3.1 基本

復習  
不等式

$$x + 2 > 0$$

を解く.

不等式を絵で見る



$x + 2 > 0$  を解くとは...

確認

不等式  $2x - 1 < 0$  についてグラフを描き, 解け.

練習問題 1

$y = x^2 + 3x + 2$  について,

(1) グラフを描け.

(2)  $x^2 + 3x + 2 < 0$  を解け.

(3)  $x^2 + 3x + 2 \geq 0$  を解け.

練習問題 2

$y = x^2 - 2x - 8$  について,

(1) グラフを描け.

(2)  $x^2 - 2x - 8 > 0$  を解け.

(3)  $x^2 - 2x - 8 \leq 0$  を解け.

## 3.2 連立不等式

### 復習

以下の連立不等式を解け.

$$\begin{cases} 2x + 4 > 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$$

### 練習問題

以下の連立不等式を解け.

$$(1) \begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 - 2x - 8 \leq 0 \\ x^2 + 4x + 3 > 0 \end{cases}$$

連立不等式とは,

### 3.3 活用 1

#### 練習問題 1

(1) 2次方程式  $x^2 + mx + 1 = 0$  が実数解を持つように, 定数  $m$  の値の範囲を求めよ.

(2) 2次方程式  $x^2 + 2mx + 3 = 0$  が実数解を持たないように, 定数  $m$  の値の範囲を求めよ.

#### 練習問題 2

(1) 2次不等式  $x^2 + 2mx + m + 2 > 0$  の解が全ての実数であるとき, 定数  $m$  の値の範囲を求めよ.

(2) 2次不等式  $x^2 - mx - m \geq 0$  の解が全ての実数であるとき, 定数  $m$  の値の範囲を求めよ.

### 3.4 判・軸・値

#### 例題

2次関数  $y = x^2 - 2mx + 5m + 6$  のグラフと  $x$  軸の正の部分異なる2点で交わる時、定数  $m$  の値の範囲を求めよ。

練習問題 1

2 次関数  $y = x^2 - 2mx + 2m + 3$  のグラフと  $x$  軸の正の部分異なる 2 点で交わるとき、定数  $m$  の値の範囲を求めよ。



練習問題 2

2 次関数  $y = x^2 - 2mx + 5m + 6$  のグラフと  $x$  軸の負の部分異なる 2 点で交わるとき、定数  $m$  の値の範囲を求めよ。

### 3.5 文章題

#### 練習問題 1

長さが 20m のロープを張って、長方形の囲いを作る。囲いの中の面積を  $16\text{m}^2$  以上にするための、囲いの縦の長さの範囲を求めたい。ただし、縦とは長方形の短い方の 1 辺とする。

(1) 縦の長さを  $x$  とおく。長方形ができるための  $x$  の範囲を求めよ。

(2) 面積を  $x$  の式で表せ。

(3) 面積を  $16\text{m}^2$  以上にするための、囲いの縦の長さの範囲を求めよ。

#### 練習問題 2

横の長さが (縦の長さ + 2) cm で与えられる長方形の画用紙がある。この画用紙の四隅から、1 辺の長さが 1cm の正方形を切り取り、蓋のない直方体の箱を作る。

(1) 箱の体積を  $x$  を用いて表せ。

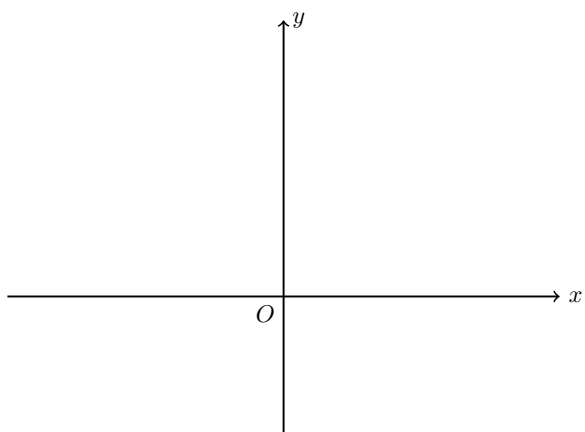
(2) 箱の体積を  $3\text{cm}^3$  以上  $15\text{cm}^3$  以下にするためには、縦の長さをどのような範囲に取れば良いか求めよ。

#### 4 絶対値の方程式・不等式

##### 復習～学び1

(1)  $|x + 1| = 2$  を解け.

(2)  $y = |x + 1|$  のグラフを描いてみよう.

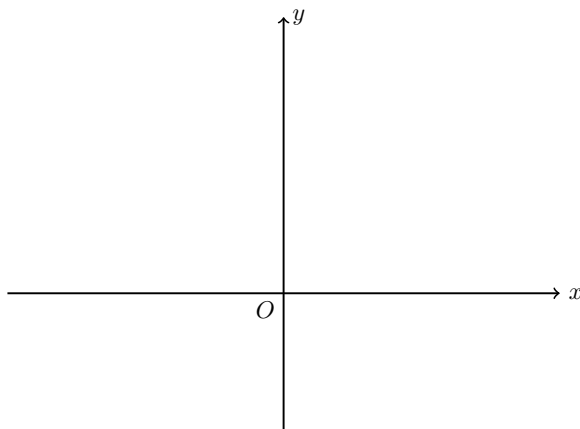


(3) グラフをもとに,  $|x + 1| > 2$  を解け.

##### 復習～学び2

(1)  $|2x - 3| = 1$  を解け.

(2)  $y = |2x - 3|$  のグラフを描いてみよう.

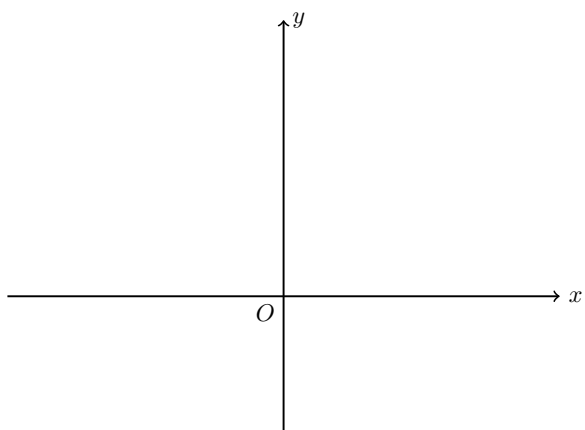


(3) グラフをもとに,  $|2x - 3| \geq 1$  を解け.

考える 1

(1)  $|x^2 - 3x + 2| = 2$  を解け.

(2)  $y = |x^2 - 3x + 2|$  のグラフを描いてみよう.



(3) グラフをもとに、 $|x^2 - 3x + 2| \leq 2$  を解け.

問題

$|x^2 - x| > x$  を解け.