

1 集合

1.1 集合の記法

定義

- 集合 :

- 要素 :

- x が集合 A に属する :

有名な数の集合

- \mathbb{N} :

- \mathbb{Z} :

- \mathbb{Q} :

- \mathbb{R} :

記法

外延的記法

内包的記法

1.2 部分集合

定義

例

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 3, 4\}$$

のとき,

集合 $\{a, b\}$ に対する部分集合

1.3 共通部分と和集合

定義

- 共通部分

- 和集合

例

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{4, 5, 6, 7\}$$

のとき,

1.4 補集合

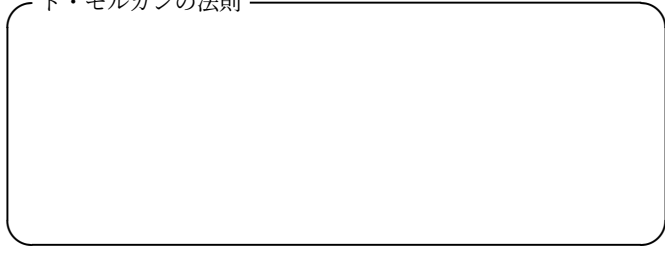
定義

補集合の性質

U : 全体集合, $A, B \subset U$ とする.

<ベン図を用いた説明>

ド・モルガンの法則



<ベン図を用いた証明>

2 命題

2.1 命題

定義

- 命題とは

- 条件とは

- 命題「 $p \implies q$ 」

- 反例

【命題 $p \implies q$ と集合】

例 $x \in \mathbb{R}$

$$p : x \leq 10, q < 15$$

について

2.2 必要条件・十分条件

定義

- 命題 $p \implies q$ が真のとき,

- 命題 $p \longleftarrow q$ が真のとき,

- また,

3 命題と証明

3.1 条件の否定

定義

- 否定

かつ, またはの否定

3.2 逆・裏・対偶

定義

命題「 $p \implies q$ 」に対して,

- 逆
- 裏
- 対偶

例

命題「 $x = -2 \implies x^2 = 4$ 」について

注)

3.3 対偶証明法

元の命題と、その逆・裏・対偶の真偽について考える.

性質

命題「 $p \implies q$ 」の真偽と

問題 1

$n \in \mathbb{Z}$ (整数) とする. 以下の命題を示せ.

n^2 が奇数ならば, n も奇数である.

問題 2

$n \in \mathbb{Z}$ (整数) とする. 以下の命題を示せ.

n^2 が偶数ならば, n も偶数である.

4 背理法

4.1 問題 1

$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて, 以下の命題を示せ.

$1 + \sqrt{2}$ は無理数である.

4.2 問題 2

$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて, 以下の命題を示せ.

$2 + 5\sqrt{2}$ は無理数である.

4.3 問題 3

$\sqrt{2}$ が無理数であることを示せ.

4.4 問題 4

$\sqrt{3}$ が無理数であることを示せ.

5 演習問題

5.1 集合記法

(1) \mathbb{N}, \mathbb{R} はそれぞれ自然数全体の集合, 実数全体の集合とする.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{x \mid 0 < x < 6, x \in \mathbb{N}\}$$

$$C = \{x \mid 1 \leq x \leq 6, x \in \mathbb{R}\}$$

のとき, 以下の に当てはまる記号を書け.

(a) A B

(b) A C

(c) 3 A

(d) 1.3 B

(e) C $\sqrt{2}$

(2) 以下の集合を, 別の記法で書き表せ. ただし, \mathbb{Z} は整数全体の集合とする.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(b) $B = \{x \mid -3 < x < 5, x \in \mathbb{Z}\}$

(c) $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

(d) $D = \{x \mid x \text{ は } 24 \text{ の正の約数}\}$

(3) 以下の集合の部分集合を全て求めよ.

(a) $A = \{a, b\}$

(b) $B = \{a, b, c\}$

(c) $C = \{1, 2, 3, 4\}$

5.2 共通部分・和集合・補集合

$U = \{x | 1 \leq x \leq 15, x \in \mathbb{N}\}$ を全体集合とし, その部分集合を

$$A = \{x | x \text{ は奇数} \}$$

$$B = \{x | x \text{ は } 3 \text{ の倍数} \}$$

$$C = \{x | x \text{ は } 5 \text{ の倍数} \}$$

とする. 以下の部分集合を求めよ.

(1) $A \cap B$

(2) $A \cup B$

(3) $C \cap B$

(4) \bar{A}

(5) $\bar{\bar{B}}$

(6) $\bar{A} \cap C$

(7) $\bar{A} \cup \bar{B}$

(8) $\bar{A} \cap \bar{B}$

(9) $\overline{A \cap C}$

(10) $\overline{A \cup C}$

(11) $A \cap B \cap C$

(12) $\overline{\bar{A} \cup (B \cap C)}$

5.3 命題

以下の文が命題であるか否かを判断せよ。また、命題である場合は真偽を判定し、偽の場合はその理由を説明せよ。

(1) 福井県は石川県よりも面積が広い。

(2) 日本の人口は多い。

(3) 4 は素数である。

(4) 100 は大きい数である。

(5) $x \in \mathbb{R}$ (実数全体の集合) とする。

$$x < 10 \implies x < 2$$

(6) $x \in \mathbb{R}$ (実数全体の集合) とする。

$$x \geq 10 \implies x \geq 2$$

(7) $x \in \mathbb{R}$ (実数全体の集合) とする。

$$|x| < 5 \implies x < 6$$

(8) $x \in \mathbb{Z}$ (整数全体の集合) とする。

$$x \text{ が偶数} \implies x^2 \text{ が奇数}$$

(9) $x \in \mathbb{Z}$ (整数全体の集合) とする。

$$x \text{ が } 3 \text{ の倍数} \implies x^2 \text{ が奇数}$$

(10) $x \in \mathbb{R}$ (実数全体の集合) とする。

$$x^2 \text{ が } 3 \text{ の倍数} \implies x \text{ が奇数}$$

5.4 必要条件・十分条件

に当てはまるものを以下から選べ.

- (a) 必要条件であるが十分条件ではない
- (b) 十分条件であるが必要条件ではない
- (c) 必要条件でも十分条件でもない
- (d) 必要十分条件である

(1) 「 x が整数」であることは「 x が自然数」であるための

(2) 「 x が6の倍数」であることは「 x が3の倍数」であるための

(3) $x \in \mathbb{R}$ (実数全体の集合)とする.
「 $x < 10$ 」であることは「 $|x| < 10$ 」であるための

(4) $x \in \mathbb{N}$ (自然数全体の集合)とする.
「 $x < 10$ 」であることは「 $|x| < 10$ 」であるための

5.5 同値

x, y, z は実数とする. 以下の中で, $x = y$ と同値な条件を全て選べ.

- (a) $x + z = y + z$
- (b) $3x = 3y$
- (c) $xz = yz$
- (d) $x^2 = y^2$
- (e) $x - y = 0$
- (f) $(x - y)^2 = 0$

5.6 否定

以下の条件を否定した条件をかけ。ただし、 $x \in \mathbb{R}, n, y \in \mathbb{N}$ とする。

(1) n は 3 の倍数である。

(2) n は 3 の倍数かつ偶数である。

(3) x, y はともに有理数である。

(4) $x > 0$

(5) $|x| \geq 3$

(6) $x > 0$ かつ $y \leq 3$

5.7 逆・裏・対偶

$x \in \mathbb{R}$ (実数全体) とする。

以下の命題の逆・裏・対偶を述べ、それらの真偽を求めよ。

(1) $x > 0 \implies x > 5$

(2) $x < 4 \implies x^2 < 4$

(3) $x^2 - x - 6 < 0 \implies |x| \leq 4$

6 実践問題

6.1 問題 1

実数 x に関する 3 つの条件 p, q, r を

$$p: -1 \leq x \leq 5, \quad q: 3 < x < 6, \quad r: x \leq 5$$

とする.

(1) 条件 p, q の否定を, それぞれ \bar{p}, \bar{q} で表すとき, 以下が成立.

- 「 p かつ q 」は, r であるための .
 - 「 \bar{p} かつ q 」は, r であるための .
 - 「 p または \bar{q} 」は, r であるための .
- a. 必要条件であるが, 十分条件ではない
b. 十分条件であるが, 必要条件ではない
c. 必要十分条件である
d. 必要条件でも十分条件でもない

(2) 定数 a を正の実数とし,

$$(ax - 2)(x - a - 1) \leq 0$$

を満たす実数 x 全体の集合を A とする.

集合 A は, a の値を 3 つの場合に分けて考えると,

- $0 < a < \text{エ}$ のとき, $A = \{x \mid \text{オ} \leq x \leq \text{カ}\}$
- $a = \text{エ}$ のとき, $A = \{\text{キ}\}$
- $\text{エ} < a$ のとき, $A = \{x \mid \text{カ} \leq x \leq \text{オ}\}$

集合 B を

$$B = \{x \mid x \text{ は 「} p \text{ かつ } q \text{」 を満たす実数}\}$$

とするとき, $A \cap B$ が空集合となる a の値の範囲は

$$\frac{\text{ク}}{\text{ケ}} \leq a \leq \text{コ}$$

6.2 問題 2.0

実数を元とする 2 つの集合

$$A = \{2, a - 1, a + 4\}$$

$$B = \{8 - a, a + 2, 5\}$$

の共通部分 $A \cap B$ が $\{2, 5\}$ となるように実数 a の値を定めよ. また, そのときの和集合 $A \cup B$ を求めよ.

6.3 問題 2.1

実数を元とする 2 つの集合

$$A = \{2, 4, a^3 - 2a^2 - a + 7\}$$

$$B = \{-4, a + 3, a^2 - 2a + 2, a^3 + a^2 + 3a + 7\}$$

の共通部分 $A \cap B$ が $\{2, 5\}$ となるように実数 a の値を定めよ. また, そのときの和集合 $A \cup B$ を求めよ.

6.4 問題 3

下記の各命題についてその真偽を記し, 理由を述べよ.
(つまり, 真の場合は示し, 偽の場合は反例を挙げる.)

- (1) $\sqrt{7}$ は無理数である.
- (2) 和も積もともに 0 でない有理数であるような 2 つの実数 a, b はともに有理数である.
- (3) a, b, c を実数とする.
全ての实数 x について, $ax^2 + bx + c > 0$ ならば $b^2 - 4ac < 0$ である.