1　復習

1.1　問題 1

以下の式を展開せよ.

(1) $(x+1)^3$

(2) $(x-2)^3$

(3) $(2x+3y)^3$

(4) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$

(5) $(x-2)(x^2+2x+4)$

(6) $(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

1.2　問題 2

以下の式を因数分解せよ.

(1) $x^3 - 1$

(2) $x^3 + 8$

(3) $125x^3 - 27y^3$

(4) $x^6 - y^6$

(5) $x^6 - 64$

(6) $x^6 + 7x^3 - 8$

2　二項定理

2.1　復習

展開せよ.

(1) $(x+y)^5$

(2) $(x+2y)^4$

(3) $(2x+3)^6$

2.2　二項定理

2.3　問題

以下の展開式において, [ ] 内に指定された項の係数を求めよ.

(1) $(2x+3y)^5$　$[x^3y^2]$

(2) $(2x-y)^7$　$[x^5y^2]$

(3) $(3x-2y)^8$　$[x^4y^4]$

(4) $(5x+3y)^9$　$[x^3y^6]$

2.4　問題

以下の展開式において, [ ] 内に指定された項の係数を求めよ.

(1) $(a+b+c)^4$　$[a^2bc]$

(2) $(a+b+c)^6$　$[a^3b^2c]$

(3) $(a+3b+2c)^7$　$[a^3b^2c^2]$

3　多項式の割り算

3.1　割り算って…

1234 を 13 で割ったとき

商

余り

これを, 等式で表すと以下のようになる.

多項式でできないか

多項式

$$x^2 + 4x + 7$$

を, $x + 2$ で割る.

3.2　練習問題 1

以下の多項式 A, B について, A を B で割ったときの商と余りを求めよ.

(1) $A = x^3 + 4x^2 + 5, \quad B = x + 1$

(2) $A = 3x^3 + 9x^2 - 3x + 10, \quad B = x - 2$

(3) $A = x^3 - 7x + 6, \quad B = x^2 + 2x - 3$

3.3　練習問題 2

(1) 多項式 x^3+2x-1 を多項式 B で割ると, 商が $x+2$, 余りが $6x-1$ であるという. B を求めよ.

(2) 多項式 x^3+4x^2+4x-2 を多項式 B で割ると, 商が $x+3$, 余りが $2x+1$ であるという. B を求めよ.

(3) $A=4x^2+11ax+2a^2, B=x+2a$ を, x についての多項式とみなして, A を B で割ったときの商と余りを求めよ.

(4) x^3 を $(x-a)^2$ で割った余りを求めよ.

4　分数式

定義

以下のように，$\dfrac{\text{多項式}}{\text{文字を含む多項式}}$ の形で表されるものを，分数式という．

$$\frac{2}{x-1},\quad \frac{2x-1}{x^2+1},\cdots$$

注) 与えられた分数式の分母は 0 ではない．
また，それ以上約分できない分数式を，既約分数式という．

例題
以下の分数式を，既約分数式にせよ．

(1) $\dfrac{2a^2b}{4ab^3}$

(2) $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)}$

(3) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$

4.1　例題

計算せよ．

(1) $\dfrac{x+1}{x+2}\times\dfrac{x+2}{x+3}$

(2) $\dfrac{x+1}{x+3}\div\dfrac{x+4}{x+3}$

(3) $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+4}{x+2}$

(4) $\dfrac{2x+1}{x+2}-\dfrac{x+4}{x+2}$

(5) $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+4}{x+1}$

4.2 問題

(1) $\dfrac{\dfrac{1}{3}}{1+\dfrac{1}{3}}$ を簡単にせよ.

(2) $\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$ を簡単にせよ.

(3) $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{1+\dfrac{1}{x-1}}$ を簡単にせよ.

(4) $\dfrac{\dfrac{1}{x+1}}{1+\dfrac{1}{x-1}}$ を簡単にせよ.

(5) $A=\dfrac{1}{x}+1, B=\dfrac{1}{x}-x$ のとき, $\dfrac{A}{B}$ を簡単にせよ.

5　恒等式

定義

以下のように, 文字を含む等式においてその両辺の値が存在する限り, 文字にどのような値を代入しても成立する等式を恒等式という.

$$(x+1)(x+2)=x^2+3x+2, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2x+1}{x(x+1)}$$

以下のような式は恒等式ではない.

$$(x+1)(x+2)=0, \quad x(x+1)=x+1$$

例題

恒等式になるように, 右辺を与えよ.

(1) $x^2+2x+3=$

(2) $x^3-1=$

(3) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}=$

(4) $\dfrac{2}{x(x+2)}=$

5.1　練習

以下の等式が x についての恒等式になるように, 定数 a, b, c の値を定めよ.

(1) $x^2-1=a(x+1)^2+b(x+1)+c$

(2) $\dfrac{x+4}{x(x+2)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+2}$

6　等式の証明

6.1　問題 1

以下の等式を示せ.

(1) $a^3 - b^3 = (a-b)^3 - 3ab(-a+b)$

(2) $(ab+1)^2 + (a-b)^2 = (a^2+1)(b^2+1)$

6.2　問題 2

$a+b+c=0$ のとき, 以下の等式を示せ.

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

6.2.1　問題 3

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ のとき, 以下の等式を示せ.

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

7　不等式の証明

実数の大小関係の基本性質

$$a > b, b > c \Longrightarrow a > c$$
$$a > b \Longrightarrow a + c > b + c, \quad a - c > b - c$$
$$a > b, c > 0 \Longrightarrow ac > bc, \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$
$$a > b, c < 0 \Longrightarrow ac < bc, \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

このことから導かれること.

7.1　基本の証明

(1) $x > 1, y > 1$ のとき, 以下の不等式を示せ.

$$xy + 1 > x + y$$

(2) $x > y$ のとき, 以下の不等式を示せ.

$$3x - 4y > x - 2y$$

7.2　さまざまな証明

(1) 以下の不等式を示せ. また, 等号成立条件を調べよ.

$$x^2 + 10y^2 \geqq 6xy$$

(2) $a > 0, b > 0$ のとき, 以下の不等式を示せ.

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$$

(3) 以下の不等式を示せ. また, 等号成立条件を調べよ.

$$|a| + |b| \geqq |a+b|$$

7.3　相加相乗平均

相加相乗平均の不等式

$a > 0, b > 0$ のとき,

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

が成立. 等号成立条件は, $a = b$

$<$ 図的解釈 $>$

例題

$a > 0$ のとき, 以下の不等式を示せ. また, 等号成立条件を調べよ.

$$a + \frac{1}{a} \geqq 2$$

7.4　問題

(1) $a > 0, b > 0$ のとき, 以下の不等式を示せ. また, 等号成立条件を調べよ.

(2) $A = x + \dfrac{4}{x}, B = x + \dfrac{9}{x}$ とする. $x > 0$ のとき, 以下の問いに答えよ.

(a) A, B の最小値を求めよ.

(b) AB の最小値を求めよ.