

1 複素数と四則演算

1.1 複素数とは

復習

(1) $x^2 = 9$ のとき, $x =$

(2) $x^2 = 5$ のとき, $x =$

では, $x^2 = -1$ のとき... $x =$

定義

複素数について...

1.2 感覚的に...

i を虚数単位とする.

(1) $x + yi = 3 + 4i$ のとき, 実数 x, y の値を求めよ.

(2) $(x + y) + (3x - 2y)i = 3 + 4i$ のとき, 実数 x, y の値を求めよ.

(3) $(x + y - 6) + (3x - y - 2)i = 0$ のとき, 実数 x, y の値を求めよ.

(4) $(2 + 3i) + (3 + 7i)$ を計算せよ.

(5) $(2 - 5i) + 2(-1 + 4i)$ を計算せよ.

(6) $(2 + 3i) - (3 + 7i)$ を計算せよ.

(7) $3(2 - 5i) - (1 - 4i)$ を計算せよ.

(8) $(2 + 3i)(3 + 7i)$ を計算せよ.

(9) $(2 - 5i)(1 - 4i)$ を計算せよ.

1.3 共役な複素数

以下を計算せよ.

(1) $(3 + 2i) + (3 - 2i)$

(2) $(3 + 2i)(3 - 2i)$

共役な複素数

以下の複素数 a と共役な複素数 b をいえ. また, $a + b, ab$ を計算せよ.

(1) $a = 1 - 2i$

(2) $a = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

1.4 除法

例

$$\frac{2+3i}{1+2i}$$

問題

計算せよ.

(1) $\frac{3-2i}{4+5i}$

(2) $\frac{2+3i}{1-2i}$

(3) $\frac{5+2i}{3i-1}$

1.5 負の平方根

確認

- 2乗して5になる数は...
- 2乗して-5になる数は...

負の平方根
 $a > 0$ のとき, $-a$ の平方根は

例題

以下の数を i を用いて表せ.

(1) $\sqrt{-4}$

(2) $\sqrt{-19}$

(3) -18 の平方根

1.5.1 積

負の数の平方根を含む計算について考える. 例題

$$\sqrt{-6}\sqrt{-3} =$$

計算せよ.

(1) $\sqrt{-6}\sqrt{-8}$

(2) $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-3}}$

(3) $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}$

(4) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}$

問い

a, b は実数とする. $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ か.

2 2次方程式の解

以下の2次方程式を、複素数範囲で解け.

(1) $x^2 + 3x + 1 = 0$

(2) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

(3) $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$

(4) $x^2 + x + 1 = 0$

問題

m を定数とする. 以下の2次方程式の解の種類を判別せよ.

(1) $x^2 + mx + 4 = 0$

(2) $x^2 + (m + 1)x + 1 = 0$

3 解と係数の関係・因数定理

3.1 どう解きますか.

二次方程式 $x^2 + 3x + 4 = 0$ の2つの解を α, β とする. 以下の値を求めよ.

(1) $\alpha + \beta$

(2) $\alpha\beta$

(3) $\alpha^2 + \beta^2$

(4) $\alpha^3 + \beta^3$

因数定理

つまり...

これを活用して, さまざまな問題を解いていく.

3.2 問題 1

二次方程式 $2x^2 - 3x + 4 = 0$ の 2 つの解を α, β とする. 以下の値を求めよ.

(1) $\alpha + \beta$

(2) $\alpha\beta$

(3) $\alpha^2 + \beta^2$

(4) $\alpha^3 + \beta^3$

3.3 問題 2

以下の問いに答えよ.

- (1) 2 次方程式 $x^2 - 6x + m = 0$ において, 1 つの解が他の解の 2 倍であるとき, 定数 m の値と 2 つの解を求めよ.

- (2) 2 次方程式 $x^2 + 3x + m = 0$ において, 2 つの解の差が 1 であるとき, 定数 m の値と 2 つの解を求めよ.

- (3) 2 次方程式 $2x^2 - 7x + m = 0$ において, 1 つの解が他の解の 4 倍であるとき, 定数 m の値と 2 つの解を求めよ.

3.4 問題 3

複素数範囲で因数分解せよ.

(1) $x^2 + x + 2$

(2) $4x^2 + 1$

(3) $x^4 - 16$

(4) $x^2 + 2x + 1$

3.5 問題 4

(1) 以下の 2 数を解とする 2 次方程式を作れ.

(a) $2, -3$

(b) $\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1$

(c) $1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i$

(2) 2 次方程式 $x^2 + 2x + 6 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき、以下の 2 数を解にもつ 2 次方程式を作れ.

(a) $\alpha - 1, \beta - 1$

(b) α^2, β^2

3.6 問題 5

以下の条件を満たす 2 数を求めよ.

(1) 和が 5 で, 積が 6

(2) 和が 2 で, 積が 4

(3) 和が 2 で, 積が 3

(4) 和が -2 で, 積が 6

(5) 和も積も 3

3.7 問題 6

(1) 2次方程式 $x^2 + 2(m - 3)x + 4m = 0$ が, 以下のような解を持つとき, 定数 m の値の範囲を求めよ.

(a) 異なる 2 つの正の解.

(b) 正の解と負の解.

4 割った余り

4.1 問題 1

$P(x) = x^3 + x^2 + 3x + 1$ を, 以下の 1 次式で割った余りを求めよ.

(1) $x + 1$

(2) $x - 2$

4.2 問題 2

(1) 多項式 $P(x)$ を $x-1$ で割った余りが 5 , $x+2$ で割った余りが -1 である. $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りを求めよ.

(2) 多項式 $P(x)$ を $x-3$ で割った余りが 1 , $x+1$ で割った余りが 5 である. $P(x)$ を $(x-3)(x+1)$ で割った余りを求めよ.

5 因数分解, 高次方程式

5.1 因数分解

以下の式を因数分解せよ.

(1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

(2) $2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$

(3) $x^4 - 13x^2 + 36$

(4) $9x^3 - 9x^2 - x + 1$

(5) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

5.2 高次方程式

以下の方程式を複素数範囲で解け.

(1) $x^3 + 1 = 0$

(2) $x^3 + 8 = 0$

(3) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

(4) $x^4 - 1 = 0$

(5) $x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$

(6) $2x^3 - x^2 - 3x - 6 = 0$

5.3 解から係数

例題

a, b を実数とする. 3次方程式 $x^3 + 3x^2 + ax + b = 0$ が, $1 - 2i$ を解にもつとき, 定数 a, b の値を求めよ. また, 他の解を求めよ.

問題

a, b を実数とする. 3次方程式 $x^3 + x^2 + ax + b = 0$ が, $1 + i$ を解にもつとき, 定数 a, b の値を求めよ. また, 他の解を求めよ.

別解