

# 1 対数

## 1.1 復習

下線部に当てはまる数値を答えよ.

(1) 2 を \_\_\_\_\_ 乗すると 64 になる.

(2) 3 を \_\_\_\_\_ 乗すると  $\frac{1}{3}$  になる.

(3) 5 を \_\_\_\_\_ 乗すると  $\frac{1}{25}$  になる.

(4) 2 を \_\_\_\_\_ 乗すると 1024 になる.

## 問い

では, 2 を \_\_\_\_\_ 乗すると 3 になるような数は存在するか.

## 1.2 対数

定義

## 練習問題

以下の値を求めよ.

(1)  $\log_3 9$

(2)  $\log_2 64$

(3)  $\log_2 \sqrt{2}$

(4)  $\log_2 \sqrt[3]{2}$

(5)  $\log_3 \frac{1}{9}$

(6)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$

### 1.3 対数の性質

#### 問題

以下の計算をせよ.

(1)  $\log_2(8^4)$

(2)  $\log_2 8 + \log_2 4$

(3)  $\log_3 \frac{27}{9}$

(4)  $\log_3 27 - \log_3 9$

(5)  $\log_2 4^3$

(6)  $3 \log_2 4$

対数の性質

$a > 0, a \neq 0, M > 0, N > 0$  のとき,

(1)

(2)

(3)

*Proof.*

#### 1.4 問題

以下の計算をせよ.

(1)  $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$

(2)  $\log_6 27 + \log_6 8$

(3)  $\log_3 18 - \log_3 2$

(4)  $\log_5 2 - \log_5 250$

(5)  $\log_3 8 + 2\log_3 9 - 3\log_3 2$

(6)  $\log_3 \sqrt[3]{6} - \frac{1}{3}\log_3 2$

## 1.5 底の変換公式

問い

以下の計算をせよ.

$$\log_2 12 - \log_4 36$$

底の変換公式

つまり...

$$\log_2 12 - \log_4 36$$

*Proof.*

## 1.6 問題

以下の式を簡単にせよ.

(1)  $\log_4 32$

(2)  $\log_9 3$

(3)  $\log_3 \cdot 4 \log_2 9$

(4)  $\log_3 15 - \log_9 75$

□

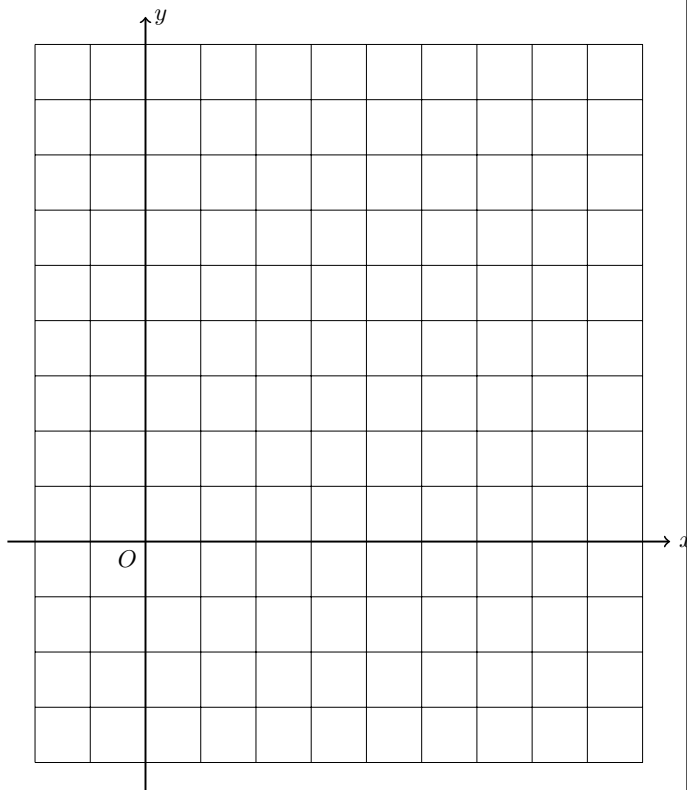
## 2 対数関数

### 2.1 さて...

関数を描こう.

$$y = \log_2 x$$

$x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y$							



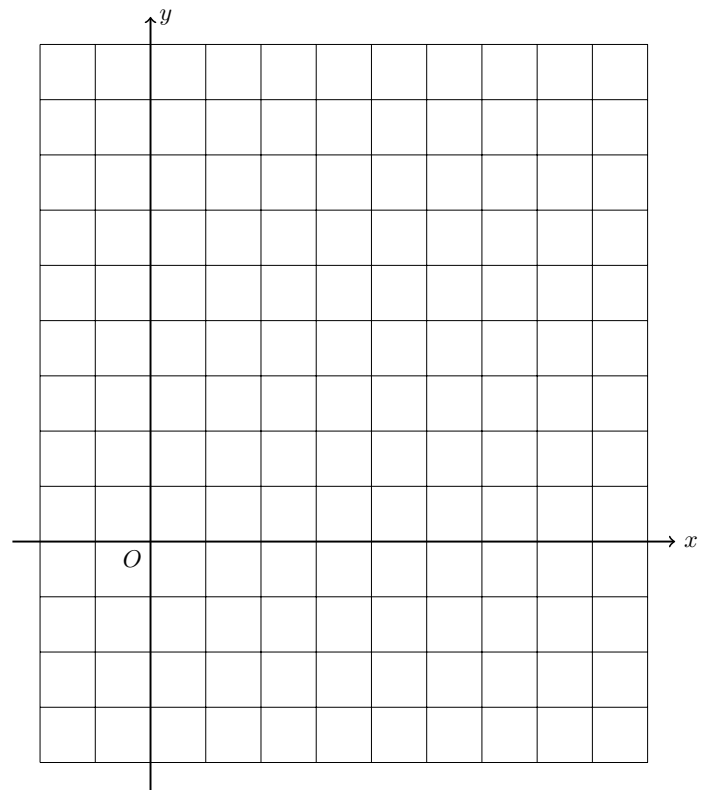
上の平面に  $y = 2^x$  のグラフを描いてみて、関係性を調べてみる.

### 2.2 では...

関数を描こう.

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

$x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y$							



上の平面に  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  のグラフを描いてみて、関係性を調べてみる.

### 2.3 問題

以下の関数のグラフを描け.

(1)  $y = \log_3 x$

(2)  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

(3)  $y = \log_3 x + 1$

(4)  $y = \log_3(x - 1)$

## 2.4 大小比較

手順は指数の大小比較と同様.

### 例題

以下の 2 数の大小関係を不等号を用いて表せ.

$$2\log_3 7, 3\log_3 4$$

## 2.5 問題

以下の 2 数の大小関係を不等号を用いて表せ.

(1)  $3\log_{\frac{1}{2}} 2, 2\log_{\frac{1}{3}} 3$

(2)  $\log_2 3, 2$

## 2.6 方程式

### 例題

以下の方程式を解け.

$$\log_3 x = 27$$

### 問題

以下の方程式を解け.

(1)  $\log_2 x = 4$

(2)  $\log_3 x = \frac{1}{3}$

(3)  $\log_2 x = \frac{1}{64}$

(4)  $\log_{\frac{1}{2}} x = 8$

## 2.7 不等式

### 例題

以下の不等式を解け.

$$\log_3 x \leq 27$$

### 問題

以下の不等式を解け.

(1)  $\log_2 x \leq 4$

(2)  $\log_3 x \geq \frac{1}{3}$

(3)  $\log_2 x > \frac{1}{64}$

(4)  $\log_{\frac{1}{2}} x < 8$



## 2.8 方程式・不等式

### 例題

以下の方程式を解け.

$$\log_3 x + \log_3 (x - 8) = 2$$

### 問題

以下の方程式を解け.

(1)  $\log_2 x + \log_2 (x - 3) = 1$

(2)  $\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 1) = 3$

### 例題

以下の不等式を解け.

$$2 \log_3 (2 - x) < \log_3 (x + 4)$$

### 問題

以下の不等式を解け.

(1)  $\log_3 (3 - x) \geq \log_3 2x$

(2)  $\log_{\frac{1}{2}} (2 - x) \leq \log_{\frac{1}{2}} x$

## 2.9 最大最小問題

### 例題

関数  $y = (\log_3 x)^2 - \log_2 x^2 + 3$  ( $1 \leq x \leq 27$ ) について考える.

(1)  $\log_3 x = t$  とおくと、 $t$  のとりうる値の範囲を求めよ.

(2)  $y$  を  $t$  の関数として表せ.

(3)  $y$  の最大値, 最小値とそのときの  $x$  の値を求めよ.

### 問題

関数  $y = (\log_2 x)^2 + \log_2 x^4 + 1$  ( $1 \leq x \leq 16$ ) の最大値, 最小値とそのときの  $x$  の値を求めよ.

### 3 日常と対数

#### 3.1 地震について

##### 問い

地震の規模を示すマグニチュードについて、

(1) マグニチュードが1上がると、エネルギーは何倍になるか。

(2) マグニチュードが2上がると、エネルギーは何倍になるか。

マグニチュードについて

つまり...

#### 3.2 常用対数表

常用対数表を用いて、地震のエネルギーを求めてみよう。

(1)  $M1$

(2)  $M2$

(3)  $M3$

(4)  $M4$

(5)  $M5$

(6)  $M6$

(7)  $M7$

地震の発生時に発表される指針は、「マグニチュード」と「震度」がある。よく誤解されるが、この2つは別物である。

- 「マグニチュード」：地震が発するエネルギーの大きさを表したもの。1つの地震に対し、1つの値しかない。
- 「震度」：地震の揺れの大きさを表す指針。地域によって揺れの大きさは違うため、震度の値もさまざまである。

### 3.3 常用対数を用いた問題たち

$\log_{10} 2 = 0.3010$ ,  $\log_{10} 3 = 0.4771$  とする.

問い

(1)  $2^{10}$  は何桁か.

(2)  $2^{30}$  は何桁か.

桁数の求め方の工夫

$3^{10}$  が何桁か求めてみる.

問題

桁数を求めよ.

(1)  $2^{15}$

問い

$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$  を小数で表したとき, 小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか.

工夫

$\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$  を小数で表したとき, 小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか.

問題

同上.

(1)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$