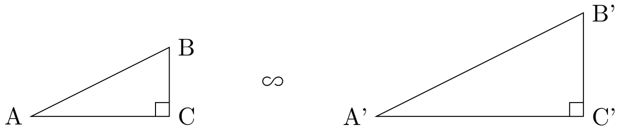
1　三角比

1.1　正弦・余弦・正接



2 つの三角形が相似なとき,

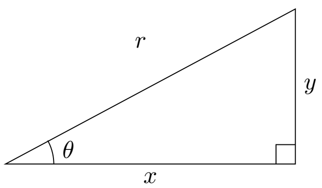
$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \qquad\qquad, \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \qquad\qquad, \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} =$$

$\angle$C$= 90^\circ$ の直角三角形において, 辺の比

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}, \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}, \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$$

の値は, $\angle$A の値のみによって決まる.

以上のことから $\cdots$



上図のように, 鋭角の 1 つを θ, 各辺を x, y, r とする.
先に見た通り,

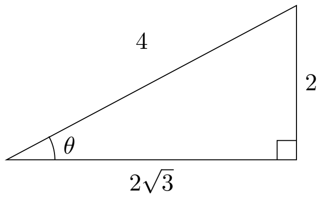
$$\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{x}$$

の値は θ の大きさのみで決まる.

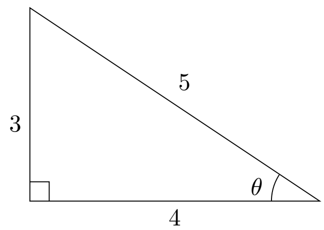
$\frac{y}{r} =$		
$\frac{x}{r} =$		
$\frac{y}{x} =$		

問題
以下の図形の $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ.

(1)



(2)



1.2　三角比の表の利用

三角比の表を使ってみよう.

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

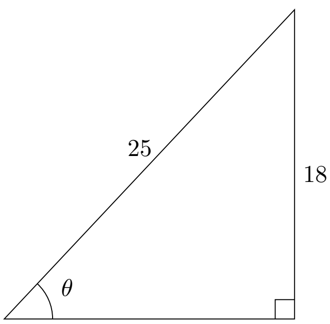
次の値を求めよ.

(1) $\sin 6^\circ$

(2) $\cos 8^\circ$

(3) $\tan 10^\circ$

以下の θ のおおよその値を三角比を用いて求めよ.



問題

三角比の表を用いて以下のおおよその値を求めよ.

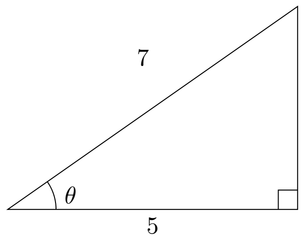
(1) $\sin 25^\circ$

(2) $\cos 67^\circ$

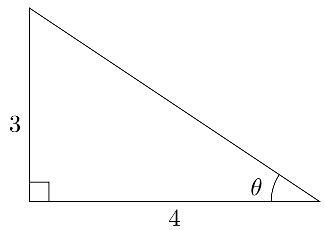
(3) $\tan 38^\circ$

以下の θ のおおよその値を三角比を用いて求めよ.

(1)



(2)

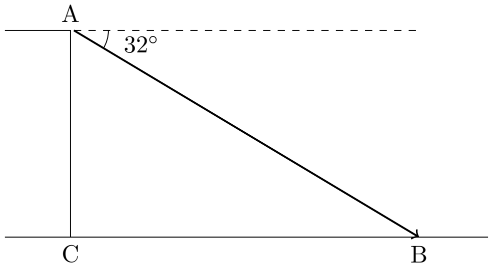


1.3　**三角比の活用**

文章問題を解いてみよう．

(1) 木の根本から水平に 10 m 離れた地点に立って木の先端を見上げると，水平面とのなす角が 21° であった．目の高さを 1.6 m として，木の高さを求めよ．ただし，小数第 2 位を四捨五入せよ．

(2) 地上からの高さ 20 m の地点 A で地上の場所 B を見下ろしたら，その角は下の図のように水平面に対して 32° であった．B は，A の真下の地点 C から何 m 離れているか．1m 未満を四捨五入して求めよ．



(3) 傾斜角 19° の坂をまっすぐに 100 m 登る．このとき，以下の問いに 1m 未満を四捨五入して答えよ．

(a) 鉛直方向には何 m 上がることになるか．

(b) 水平方向には何 m 進ことになるか．

(4) 車椅子用に屋外に設置するスロープについて，その勾配は $\dfrac{1}{15}$ 以下にするという基準がある．
スロープの基準を 1° 単位で設定する場合，この基準を満たすには，傾斜角は何度以下にしなければならないか．ここで，勾配とは，水平方向に 1 進ときに鉛直方向に上がる高さを表す．

2 三角比の相互関係

2.1 三角比の相互関係

相互関係

(1) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

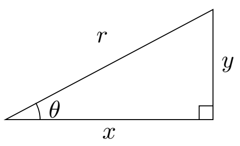
(3) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

証明しよう.

<proof>

(1) について

三角比の定義から,



$$\frac{y}{r} = \qquad \frac{x}{r} = \qquad \frac{y}{x} =$$

なので,

$$x = \qquad\qquad , y = \qquad\qquad \cdots(*)$$

$$\therefore\ \tan\theta =$$

(2) について

上図の三角形において, 三平方の定理より,

$$\qquad + \qquad\qquad =$$

この式に $(*)$ 代入して

$$\qquad + \qquad\qquad =$$

$$\therefore\ \sin^2\theta + \cos^2\theta =$$

(3) について

(2) の式の辺々を $\cos^2\theta$ で割ると,

$$\qquad + \qquad\qquad =$$

ここで (1) より $\tan\theta =$ 　　　　　　　　　　なので,

$$\qquad + \qquad\qquad =$$

$\square$

相互関係を用いて, 1 つの三角比から他の三角比を求めてみよう.

(1) θ は鋭角とする. $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき, $\cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ.

<Ans>

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から,

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$=$$

ここで, $0^\circ < \theta < 90^\circ$ なので,

$$\cos\theta =$$

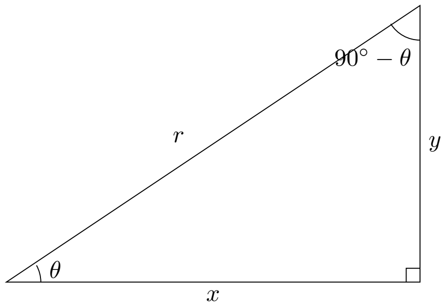
また, $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ から,

$$\tan\theta =$$

(2) θ は鋭角とする. $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき, $\cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ.

(3) θ は鋭角とする. $\tan\theta = 2$ のとき, $\cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ.

2.2　$90° - \theta$ の三角比



上の図から,

$$\sin\theta =$$

$$\cos\theta =$$

$$\tan\theta =$$

また,

$$\sin(90° - \theta) =$$

$$\cos(90° - \theta) =$$

$$\tan(90° - \theta) =$$

よって, $90° - \theta$ の三角比は, θ の三角比を用いて以下のように表すことができる.

$90° - \theta$ の三角比

$$\sin(90° - \theta) =$$

$$\cos(90° - \theta) =$$

$$\tan(90° - \theta) =$$

この関係式を用いて, ある三角比を別の角の三角比で表してみよう.

(1) $\sin 53°$

(2) $\cos 86°$

(3) $\tan 43°$

本当に成り立っているのかを三角比の表で確認してみよう.

以下の ( ) に適する鋭角の角度を入れよ.

(1) $\sin 64° = \cos(\qquad)$

(2) $\cos 34° = \sin(\qquad)$

(3) $\tan 29° = \dfrac{1}{\tan(\qquad)}$

以下の三角比を $45°$ 以下の三角比で表せ.

(1) $\sin 59°$

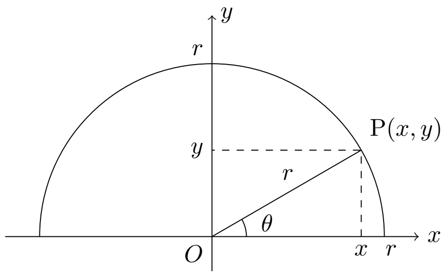
(2) $\cos 78°$

(3) $\tan 81°$

3　三角比の拡張

3.1　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ への拡張

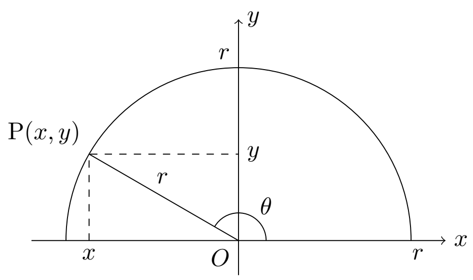
鋭角でしか考えることができなかった三角比を, 鋭角以外でも考えることのできるように拡張しよう.



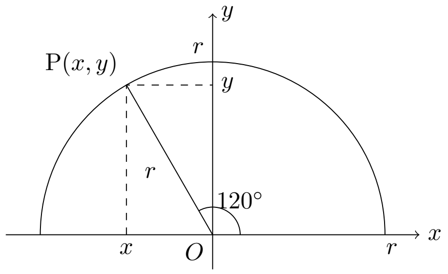
半径 r 上の円上の点を $\mathrm{P}(x, y)$ とする. x 軸の正の向きと OP のなす角を θ とし, 三角比を以下のように定義.

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

座標で定義することで, $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ での三角比を定義できる.



この定義を用いて, 120° の三角比を求めてみよう.

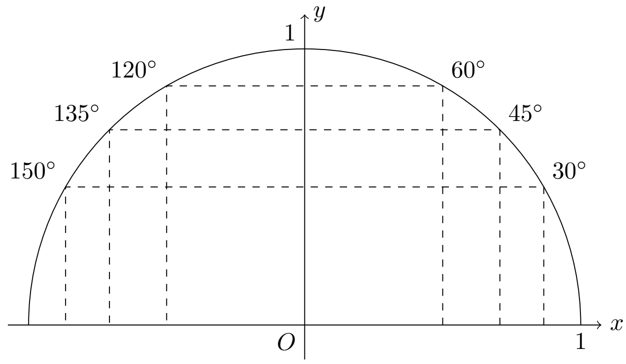


(1) $\sin 120^\circ$

(2) $\cos 120^\circ$

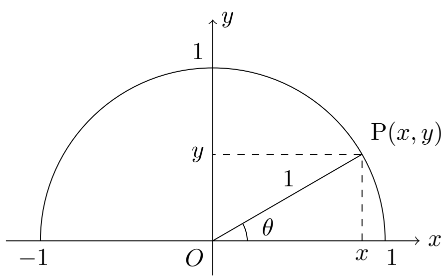
(3) $\tan 120^\circ$

三角比の値は, 三角形の大きさ (円の半径の大きさ) に依らず決まので, $r = 1$ として考えることが多い. (これを<u>単位円</u>という)
単位円を用いて, 下の表を埋めてみよう.



θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
$\tan\theta$									

三角比についてまとめてみる.



単位円で考えると, 点 P の座標 (x, y) は

$x =$ 　　　　　　　　$, y =$

また, 点 P は半円上にあることから,

$\leqq y \leqq$ 　　　,　　　$\leqq x \leqq$

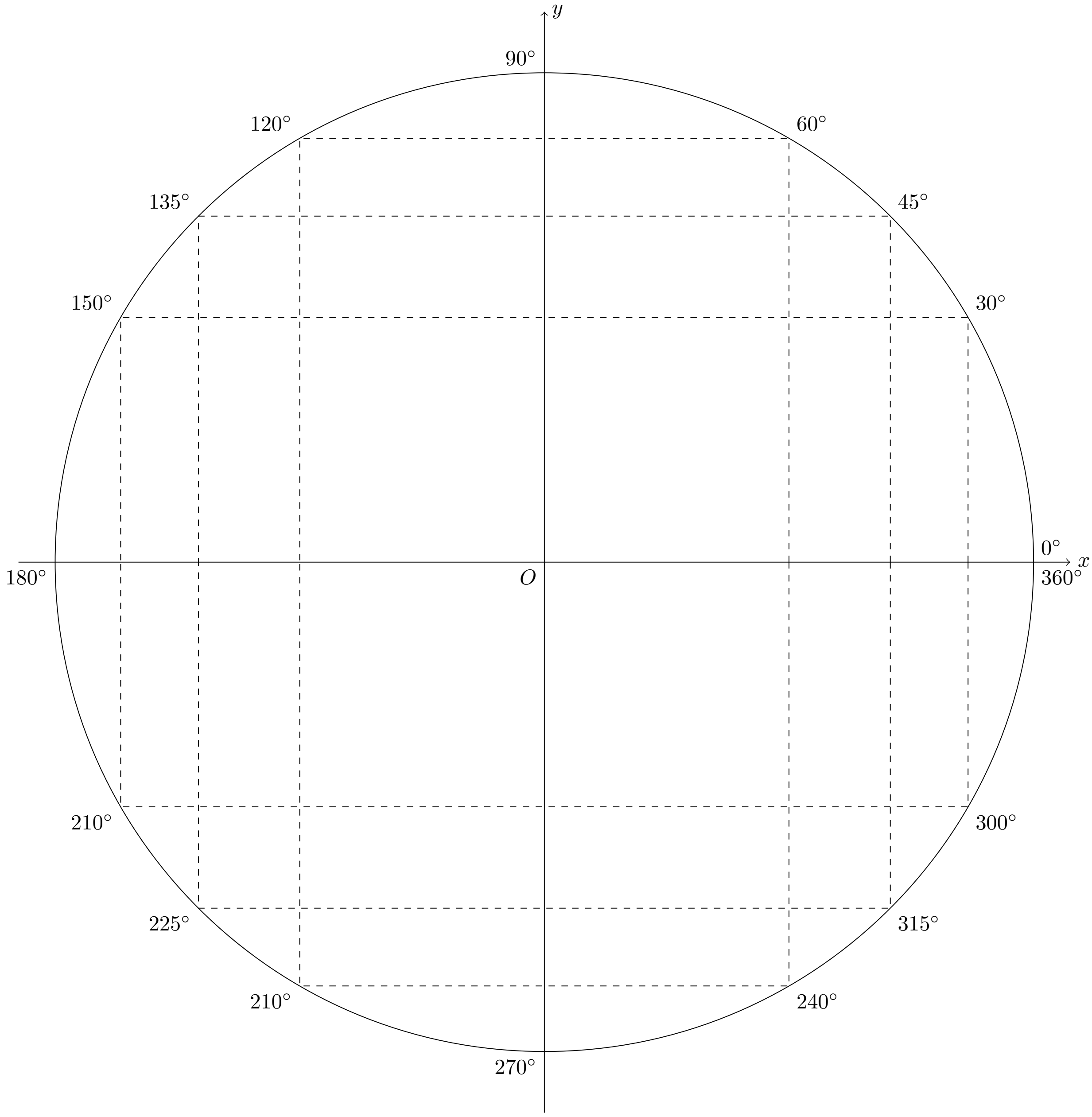
なので, $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ において,

$\leqq \sin\theta \leqq$ 　　　,　　　$\leqq \cos\theta \leqq$

$\tan\theta =$ 　　　　なので, $\tan\theta$ は直線 OP の＿＿＿＿＿＿

3.2　更なる拡張 $(+\alpha)$

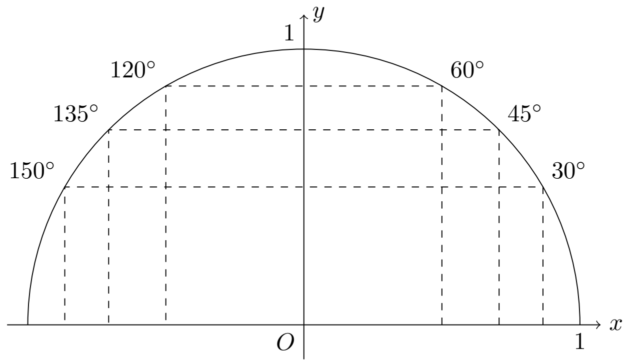
同様にして 360° まで拡張することもできる．単位円で考えてみよう．



θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
$\sin\theta$																
$\cos\theta$																
$\tan\theta$																

3.3 $180^\circ - \theta$ の三角比

復習



θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
$\tan\theta$									

上の表から天下り的に性質を見つけよう.

$180^\circ - \theta$ の三角比

$\sin(180^\circ - \theta) =$

$\cos(180^\circ - \theta) =$

$\tan(180^\circ - \theta) =$

以下の三角比を鋭角の三角比で表せ.

(1) $\sin 124^\circ =$

(2) $\cos 134^\circ =$

(3) $\tan 157^\circ =$

以下の値を, 三角比の表を用いて求めよ

(1) $\sin 159^\circ$

(2) $\cos 178^\circ$

(3) $\tan 151^\circ$

3.4　三角比の等式

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき, 次の等式を満たす θ の値を求めよ.

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

(5) $\sin\theta = 0$

(6) $\tan\theta = 1$

3.5 三角比の不等式

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき, 次の等式を満たす θ の値の範囲を求めよ.

(1) $\sin\theta > \dfrac{1}{2}$

(2) $\cos\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\sin\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

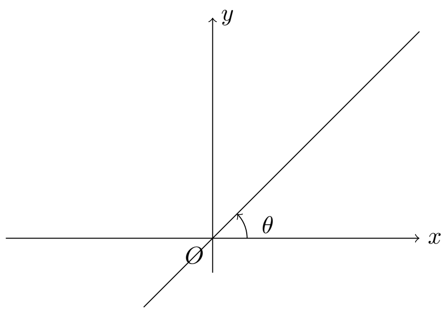
(4) $\cos\theta \leqq -\dfrac{1}{2}$

(5) $\sin\theta \geqq 1$

(6) $\tan\theta < 1$

3.6　直線の傾きと $\tan\theta$

下の図のように, x 軸の正の部分から, 反時計回りに直線まで測った角度を直線と x 軸の正の向きとのなす角という.



(1) 直線 $y = x$ と x 軸の正の向きとのなす角を求めよ.

(2) 直線 $y = -\sqrt{3}x$ と x 軸の正の向きとのなす角を求めよ.

(3) 直線 $y = x$ と直線 $y = \sqrt{3}x$ のなす鋭角を求めよ.

(4) 直線 $y = -x$ とのなす鋭角が 30° になる直線の方程式を求めよ.

3.7　相互関係

復習

相互関係

(1)

(2)

(3)

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする． $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ のうち，1 つが次の値をとるとき，他の 2 つの値を求めよ．

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{3}$

(2) $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$

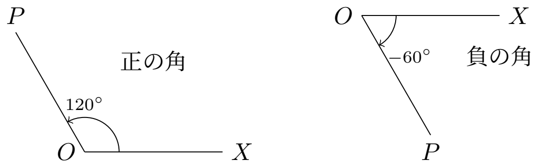
(3) $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$

(4) $\tan\theta = -2$

4　角の拡張

4.1　拡張

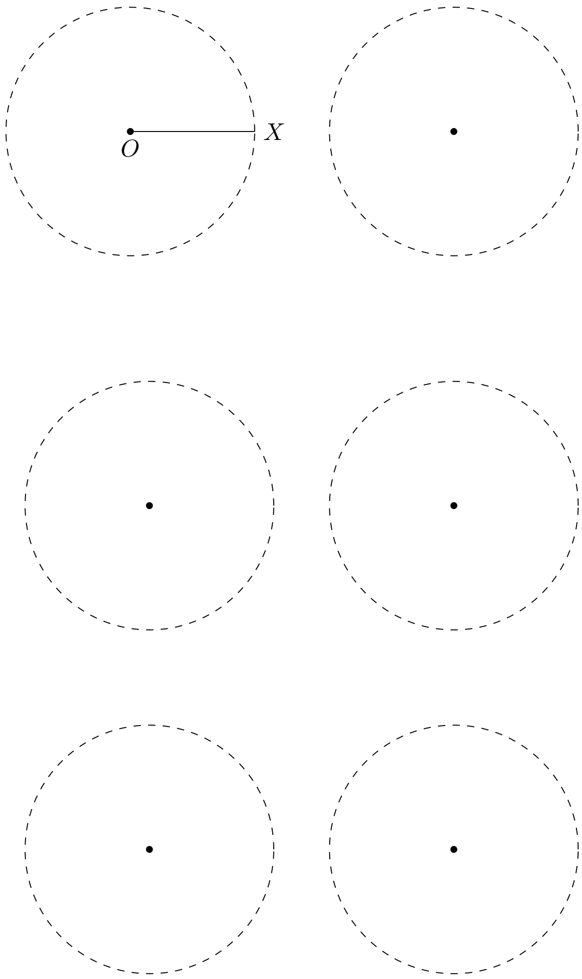
　角を負の世界へ拡張しよう.
平面上で, 点 O を中心として半直線 OP を回転させる.
このとき, 半直線 OP のことを動径
動径の最初の位置である半直線 OX のことを始線



上図のように, 反時計回りに測った回転の角を「正の角」
時計回りに測った回転の角を「負の角」という.

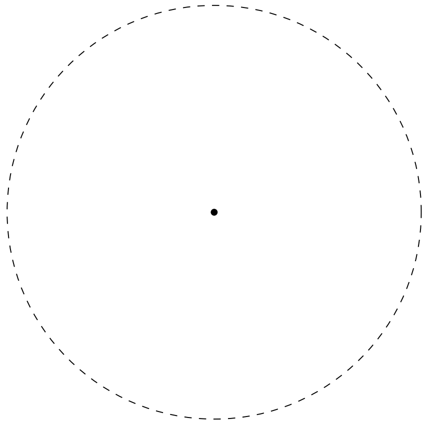
問題
次の動径を図示せよ.

(1) 260°
(2) 420°
(3) -45°
(4) 750°
(5) -240°
(6) 1080°



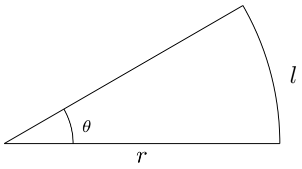
問題

(1) 45° の動径と同じ位置にある角度を正, 負それぞれ 2 つずつあげよ.



角度 θ に対し動径の位置は, ________° 回転するごとに一致する.

4.2 弧度法



定義 (弧度法)

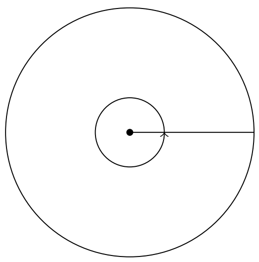
半径 r, 弧長 l に対し,

$$\theta = \frac{l}{r}\ (rad)$$

と定義する.
単位 (rad) はラジアンと読む. 省略することが多い.

ラジアンに円の大きさには関係しないので, 半径 1 で考えると便利である.

<u>例</u>
360° を弧度法で表す.



半径 1 の円の弧長 (円周) は

____________なので,

$\theta =$

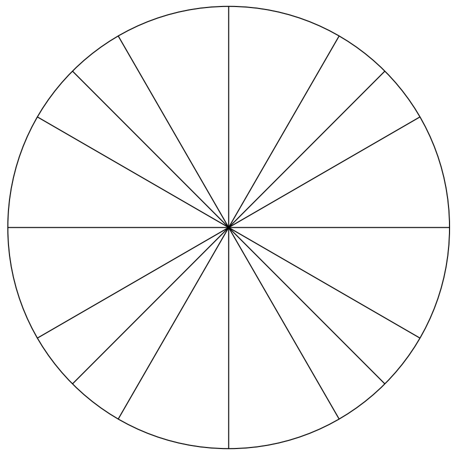
<u>問題</u>
度数法で表された角度を弧度法で表せ.

(1) 30°

(2) 120°

(3) 270°

下の図に弧度法で角度を書き入れよう.



<u>問題</u>
次の角度を $0 \leqq \theta < 2\pi$ の弧度法で表せ.

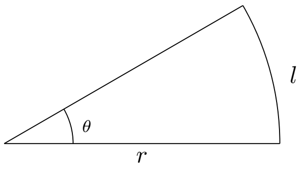
(1) 3π

(2) $-\dfrac{1}{4}\pi$

(3) 45°

(4) 495°

4.3 扇形



弧度法の定義より,

$$\theta = \frac{l}{r}\ (rad)$$

なので,

弧長 $l =$

次に, 円の面積 πr^2 に対して, 扇形の面積を考える.
円 1 周 2π に対し, 扇形は角度 θ 分であるので,
扇形の面積 S は

$$S = \pi r^2 \times$$

$$=$$

<u>問題</u>
以下の扇形の弧長 l と面積 S を求めよ.

(1) 半径 4, 中心角 $\dfrac{1}{2}\pi$

(2) 半径 2, 中心角 $\dfrac{7}{6}\pi$

(3) 半径 3, 中心角 $\dfrac{5}{3}\pi$

6　加法定理

6.1　計算練習

「$75°$ の三角比を求めたい．」($\leftarrow$ 目標)

加法定理

加法定理を使って $75°$ の三角比を求めてみよう．

計算練習

(1) $15°$ の三角比を求めよ．

(2) $\dfrac{11}{12}\pi$ の三角比を求めよ．

(3) α の動径が第 3 象限, β の動径が第 4 象限にあり,
$\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}, \cos\theta = \dfrac{4}{5}$ のとき, 以下の問いに答えよ.

(a) $\cos\alpha$ の値を求めよ.

(b) $\sin\beta$ の値を求めよ.

(c) $\sin(\alpha+\beta)$ の値を求めよ.

(d) $\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ.

(4) α の動径が第 2 象限, β の動径が第 1 象限にあり,
$\sin\alpha = \dfrac{2}{3}, \cos\theta = \dfrac{3}{5}$ のとき, $\sin(\alpha-\beta), \cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ.

6.2 証明

加法定理

< 証明 >

6.3 演習

(1) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}\ \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right), \cos\beta = -\dfrac{4}{5}\ \left(\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi\right)$ のとき, $\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha-\beta), \tan(\alpha-\beta)$ の値を求めよ.

(2) 2 直線 $y = 3x, y = \dfrac{1}{2}x$ のなす鋭角を求めよ.

(3) 原点を通り, 直線 $y = -x + 1$ と $\dfrac{1}{3}\pi$ の角をなす直線の方程式を求めよ.

7　加法定理の応用

7.1　復習

加法定理を思い出す.

(1) $\sin(\alpha+\beta)$

(2) $\sin(\alpha-\beta)$

(3) $\cos(\alpha+\beta)$

(4) $\cos(\alpha-\beta)$

(5) $\tan(\alpha+\beta)$

(6) $\tan(\alpha-\beta)$

計算練習

(1) $\sin\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{4}\pi\right)$

(2) $\cos\left(\frac{1}{12}\pi\right)$

(3) $\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right)$

(4) $\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right)$

(5) $\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right)$

(6) $\tan\left(\frac{5}{12}\pi\right)$

7.2　2 倍角

考える

$2\alpha = \alpha + \alpha$ と考えることで, 2α の三角比を考える.

(1) $\sin(\alpha + \alpha)$ を α の三角比で表そう.

(2) $\cos(\alpha + \alpha)$ を α の三角比で表そう.

(3) $\cos(\alpha + \alpha)$ を $\sin\alpha$ で表そう.

(4) $\cos(\alpha + \alpha)$ を $\cos\alpha$ で表そう.

(5) $\tan(\alpha + \alpha)$ を $\tan\alpha$ で表そう.

練習問題

(1) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ で, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ のとき, $\sin 2\alpha$ の値を求めよ.

(2) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ で, $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ のとき, $\cos 2\alpha$ の値を求めよ.

(3) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で, $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ のとき, $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \tan 2\alpha$ の値を求めよ.

7.3　半角

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta, \quad \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

を式変形して,

$$\sin^2\theta = \qquad\qquad\qquad\qquad, \quad \cos^2\theta =$$

また,

$$\tan^2\theta =$$

θ を $\dfrac{\theta}{2}$ に置き換えて,

半角

$$\sin^2\frac{\theta}{2} =$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} =$$

$$\tan^2\frac{\theta}{2} =$$

練習

(1) $\cos\dfrac{\pi}{8}$ の値を求めよ.

(2) $\sin\dfrac{\pi}{8}$ の値を求めよ.

(3) $\cos\dfrac{3\pi}{8}$ の値を求めよ.

(4) $\tan\dfrac{3\pi}{8}$ の値を求めよ.

練習

(1) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で, $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ のとき, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ.

(2) $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ で, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{4}$ のとき, $\sin\dfrac{\alpha}{2}, \cos\dfrac{\alpha}{2}, \tan\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ.

8　三角関数の合成

問題
以下の方程式を解け.

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$$

問題
以下の不等式を解け.

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x \leqq 1$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき, 以下の方程式を解け.

(1) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}$

(2) $\sin x + \cos x = 1$

(3) $\sin x - \sqrt{3}\cos x \leqq 0$

(4) $\sqrt{3}\sin x + \cos x \leqq \sqrt{3}$