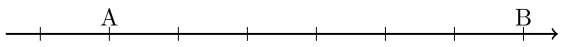
1　中学の復習

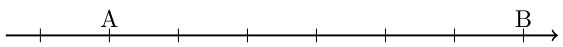
1.1　新出用語

(1) 内分

(a) AB を 1 : 2 に内分する点 P



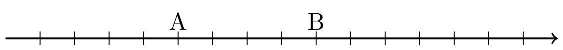
(b) AB を 2 : 1 に内分する点 Q



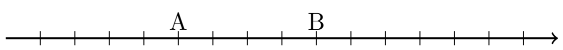
(c) AB を 2 : 1 に内分する点 R

(2) 外分

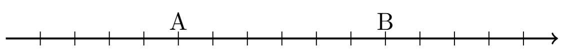
(a) AB を 2 : 1 に外分する点 P



(b) AB を 1 : 2 に外分する点 Q



(c) AB を 3 : 1 に外分する点 R



(d) AB を 1 : 4 に外分する点 S

1.2　既習用語の確認

(1) 二等辺三角形とは

(2) 正三角形とは

(3) 正方形とは

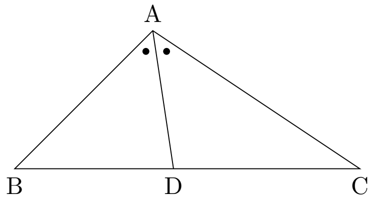
(4) 長方形とは

(5) 平行四辺形とは

(6) 台形とは

1.3　証明しよう

1.3.1　定理 1



上の図において, 以下の等式が成立する.

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$$

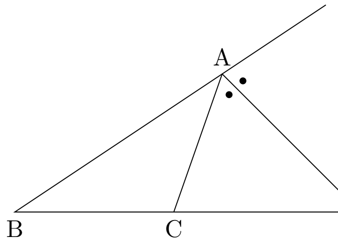
Proof.

□

練習問題

AB= 10, BC= 12, CA= 6 である △ABC において, ∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とおく. 線分 BD の長さを求めよ.

1.3.2　定理 2



上の図において, 以下の等式が成立する.

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$$

Proof.

□

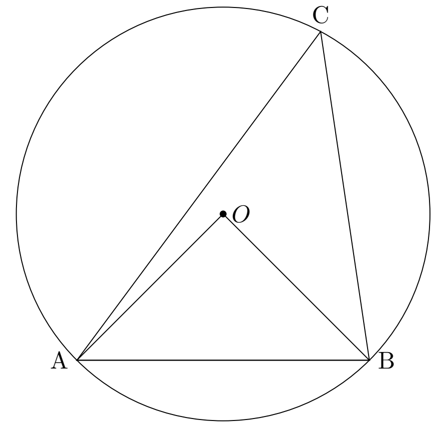
練習問題

AB= 20, BC= 10, CA= 12 である △ABC において, ∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とおく. 線分 BD の長さを求めよ.

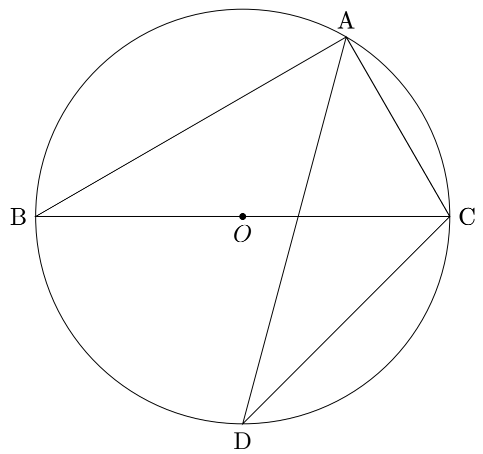
1.4　円周角の定理

指定された角の大きさを求めよ.

(1) $\angle\mathrm{OAB} = 47^\circ$ のとき, $\angle\mathrm{ACB}$ の値



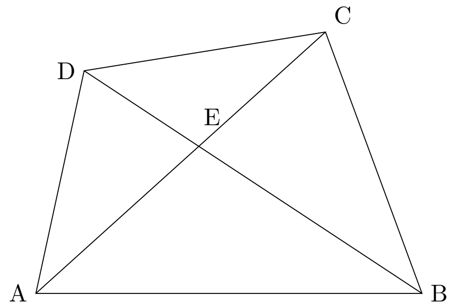
(2) $\angle\mathrm{ADC} = 30^\circ$ のとき, $\angle\mathrm{ACB}$ の値



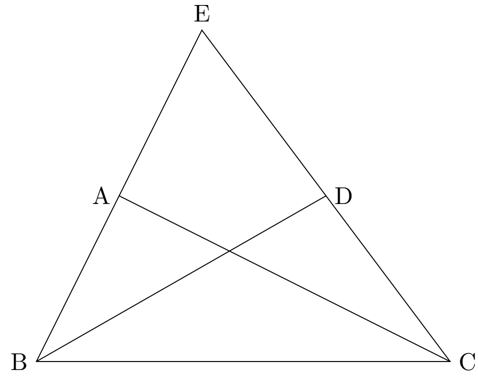
1.5　円周角の定理の逆

以下の図において, 4 点 A, B, C, D は同一円周上にあるか判定せよ.

(1) $\angle\mathrm{ADB} = 65^\circ$, $\angle\mathrm{AED} = 78^\circ$, $\angle\mathrm{DBC} = 37^\circ$

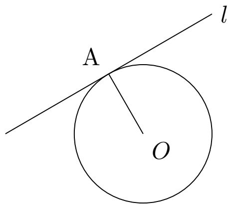


(2) $\angle\mathrm{BEC} = 84^\circ$, $\angle\mathrm{BDC} = 110^\circ$, $\angle\mathrm{ACD} = 26^\circ$

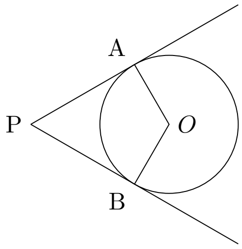


1.6　円と直線

円と直線の関係についての復習をしよう.



直線 l と線分 OA の関係性________________________



線分 PA と線分 PB の関係性________________________

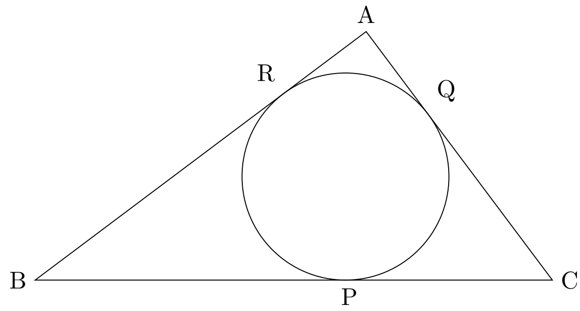
線分 PA と線分 PB の関係性について証明しよう.

Proof.

□

<u>練習問題</u>

(1) AB$=7$, BC$=8$, CA$=5$ とする. BP の長さを求めよ.



1.7　三角形の存在

3 辺の長さが以下のような三角形は存在するか答えよ.
また, 存在する場合に, その三角形が特殊 (直角・二等辺・正など) であれば, それも答えよ.

(1) $1, 2, 2$

(2) $3, 4, 5$

(3) $4, 6, 10$

(4) $\sqrt{5}, \sqrt{3}, \sqrt{2}$

2　三角形の心

2.1　外心

三角形に形成された折り紙で, それぞれの辺の垂線を折ろう.

＜気づくこと＞

以下に気づくことを列挙しよう.

外心

2.2　内心

三角形に形成された折り紙で, それぞれの角の二等分線を折ろう.

＜気づくこと＞

以下に気づくことを列挙しよう.

内心

2.3 重心

三角形に形成された折り紙で, それぞれの中線を折ろう.

注) 中線とは, 頂点から向かい合う辺の中点へ引いた線分のこと.

< 気づくこと >

以下に気づくことを列挙しよう.

重心

2.4 垂心

三角形に形成された折り紙で, それそれの角から, 向かい合う辺への垂線を折ろう.

< 気づくこと >

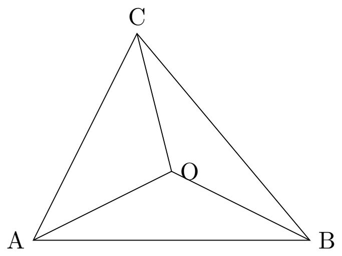
以下に気づくことを列挙しよう.

垂心

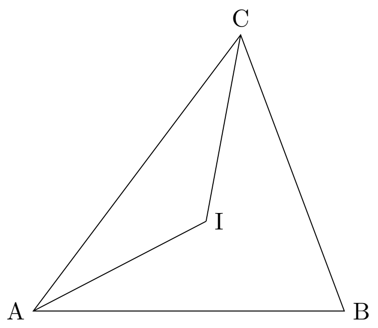
2.5　練習問題

指定された角, 辺の大きさを求めよ.

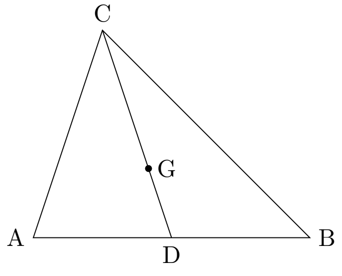
(1) O を △ABC の外心とする. $\angle$OAB$= 32^\circ$, $\angle$OAC$= 35^\circ$ のとき, $\angle$OBC の値.



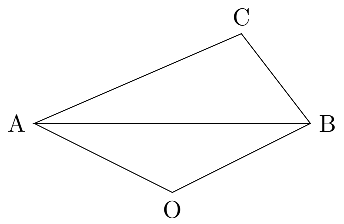
(2) I を △ABC の内心とする. $\angle$ABC$= 70^\circ$, $\angle$IAB$= 30^\circ$ のとき, $\angle$ICB の値.



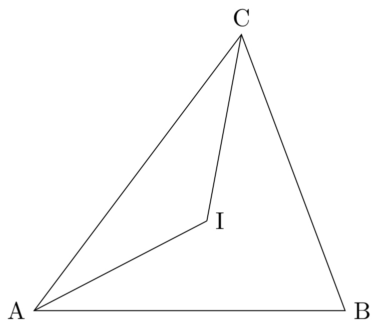
(3) G を △ABC の重心とする. CD$= 6$ のとき, GD の値.



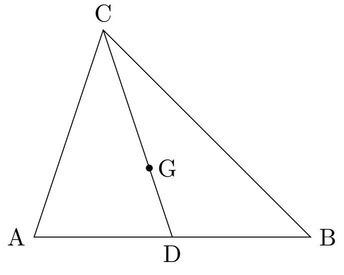
(4) O を △ABC の外心とする. $\angle$CAB$= 25^\circ$, $\angle$CBA$= 45^\circ$ のとき, $\angle$OAB の値.



(5) I を △ABC の内心とする. $\angle$ABC$= 40^\circ$ のとき, $\angle$AIC の値.



(6) G を △ABC の重心とする. △ABC : △GAB.

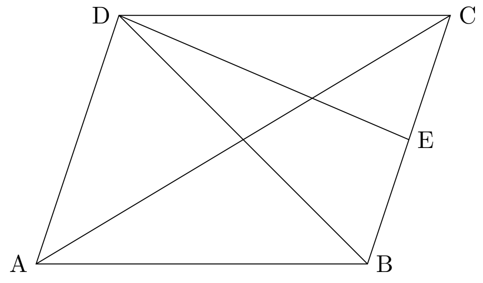


2.6　練習問題 2

各問いに答えよ.

(1) $\triangle$ABC の内心と外心が一致するとき, $\triangle$ABC はどのような三角形か説明せよ.

(2) 平行四辺形 ABCD について, 辺 BC の中点を E, 辺 DE と AC の交点を F, 辺 AC と DB の交点を O とする. $\triangle$DFC の面積が 5 のとき, $\triangle$AOD の面積を求めよ.



(3) $\triangle$ABC の内心を I とし, 3 辺 BC, CA, AB に関して I と対称な点をそれぞれ P, Q, R とする. このとき, I は $\triangle$PQR についてどのような点であるか.

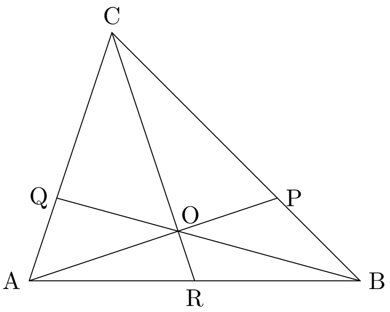
3 チェバメネ

3.1 チェバの定理

チェバの定理

△ABC の辺上にもその延長線上にもない点 O があり, 頂点 A, C, C と O を結ぶ直線が向かい合う辺またはその延長線と, それぞれ点 P, Q, R で交わるとき, 以下が成立.

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1$$



Proof. △ABC の頂点 A を通り, 辺 BC に平行な直線を引く.

この直線と直線 BQ, CR との交点をそれぞれ D, E とする.

ED∥BC から,

$$\mathrm{CQ}:\mathrm{QA}=\mathrm{CB}:\underline{\hspace{3em}}\qquad\therefore\ \frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}}=\frac{\hspace{2em}}{\mathrm{BC}}$$

$$\mathrm{AR}:\mathrm{RB}=\mathrm{AE}:\underline{\hspace{3em}}\qquad\therefore\ \frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{AR}}=\frac{\hspace{2em}}{\mathrm{AE}}$$

また, BP:DA=PO:______, PC:AE=PO:______であるから,

$$\mathrm{BP}:\mathrm{DA}=\mathrm{PC}:\underline{\hspace{3em}}\qquad\therefore\ \frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{BP}}=\frac{\hspace{2em}}{\mathrm{DA}}$$

よって,

$$\frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{AR}}\cdot\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}}=\underline{\hspace{3em}}\cdot\underline{\hspace{3em}}\cdot\underline{\hspace{3em}}=1$$

□

例題

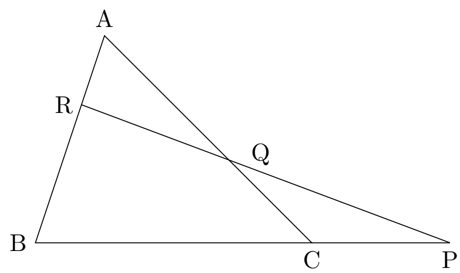
上の図で, AR:RB= 1 : 2, BC:PC= 4 : 3 のとき, CQ:QA を求めよ.

3.2 メネラウスの定理

メネラウスの定理

△ABC の辺 BC, CA, AB またはその延長線が, 三角形の頂点を通らない直線 l と, それぞれ点 P, Q, R で交わるとき, 以下が成立.

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1$$



Proof. △ABC の頂点 A を通り, PR に平行な直線をひく. この直線と, 直線 BC の交点を D とする.

RP∥AD から,

$$\mathrm{CQ}:\mathrm{QA}=\mathrm{CP}:\underline{\hspace{3em}}\qquad\therefore\ \frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}}=\frac{\hspace{2em}}{\mathrm{CP}}$$

$$\mathrm{AR}:\mathrm{RB}=\mathrm{DP}:\underline{\hspace{3em}}\qquad\therefore\ \frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{AR}}=\frac{\hspace{2em}}{\mathrm{DP}}$$

よって,

$$\frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{AR}}\cdot\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}}=\underline{\hspace{3em}}\cdot\underline{\hspace{3em}}\cdot\underline{\hspace{3em}}=1$$

□

例題

上の図で, AR : RB= 2 : 3, BP : PC= 2 : 3 のとき, CA : AQ, PR : RQ を求めよ.

3.3 練習問題

(1) $\triangle$ABC の辺 AB を 3 : 2 に内分する点を R, 辺 AC を 1 : 2 に内分する点を Q とする．線分 BQ と CR の交点を O, 直線 AO と辺 BC の交点を P とする．以下の問いに答えよ．

(a) BP : PC を求めよ．

(b) PO : OA を求めよ．

(2) $\triangle$ABC の辺 AB, AC を 1 : 3 に内分する点をそれぞれ R, Q とする．線分 BQ と CR の交点を O とし，直線 AO と辺 BC の交点を P とする．以下の問いに答えよ．

(a) BP : PC を求めよ．

(b) $\triangle$OBP : $\triangle$ABC を求めよ．

(3) $\triangle$ABC の辺 AB, AC 上に点 R, Q があり，AR : RB= 5 : 1, AQ : QC = 2 : 3 である．線分 BQ と CR の交点を O, 線分 AO と辺 BC の交点を P とするとき，以下の比を求めよ．

(a) BP : PC

(b) PO : OA

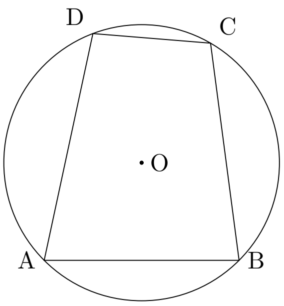
(c) $\triangle$OBC : $\triangle$ABC

4　内接多角形

4.1　内接四角形

円に内接する四角形の性質

円に内接する四角形の対角の和は 180° である.



Proof.
四角形 ABCD が円 O に内接し,

$$\angle \mathrm{BAD} = \alpha,\quad \angle \mathrm{BCD} = \beta$$

とする. 円周角の定理から,

角 A の中心角は___________, 角 C の中心角は___________

である. よって,

$$2\alpha + 2\beta =$$

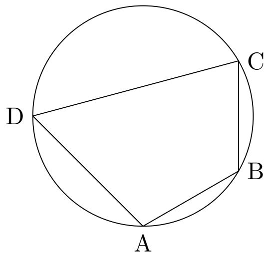
ゆえに

$$\alpha + \beta =$$

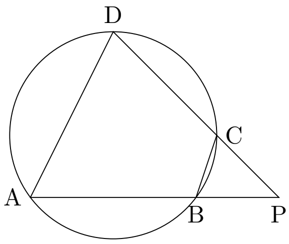
□

例

(1) ∠ADB= 25°, ∠ABD= 40° のとき, ∠BCD の値を求めよ.

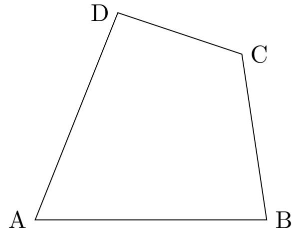


(2) ∠DAP= 60°, ∠APD= 45° のとき, ∠CBP の値を求めよ.



四角形の円への内接条件

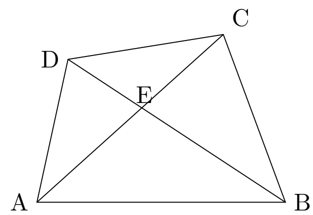
対角の和が 180° である四角形は円に内接する.



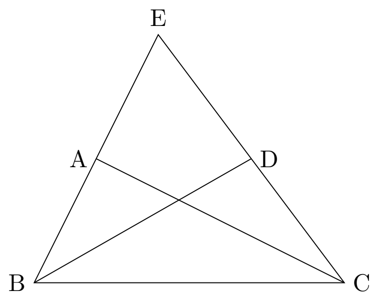
例

以下の図において, 4 点 A, B, C, D は同一円周上にあるか判定せよ.

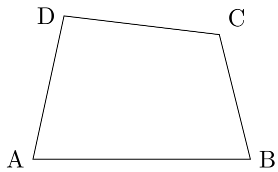
(1) ∠ABE= 40°, ∠AEB= 110°, ∠CDE= 30°



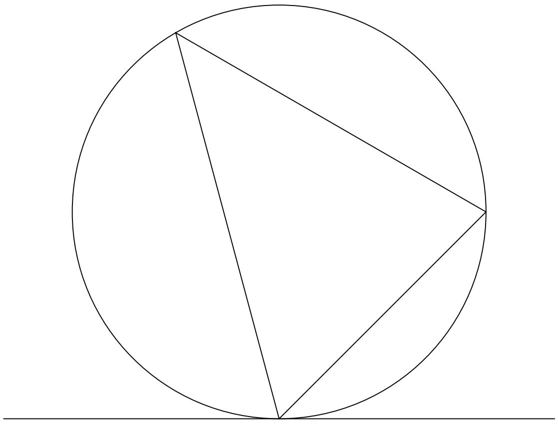
(2) ∠BEC= 73°, ∠CAE= 74°, ∠DBE= 32°



(3) A の内角 82°, B の内角 71°, D の外角 88°

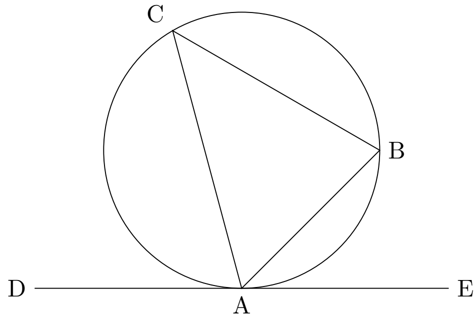


5 接弦定理

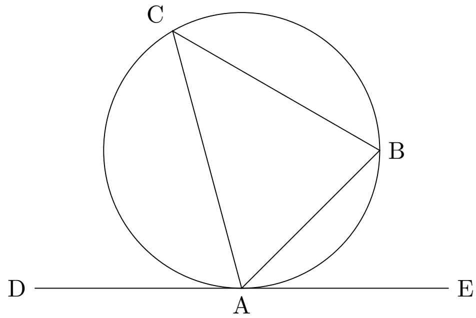


(1) 以下の問いに答えよ.

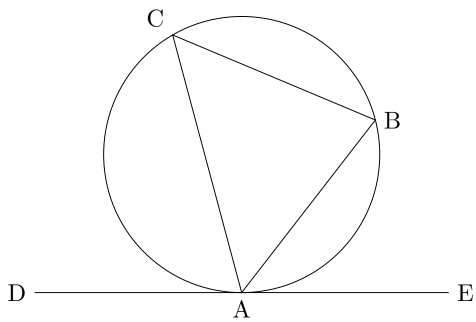
(a) $\angle$ACB$=40^\circ$ のときの $\angle$BAE の値.



(b) $\angle$ACB$=38^\circ$, $\angle$CAB$=61^\circ$ のときの $\angle$CAD の値.



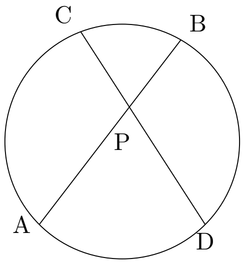
(c) AB=CB, $\angle$ACB$=51^\circ$ のときの $\angle$BAE の値.

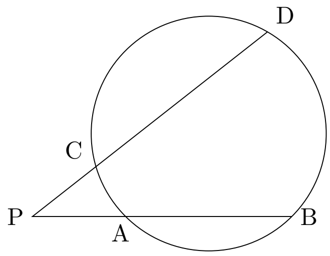


6　法べきの定理

6.1　方べきの定理 ver1

Proof.





1) 左図
__________________________________から,

$$\angle \mathrm{PAC} = \angle \mathrm{PDB}$$
$$\angle \mathrm{PCA} = \angle \mathrm{PBD}$$

が成立する.

2) 右図
__________________________________から,

$$\angle \mathrm{PAC} = \angle \mathrm{PDB}$$
$$\angle \mathrm{PCA} = \angle \mathrm{PBD}$$

が成立する.

このことから, どちらの図においても, _______________________

なので, $\triangle$PAC と $\triangle$PDB は___________である.

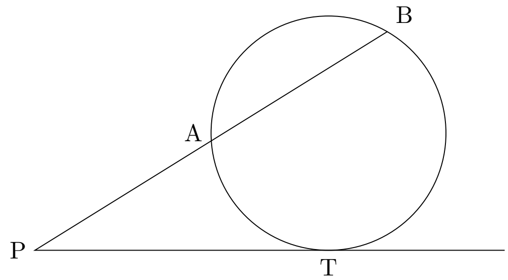
よって, PA : PD = PC : _____

したがって, PA·PB = PC·PD

□

6.2　方べきの定理 ver2

Proof.



AT と BT を線分で結ぶと, $\triangle$PAT と $\triangle$PTB において, T が円と直線の接点なので,

$$\angle \mathrm{ATP} = \angle \underline{\qquad\qquad}$$

さて, 角 P は共通なので,

____________________________により,

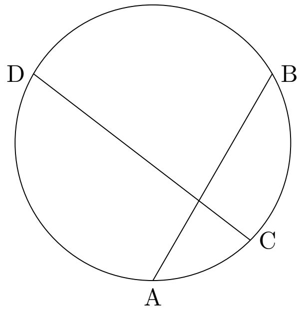
$\triangle$PAT と $\triangle$PTB は___________である.

よって, よって, PA : PT = PT : _____

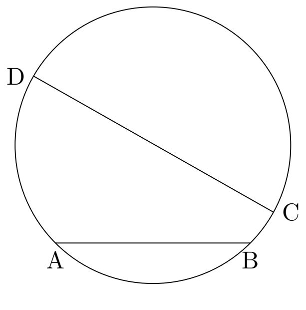
したがって, PA·PB = PT^2

□

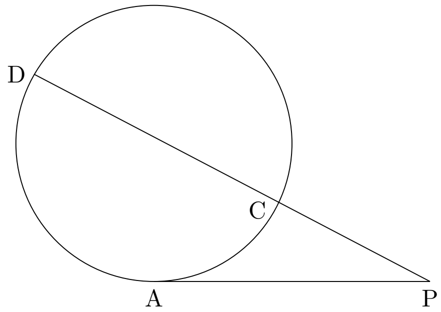
(1) 辺 AB と辺 CD の交点を O とする．AO$=2$, BO$=3$, DO$=4$ のとき, CO の長さ.



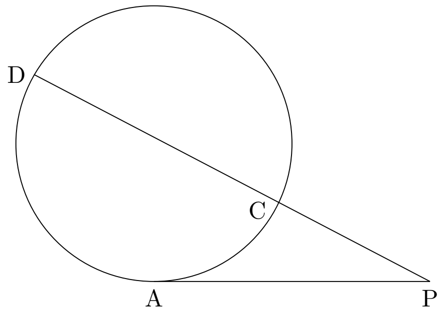
(2) 辺 AB の延長と辺 CD の延長の交点を P とする．AP$=4$, BP$=1$, DP$=7$ のとき, CP の長さ.



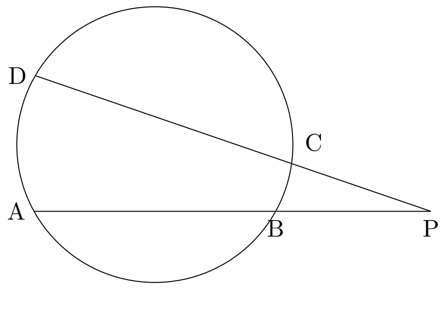
(3) CP$=3$, DC$=4$ のとき, AP の長さ.



(4) CD$=3$, AP$=2$ のとき, CP の長さ.

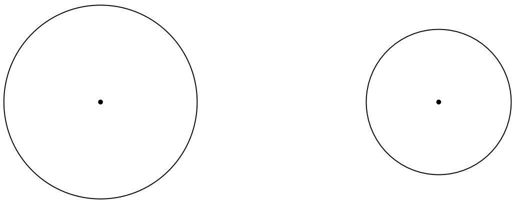


(5) AB$=2x$, BP$=3$, CD$=6$, CP$=4$ のとき, x の値.

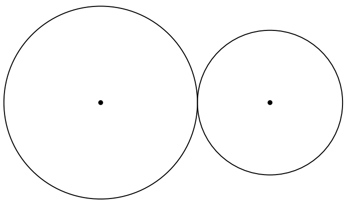


7　2 つの円の位置関係

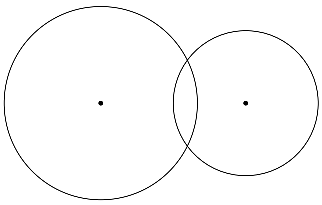
(1)



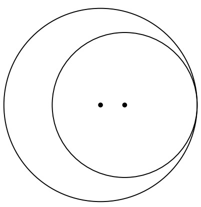
(2)



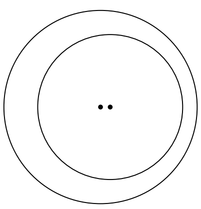
(3)



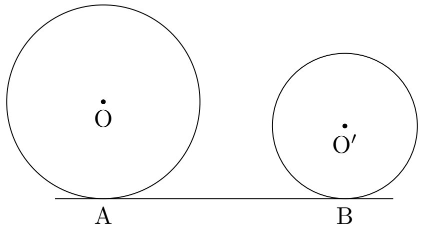
(4)



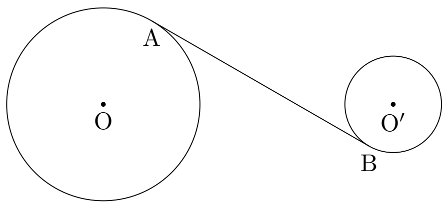
(5)



(1) 円 O の半径を 4, 円 O' の半径を 2 とする．図中において, AB の距離を 8 とする．OO' の距離を求めよ.



(2) 円 O の半径を 4, 円 O' の半径を 3 とする．図中において, OO' の距離を 8 とする．AB の距離を求めよ.



(3) 円 O の半径を 4, 円 O' の半径を 5 とする．OO' の距離を 6 とする．AB の距離を求めよ.