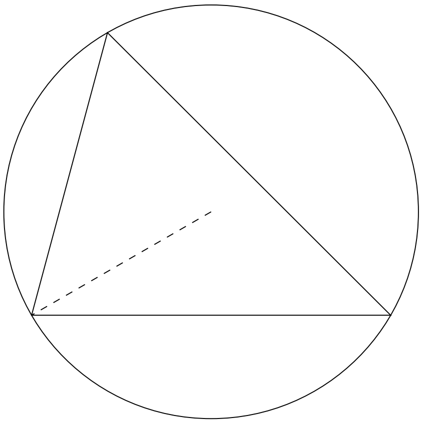
1　正弦定理 (計算)



正弦定理

練習

△ABC において, 以下の問いに答えよ.

(1) $a = 5, A = 45^\circ$ のとき, 外接円の半径 R を求めよ.

(2) $b = \sqrt{3}, B = 120^\circ$ のとき, 外接円の半径 R を求めよ.

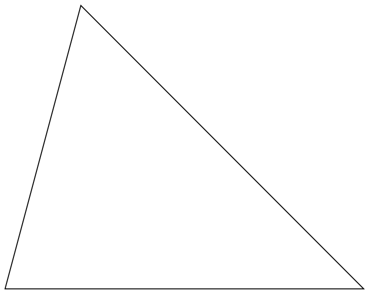
(3) $c = 10, R = 10$ のとき, C を求めよ.

(4) $b = \sqrt{6}, A = 45^\circ, B = 60^\circ$ のとき, a を求めよ.

(5) $c = \sqrt{2}, B = 30^\circ, C = 45^\circ$ のとき, c を求めよ.

(6) $A = 135^\circ, B = 15^\circ, c = 2$ のとき, a の値を求めよ.

2　余弦定理 (計算)



余弦定理

練習

△ABC において, 以下の問いに答えよ.

(1) $b = \sqrt{3}, c = 2, A = 150^\circ$ のとき, a を求めよ.

(2) $a = 3, b = 5, C = 120^\circ$ のとき, c を求めよ.

(3) $a = 3, b = 2, c = \sqrt{7}$ のとき, C を求めよ.

(4) $A = \sqrt{7}, b = 1, c = 2\sqrt{3}$ のとき, A を求めよ.

(5) $a = 1, b = \sqrt{5}, c = \sqrt{2}$ のとき, B を求めよ.

3　正弦定理・余弦定理の証明

正弦定理

< 証明 >

余弦定理

< 証明 >

3.1　角の判定

3 辺の長さから, ある角度の鋭角・直角・鈍角を判定しよう.
余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

を変形して,

$$\cos A =$$

辺の長さが正なので,

$$2bc \qquad 0$$

よって,

$$b^2 + c^2 - a^2$$

の符号が, $\cos A$ が符号になる.
さて,

$\cos A > 0$ のとき, A は　　　　角

$\cos A = 0$ のとき, A は　　　　角

$\cos A < 0$ のとき, A は　　　　角

練習

$\triangle$ABC の 3 辺が以下のとき, A の角の種類を判定せよ.

(1) $a = 9, b = 3\sqrt{2}, c = 7$

(2) $a = \sqrt{7}, b = \sqrt{6}, c = 2$

4　正弦定理・余弦定理の活用

4.1　復習

以下のような $\triangle$ABC において, 指定たものを求めよ.

(1) $a = 2\sqrt{3}, b = 7, C = 30^\circ$ のとき, c

(2) $a = \sqrt{10}, A = 135^\circ, B = 30^\circ$ のとき, b

(3) $a = 2, b = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{5} - 1$ のとき, B および外接円の半径 R

4.2　問題

(1) $\triangle$ABC において, $a = 2, b = \sqrt{3} + 1, C = 60^\circ$ のとき, 残りの辺の長さと角の大きさを求めよ.

(2) $\triangle$ABC において, $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3} + 1, C = 45^\circ$ のとき, 残りの辺の長さと角の大きさを求めよ.

4.3 最大角の大きさ

Question. 三角形 ABC の辺が $a=3, b=6, c=7$ のとき, 最大角は $\angle$A, $\angle$B, $\angle$C のうちどれか.

$\longrightarrow$

つまり, 最大の辺に向かい合う角が, その三角形の____________.

<u>問題</u>
$\triangle$ABC において, $\sin \mathrm{A} : \sin \mathrm{B} : \sin \mathrm{C} = 13 : 8 : 7$ が成立するとき, 最大角の大きさを求めよ.

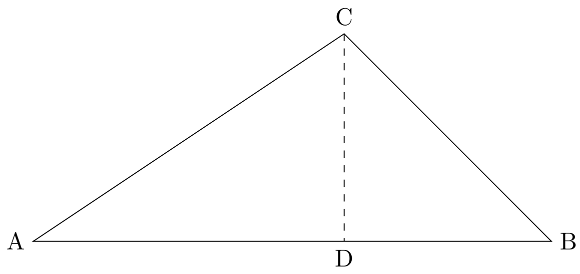
<u>練習</u>
$\triangle$ABC において, $\sin \mathrm{A} : \sin \mathrm{B} : \sin \mathrm{C} = 3 : 5 : 7$ が成立するとき, 最大角の大きさを求めよ.

5　多角形への応用

5.1　三角形の面積

$\triangle$ABC の面積 S を求めてみよう.

(1) 鋭角三角形の場合



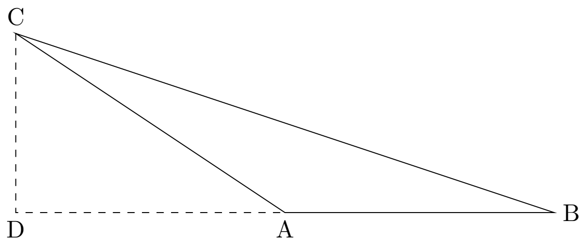
上図において, CD を $\angle$A の三角比と AC を用いて

CD=

と表せるので, $\triangle$ABC の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2} \times \underline{\qquad\qquad} \times \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

(2) 鈍角三角形の場合



上図において, CD を $\angle$A の三角比と AC を用いて

CD=

と表せるので, $\triangle$ABC の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2} \times \underline{\qquad\qquad} \times \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

以上をまとめると,

三角形の面積

練習

以下のとき, 三角形 ABC の面積を求めよ.

(1) $a = 3, b = 4, C = 60^\circ$

(2) $a = \sqrt{3}, c = 2, B = 150^\circ$

(3) $a = 3, b = 3, c = 3$

(4) $a = 5, b = 6, c = 7$
(ヒント: $\sin\theta$ が知りたい. でもすぐわかるのは $\cos\theta$...)

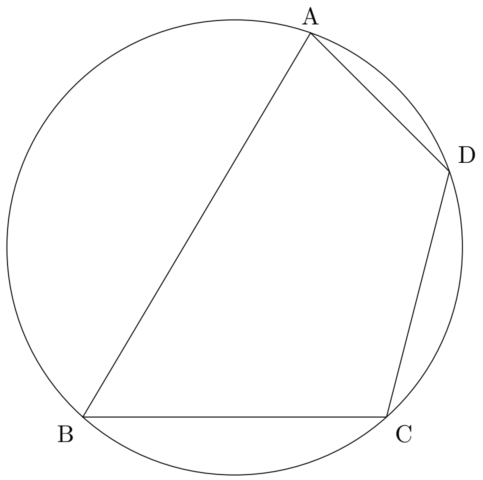
5.2　多角形の面積

(1) 円に内接する四角形 ABCD において，

$$\mathrm{AB} = 3, \mathrm{BC} = 2, \mathrm{CD} = 1, \angle \mathrm{B} = 60^\circ$$

のときの四角形 ABCD の面積を求めよ．

(求める流れ：AC $\to$ AD $\to$ 面積)



(2) 円に内接する四角形 ABCD において，

$$\mathrm{AB} = 4, \mathrm{BC} = 4, \mathrm{CD} = 5, \angle \mathrm{C} = 60^\circ$$

のときの四角形 ABCD の面積を求めよ．

5.3 内接円と三角形

$\triangle$ABC の 3 辺の長さを a, b, c とし, 内接円の半径を r とする. このとき, $\triangle$ABC の面積 S は,

$$S =$$

と表すことができる.

この式を使った問題を解いてみる.

問題

(1) $\triangle$ABC において, $a = 2, b = 3, c = 4$ のとき, 内接円の半径 r を求めよ.

(2) $\triangle$ABC において, $a = 7, b = 6, c = 5$ のとき, 内接円の半径 r を求めよ.

5.4 ヘロンの公式 (紹介)

入試で公式の証明が出る年があったりなかったり.

ヘロンの公式

$\triangle$ABC の 3 辺の長さを a, b, c とする. 面積 S は以下の式で表すことができる.

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ただし, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

これを知っていると, 面積が簡単に求められる.

問題

$\triangle$ABC において, $a = 2, b = 3, c = 4$ のとき, 面積 S を求めよ.

Proof.

□

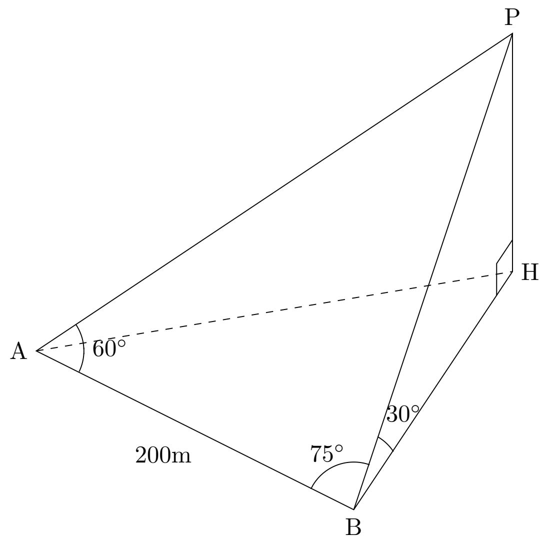
6　空間への応用

6.1　空間図形

200m 離れた山のふもとの 2 地点 A と B から, 山の山頂 P を見ると,

$$\angle\mathrm{PAB}=60^\circ,\ \angle\mathrm{PBA}=75^\circ$$

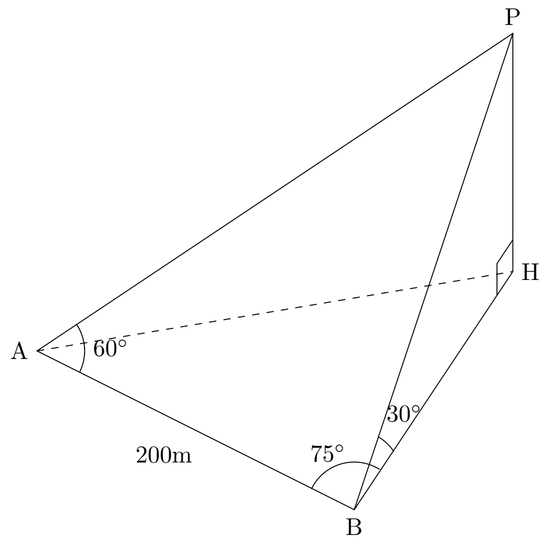
であった. また, B から P を見上げた角度は 30° であった. 図において, P と B の標高差 PH を求めよ.



300m 離れた山のふもとの 2 地点 A と B から, 山の山頂 P を見ると,

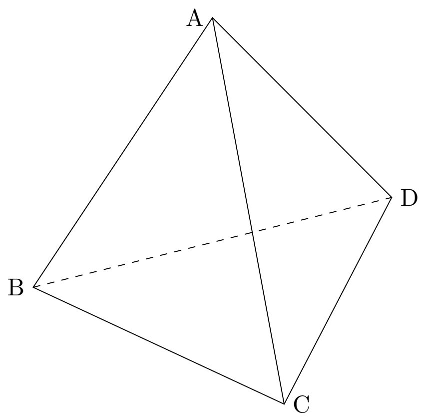
$$\angle\mathrm{PAB}=60^\circ,\ \angle\mathrm{HBA}=75^\circ$$

であった. また, B から P を見上げた角度は 30° であった. 図において, P と B の標高差 PH を求めよ.

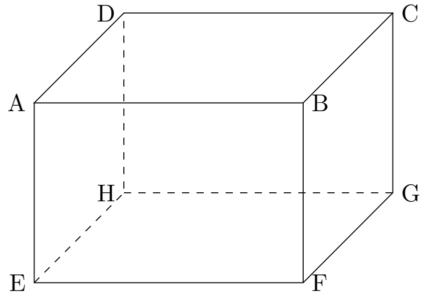


6.2 問題演習

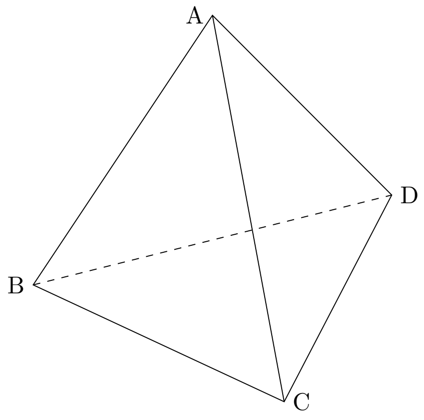
(1) 1 辺の長さが 4 である正四面体 ABCD において, 辺 CD の中点を M とする. △ABM の面積を求めよ.



(2) AB= 6, AD= 3, AE= 4 である. △DEG の面積 S を求めよ.



(3) 1 辺の長さが 4 である正四面体 ABCD において, 頂点 A から △BCD に垂線をおろす.



（a）点 H は △BCD の外心であることを示せ.

（b）AH の長さを求めよ.

（c）正四面体 ABCD の体積 V を求めよ.

(4) 1 辺の長さが 6 である正四面体の体積 V を求めよ.