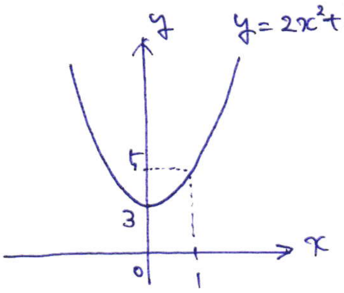
1　二次関数の平行移動

復習

以下の二次関数のグラフを描け．また，軸と頂点を答えよ．

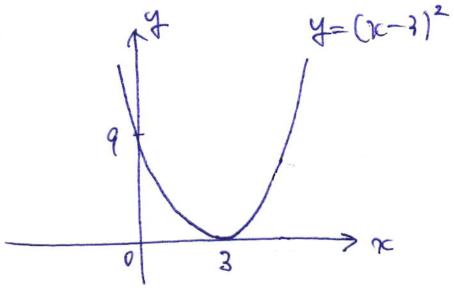
(1) $y = 2x^2 + 3$



軸　$x=0$

頂点　$(0, 3)$

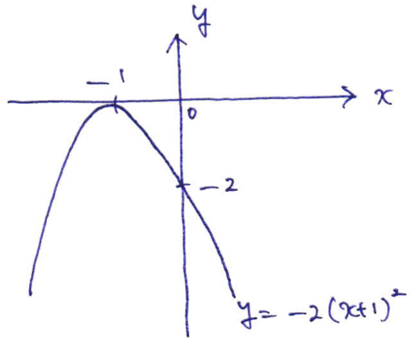
(2) $y = (x-3)^2$



軸　$x=3$

頂点　$(0, 3)$

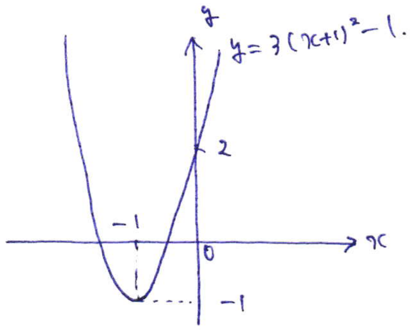
(3) $y = -2(x+1)^2$



軸　$x=-1$

頂点　$(-1, 0)$

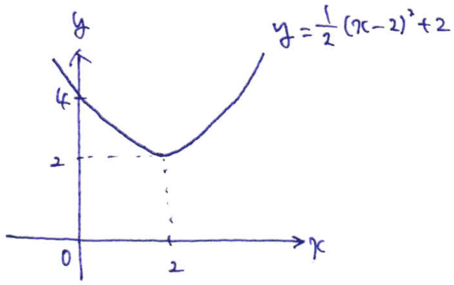
(4) $y = 3(x+1)^2 - 1$



軸　$x=-1$

頂点　$(-1, -1)$

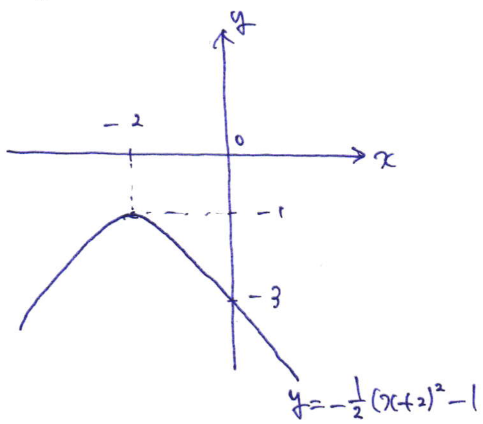
(5) $y = \dfrac{1}{2}(x-2)^2 + 2$



軸　$x=2$

頂点　$(2, 2)$

(6) $y = -\dfrac{1}{2}(x+2)^2 - 1$



軸　$x=-2$

頂点　$(-2, -1)$

考える

二次関数

$$y = x^2 + 2x + 3$$

のグラフを描け．また，頂点と軸を答えよ．

一般形という。

$y = a(x-p)^2 + q$ の形

にすることで、頂点と軸が分かる!!

定数項以外に着目!!

$$y = \boxed{x^2 + 2x} + 3$$

$$= \boxed{(x^2 + 2x + 1) - 1} + 3$$

( )^{2}の形が作れるように式変形する!

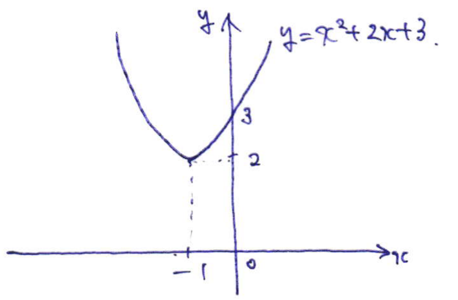
この式変形を「平方完成」という。

$$= (x+1)^2 - 1 + 3$$

$$= (x+1)^2 + 2$$

よって、 軸 $x = -1$

頂点 $(-1, 2)$



☆検算.

$$y = (x+1)^2 + 2$$

$$= x^2 + 2x + 1 + 2$$

$$= x^2 + 2x + 3.$$

もとの形に戻ったので、計算ミスなし!!

必ず検算するくせをつけること!!

平方完成でミスをするともったいない。

練習問題

以下の二次関数のグラフを描け．また，軸と頂点を答えよ．

(1) $y = x^2 + 4x + 3$

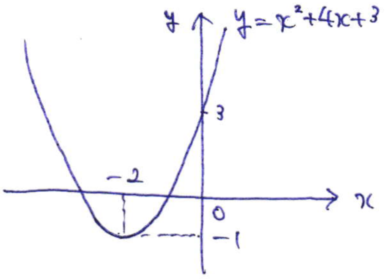
$= (x^2 + 4x + 4) - 4 + 3$

$= (x+2)^2 - 4 + 3$

$= (x+2)^2 - 1.$

軸　$x = -2$

頂点　$(-2, -1).$



(2) $y = x^2 - 2x + 2$

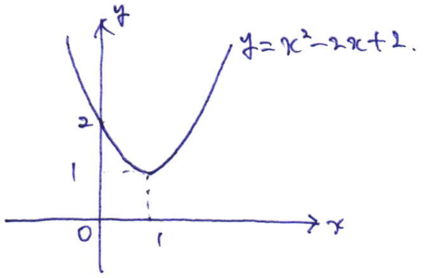
$= (x^2 - 2x + 1) - 1 + 2$

$= (x-1)^2 - 1 + 2$

$= (x-1)^2 + 1.$

軸　$x = 1$

頂点　$(1, 1)$



(3) $y = \boxed{2x^2 + 4x} + 3$

定数項以外に着目.

$= 2(x^2 + 2x) + 3$

2乗の係数でくくる

( )²の形を作れる形に!!

$= 2((x^2 + 2x + 1) - 1) + 3$

$= 2((x+1)^2 - 1) + 3$

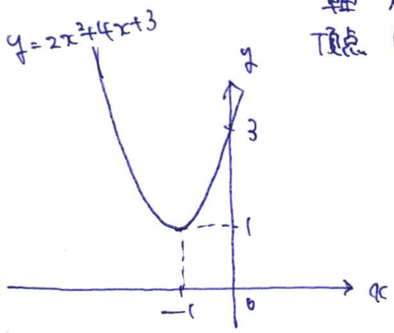
$= 2(x+1)^2 - 2 + 3$

−2になることを忘れないように!!

$= 2(x+1)^2 + 1.$

軸　$x = -1$

頂点　$(-1, 1)$



(4) $y = -2x^2 + 4x - 1$

$= -2(x^2 - 2x) - 1$

$= -2((x^2 - 2x + 1) - 1) - 1$

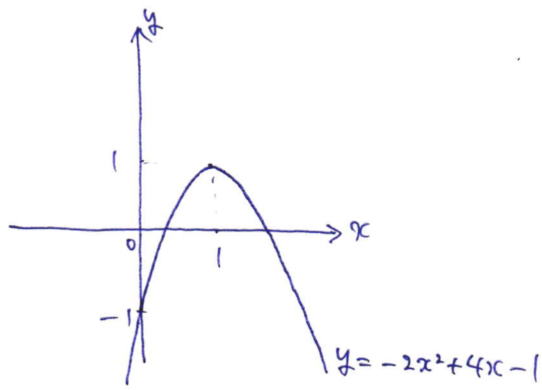
$= -2((x-1)^2 - 1) - 1$

$= -2(x-1)^2 + 2 - 1$　注

$= -2(x-1)^2 + 1.$

軸　$x = 1$

頂点　$(1, 1)$



検討

二次関数

$$y = ax^2 + bx + c$$

のグラフの軸と頂点を求めよう.

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \boxed{\frac{b}{a}}x\right) + c \\
&= a\left(\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\
&\qquad \times\frac{1}{2} \\
&= a\left(\left(x + \boxed{\frac{b}{2a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\
&\qquad 2乗 \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

軸 $x = -\dfrac{b}{2a}$

頂点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

機械的に,
$\times\frac{1}{2}$ と $-(2乗)$ で平方完成ができる。

速度UPの為には機械的にできるようになってほしいが,背景に因数分解があることを覚えていて欲しい!

まとめ

★ $y = a(x-p)^2 + q$ について,

軸 $x = p$.

頂点 (p, q).

であり.aの値によって形が決まる。

★ $y = ax^2 + bx + c$ について,

平方完成することで,軸,頂点を求めてから,グラフを描く.

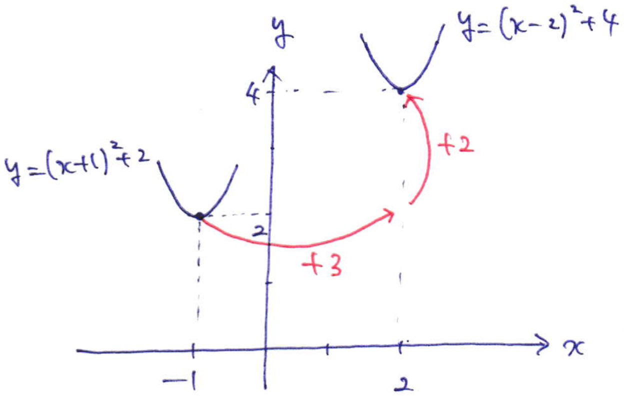
問題

放物線 $y=(x+1)^2+2$ を平行移動して, $y=(x-2)^2+4$ に重ねるには, どのように平行移動したら良いか.

$y=(x+1)^2+2$　頂　$(-1, 2)$

$+3$　$+2$

$y=(x-2)^2+4$　頂　$(2, 4)$



x軸方向に $+3$.
y軸方向に $+2$ 平行移動すればよい。

★ 頂点の移動に着目する!!

練習問題

(1) 放物線 $y=x^2+4x+1$ を平行移動して, $y=x^2-6x$ に重ねるには, どのように平行移動したら良いか.

$y=x^2+4x+1$
$=(x+2)^2-3$　頂　$(-2, -3)$

$+5$　-6

$y=x^2-6x$
$=(x-3)^2-9$　頂　$(3, -9)$

x軸方向に $+5$
y軸方向に -6 平行移動すればよい。

(2) 放物線 $y=2x^2+4x$ を平行移動して, $y=2x^2-8x+1$ に重ねるには, どのように平行移動したら良いか.

$y=2x^2+4x$
$=2(x^2+2x)$
$=2\left((x+1)^2-1\right)$
$=2(x+1)^2-2$　頂　$(-1, -2)$

$+3$　-5

$y=2x^2-8x+1$
$=2(x^2-4x)+1$
$=2\left((x-2)^2-4\right)+1$
$=2(x-2)^2-7$　頂　$(2, -7)$

x軸方向に $+3$
y軸方向に -5 平行移動すればよい.

2　二次関数の決定

復習

直線 $y = ax + b$ が, 2 点 $(1, 2), (5, -2)$ を通るとき, a, b の値を求めよ.

点 $(1, 2)$ を通るので

$2 = a + b$ —①

点 $(5, -2)$ を通るので

$-2 = 5a + b$ —②

$\begin{cases} a + b = 2 \\ 5a + b = -2 \end{cases}$ を解いて.

$a = -1,\ b = 3.$

∴ 求める直線の方程式は

$y = -x + 3$ //

問題

頂点が $(2, 1)$ で, 点 $(4, -9)$ を通る放物線をグラフにもつ二次関数を求めよ.

求める二次関数を $y = a(x-p)^2 + q$ とおく.

頂点が $(2, 3)$ なので　$p = 2.\ q = 1.$

$\therefore\ y = a(x-2)^2 + 1.$

よって. これが $(4, -9)$ を通るので

$9 = a(4-2)^2 + 1$

$8 = 4a \qquad a = 2.$

よって求める2次関数は

$y = 2(x-2)^2 + 1$ //

練習問題

(1) 頂点が $(1, -2)$ で, 点 $(3, 10)$ を通る放物線をグラフにもつ二次関数を求めよ.

求める2次関数を $y = a(x-p)^2 + q$ とおく.

頂点が $(1, -2)$ より　$p = 1.\ q = -2.$

$\therefore\ y = a(x-1)^2 - 2.$

これが $(3, 10)$ を通るので

$10 = a(3-1)^2 - 2$

$12 = 4a \qquad a = 3.$

よって求める2次関数は

$y = 3(x-1)^2 - 2$ //

(2) 軸が $x = -2$ で, 2 点 $(1, 15), (-3, -1)$ を通る放物線をグラフにもつ二次関数を求めよ.

求める2次関数を $y = a(x-p)^2 + q$ とおく.

軸が $x = -2$ なので　$p = -2.$

$\therefore\ y = a(x+2)^2 + q.$

点 $(1, 15)$ を通るので

$15 = a(1+2)^2 + q$

$15 = 9a + q$ —①

点 $(-3, -1)$ を通るので

$-1 = a(-3+2)^2 + q$

$-1 = a + q$ —②

①. ②を連立して解くと

$a = 2.\ q = -3$

よって求める2次関数は

$y = 2(x+2)^2 - 3$ //

頂点や軸の情報が分かっているときは.

$y = a(x-p)^2 + q$

の形に代入していく!

例題

二次関数のグラフが 3 点 $(1,6), (2,11), (-2,3)$ を通るとき，その二次関数を求めよ．

<Ans.>

求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく．

点 $(1,6)$ を通るので

$6=a+b+c$ — ①

点 $(2,11)$ を通るので

$11=4a+2b+c$ — ②

点 $(-2,3)$ を通るので

$3=4a-2b+c$ — ③

② − ③ から．

$8=4b$．　$b=2$．

① から．

$6=a+2+c$．

$a+c=4$ — ④

② から．

$11=4a+4+c$

$4a+c=7$ — ⑤

④，⑤ を連立して解くと

$a=1$．　$c=3$

よって求める2次関数は

$y=x^2+2x+3$ //

頂点・軸の情報がない場合は，

$y=ax^2+bx+c$

の形に代入していく．

3元連立方程式は，「計算を楽にする」ことをまず検討．

練習問題

二次関数のグラフが以下の 3 点を通るとき，その二次関数を求めよ．

(1) $(0,1), (1,5), (2,7)$

求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく．

点 $(0,1)$ を通るので

$1=c$．　$\therefore y=ax^2+bx+1$．

点 $(1,5)$ を通るので

$5=a+b+1$．

$a+b=4$ — ①

点 $(2,7)$ を通るので

$7=4a+2b+1$．

$4a+2b=6$

$2a+b=3$ — ②

①，② を連立して解くと

$a=-1$．　$b=5$．

よって求める2次関数は

$y=-x^2+5x+1$ //

(2) $(1,4), (3,12), (-1,12)$

求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく．

点 $(1,4)$ を通るので

$4=a+b+c$． — ①

点 $(3,12)$ を通るので

$12=9a+3b+c$ — ②

点 $(-1,12)$ を通るので

$12=a-b+c$ — ③

① − ③ より

$-8=2b$　$b=-4$．

① より

$8=a+c$． — ④

② より

$24=9a+c$ — ⑤

④，⑤ を連立して解くと

$a=2$．　$c=6$

よって求める2次関数は

$y=2x^2-4x+6$ //