1　二次方程式とグラフの関係性

検討

二次関数 $y=x^2+3x-4$ について，いろいろ調べてみよう．

◎平方完成

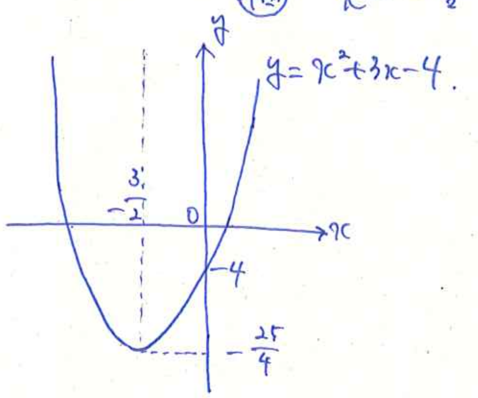
$y = x^2+3x-4$

$= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4$

$= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

頂 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$

軸 $x=-\frac{3}{2}$



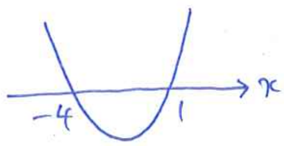
◎x軸との共有点.

$0 = x^2+3x-4$

$= (x+4)(x-1)$

$x=1, -4$

∴ x軸との共有点の座標は $(1,0), (-4,0)$



まとめ

2次関数は，

・平方完成することで，頂点・軸の情報が知れる。

☆展開してもとに戻るかを確認!!

→ 計算ミス減.

・x軸との共有点の座標を調べるには…

$y=0$ として 2次方程式を解く!!

共有点の有無について.

$y=ax^2+bx+c$ に対し.　$(a\neq 0)$.

$ax^2+bx+c=0$ を考える.

解の公式から.

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

・共有点なし ⇔ 実数解なし

⇔ $b^2-4ac<0$.

・共有点1コ ⇔ 実数解1コ (重解)

⇔ $b^2-4ac=0$

・共有点2コ ⇔ 実数解2コ

⇔ $b^2-4ac>0$.

→ b^2-4ac の正・零・負で実数解の個数がわかる!!

↑

$D=b^2-4ac$:「判別式」という.

☆解の公式の $\sqrt{\ }$ の中身.

練習 1

以下の 2 次方程式を解け.

(1) $x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-2)(x-1)=0$

$x=1, 2.$

(2) $x^2 + 2x + 1 = 0$

$(x+1)^2=0$

$x=-1$

(3) $x^2 + x - 3 = 0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

練習 2

次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ.

(1) $y = x^2 + 4x - 5$

方程式 $x^2+4x-5=0$ について.

$x^2+4x-5=0$

$(x+5)(x-1)=0$

$x=1, -5$

解2つなので 共有点も2つ

(2) $y = -2x^2 + 3x - 1$

方程式 $-2x^2+3x-1=0$ について.

$-2x^2+3x-1=0$

$2x^2-3x+1=0$

$(2x-1)(x-1)=0$

$x=\frac{1}{2}, 1$

解2つ i.e. 共有点2つ

(3) $y = 3x^2 - 4x + 5$

方程式 $3x^2-4x+5=0$ について.

判別式をDとおくと.

$D=(-4)^2-4\cdot3\cdot5$

$=16-60<0$

$D<0$なので 共有点0つ

練習 3

以下の問いに答えよ．

(1) 2 次方程式 $x^2+2x+m=0$ が, 異なる 2 つの実数解を持つとき, 定数 m の値の範囲を求めよ．

異なる2つの実数解をもつためには．
与えられた方程式の判別式 $D>0$ であればよい．

$D=2^2-4\cdot1\cdot m>0$

$4-4m>0$

$4>4m$

$1>m$

(2) m を定数とする．2 次方程式 $x^2+mx+1=0$ が重解を持つように, 定数 m の値を求めよ．また, その重解を求めよ．

重解をもつためには，
与えられた2次方程式の判別式 $D=0$．であればよい．

$D=m^2-4\cdot1=0$

$m^2-4=0$

$(m-2)(m+2)=0$

$\therefore m=\pm2$

i) $m=2$ のとき

$x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0$　　$x=-1$.

ii) $m=-2$ のとき

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$　　$x=1$

練習 4

以下の問いに答えよ．

(1) 2 次関数 $y=x^2+4x+m$ のグラフと x 軸の共有点の個数は, 定数 m の値によってどのように変わるか．

共有点の x 座標は．
$x^2+4x+m=0$．の実数解である．

判別式を D とおくと

$D=4^2-4\cdot m$.

$=16-4m$.

$=4(4-m)$.

$D>0$ のとき
$4-m>0$.　　$4>m$.

$D=0$ のとき
$4-m=0$.　　$4=m$.

$D<0$ のとき
$4-m<0$　　$4<m$.

以上より．

$m<4$ で 共有点 2コ
$m=4$ で 1コ
$m>4$ で 0コ

(2) m を定数とする．2 次関数 $y=x^2+2x+m$ のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ．

共有点の x 座標は，
$x^2+2x+m=0$ の実数解である。

判別式を D とおくと．

$D=2^2-4m$.

$=4(1-m)$.

$D>0$ のとき
$1-m>0$.　　$1>m$.

$D=0$ のとき
$1-m=0$　　$1=m$.

$D<0$ のとき
$1-m<0$　　$1<m$.

以上より．

$m<1$ で 共有点 2コ
$m=1$ で 1コ
$1<m$ で 0コ

1.1 定数分離

例題

2 次関数 $y = x^2 + 4x + 3 - k$ が x 軸と共有点を持たないように，定数 k の値の範囲を求めよ．

共有点の x 座標は

$x^2+4x+3-k=0$ の実数解．

判別式を D とおくと，共有点なしより $D<0$．

$$D=16-4\cdot(3-k)<0.$$

$$4(1+k)<0$$

$$1+k<0$$

$$\therefore\ k<-1.$$

定数分離

方程式 $x^2+4x+3=k$ が実数解をもたないように k の値を決めればよい。

これは $y=x^2+4x+3$ と $y=k$ が共有点をもたないことと同値である。

$$y=x^2+4x+3$$
$$=(x+2)^2-4+3$$
$$=(x+2)^2-1.$$

頂 $(-2,-1)$

2つのグラフが共有点をもたないような k の値は上図から．

$k<-1$

練習

(1) 方程式 $y = x^2 + 4x + 3 - k$ と x 軸の共有点の個数を求めよ．

左下図から．

$k<-1$ で共有点 0コ

$k=-1$ で共有点 1コ

$k>-1$ で共有点 2コ

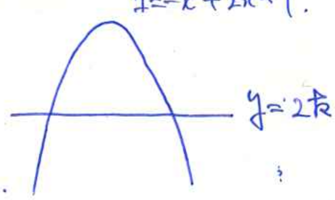
(2) 方程式 $y = -x^2 + 2x + 1 - 2k$ と x 軸の共有点の個数を求めよ．

求める共有点の個数は，方程式 $-x^2+2x+1-2k=0$ の実数解の個数．

また，これは $y=-x^2+2x+1$ と $y=2k$ の共有点の個数を調べればよい．

$$y=-x^2+2x+1$$
$$=-(x-1)^2+2.$$

頂 $(1,2)$.



上図から，
- $2k<2$ i.e. $k<1$ で 2コ
- $2k=2$ i.e. $k=1$ で 1コ
- $2k>2$ i.e. $k>1$ で 0コ

1.2 連立方程式って

復習

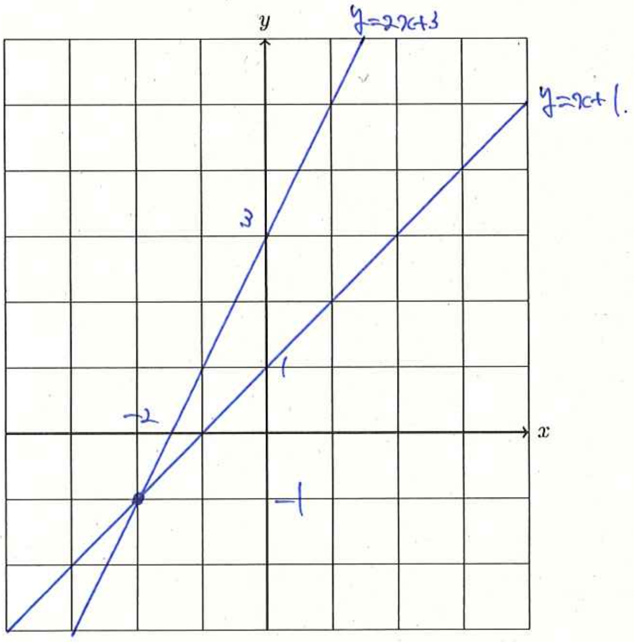
(1) 連立方程式 $\begin{cases} y = x+1 \\ y = 2x+3 \end{cases}$ を解け.

$$\begin{aligned} & y = x+1 \\ -)\ & y = 2x+3 \\ \hline & 0 = -x-2 \end{aligned}$$

$x = -2$

$y = -1.$

(2) 2つのグラフを描き, 共有点の座標を求めてみよう.



共有点 $(-2, -1)$

連立方程式を解く ⇔ グラフの共有点を求める

練習

(1) 放物線 $y = x^2 + 5x + 5$ と, 直線 $y = x + 2$ の共有点の座標を求めよ.

共有点のx座標は

$x^2+5x+5 = x+2$

$x^2+4x+3=0$

$(x+3)(x+1)=0$

$x=-1, -3.$

$x=-1$ のとき $y=-1+2=1.$

$x=-3$ のとき $y=-3+2=-1.$

∴ 共有点は $(-1, 1), (-3, -1)$

(2) 放物線 $y = 2x^2 + 3$ と, 直線 $y = -3x + 5$ の共有点の座標を求めよ.

共有点のx座標は:

$2x^2+3 = -3x+5$

$2x^2+3x-2=0$

$(2x-1)(x+2)=0$

$x=\frac{1}{2}, -2$

$x=\frac{1}{2}$ のとき, $y = -3\cdot\frac{1}{2}+5$

$= \frac{7}{2}$

$x=-2$ のとき $y=-3\cdot(-2)+5=11$

∴ 共有点は $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right), (-2, 11)$

(3) 放物線 $y = x^2 + 3x + 3$ と, 直線 $y = x + 2$ の共有点の座標を求めよ.

共有点のx座標は.

$x^2+3x+3 = x+2$

$x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0$

$x=-1.$

このとき

$y=-1+2=1.$

共有点は $(-1, 1)$

練習

(1) 放物線 $y = x^2 + 3x + 1$ と, 直線 $y = x + k$ が接するとき, 定数 k の値を求めよ. また, そのときの接点の座標を求めよ.

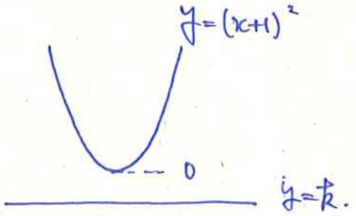
共有点のx座標は

$$x^2+3x+1 = x+k$$

の実数解であり，2曲線が接するには，2次方程式が重解をもてばよい.

$$x^2+3x+1 = x+k$$
$$x^2+2x+1 = k$$
$$(x+1)^2 = k \quad \text{—— (*)}$$

(*)の解は，$y=(x+1)^2$ と $y=k$ の共有点の個数と一致する.



上図より，共有点が1コとなるのは $k=0$.

i.e. $k=0$で 2次方程式は重解をもつ.

よって，求めるkの値は $k=0$ //

$k=0$のとき，2次方程式の解は (*)から

$$x=-1.$$

このときのyの値は

$$y=-1+0$$
$$=-1.$$

∴ 接点は $(-1,-1)$ //

(2) 放物線 $y = -x^2 + 2$ と, 直線 $y = x - k$ が共有点を持たないように, 定数 k の値の範囲を求めよ.

共有点のx座標は

$$-x^2+2 = x-k \quad \text{—— (*)}$$

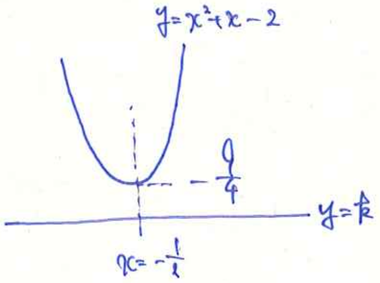
の実数解であり，共有点をもたないためには，この2次方程式が実数解をもたなければよい。

$$-x^2+2 = x-k$$
$$x^2-2 = -x+k$$
$$x^2+x-2 = k.$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2 = k$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4} = k.$$

よって (*)の実数解の個数は

$$y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4} \quad \text{と} \quad y=k$$

の共有点の個数と一致する。



上図より，共有点をもたないためには

$$k<-\frac{9}{4}$$

よって求めるkの値の範囲は

$$k<-\frac{9}{4}$$ //

2　二次関数の最大・最小

2.1　基本

<u>復習</u>

二次関数 $y=x^2-2x+2$ について,

(1) 軸と頂点を求めよ.

$y=x^2-2x+2$

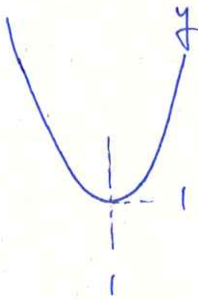
$=(x-1)^2-1+2$

$=(x-1)^2+1.$

頂 $(1,1)$

軸 $x=1$

(2) 最大値・最小値を求めよ.

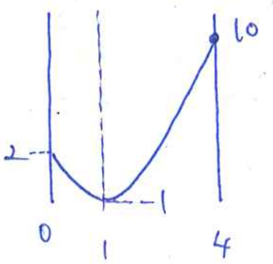


左図より

Max : なし

Min : 1.

(3) $(0\leqq x\leqq 4)$ での最大値・最小値を求めよ.



左図より

Max : 10

Min : −1

<u>練習</u>

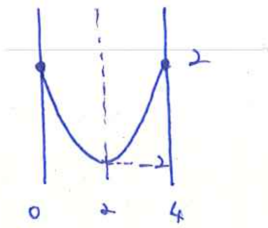
以下の二次関数の最大値・最小値を求めよ.

(1) $y=x^2-4x+2$　$(0\leqq x\leqq 4)$

$=(x-2)^2-4+2$

$=(x-2)^2-2$

軸 $x=2.$



左図より

Max : 2

Min : −2

(2) $y=2x^2+12x-5$　$(-4\leqq x\leqq 2)$

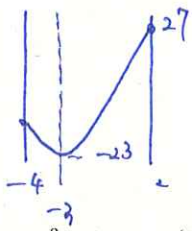
$=2(x^2+6x)-5$

$=2((x+3)^2-9)-5$

$=2(x+3)^2-18-5$

$=2(x+3)^2-23$

軸 $x=-3.$



左図より

Max : 27

Min : −23

(3) $y=-x^2-4x+1$　$(0\leqq x\leqq 3)$

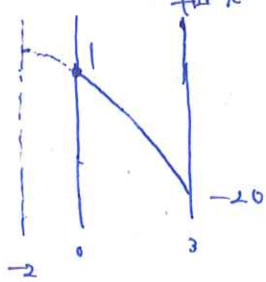
$=-(x^2+4x)+1$

$=-((x+2)^2-4)+1$

$=-(x+2)^2+5+1$

$=-(x+2)^2+6$

軸 $x=-2.$



左図より

Max : 1

Min : −20

2.2　縦に動く

例

2 次関数 $y = x^2 + 2x + c \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$ について,

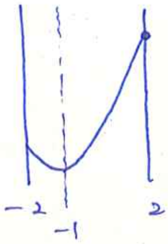
(1) 最大値が 3 になるように定数 c の値を定めよ.

$y = x^2 + 2x + c$

$= (x+1)^2 - 1 + c$

頂. $(-1,\ c-1)$

軸 $x = -1$.



左図より, $x = 2$ のとき

最大値 $8 + c$ である

これが 3 になるとき

$8 + c = 3$

$c = -5$ //

(2) c の値が (1) で求めた値であるとき, 与えられた 2 次関数の最小値を求めよ.

(1) から, $c = -5$ なので,

頂点は $(-1, -6)$ である。

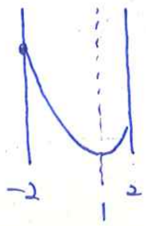
上の図から, $x = -1$ で Min -6 をとる //

練習

以下の条件を満たすように定数 c の値を求めよ. また, そのときの最大値・最小値のもう一方を求めよ.

(1) $y = x^2 - 2x + c \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$ について, 最大値が 5

$= (x-1)^2 + c - 1$.



左図より, $x = -2$ で

Max. $8 + c$ をとる.

これが 5 になるので

$8 + c = 5$

$c = -3$ //

また, $x = 1$ で最小値をとるので,

最小値は

$(1-1)^2 + c - 1 = -3 - 1 = -4$ //

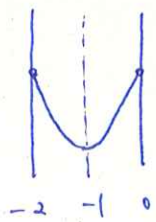
(2) $y = 2x^2 + 4x + c \quad (-2 \leqq x \leqq 0)$ について, 最小値が 1

$= 2(x^2 + 2x) + c$

$= 2((x+1)^2 - 1) + c$

$= 2(x+1)^2 + c - 2$.

頂 $(-1,\ c-2)$



左図から.

$x = -1$ で最小値をとる。

$\therefore\ c - 2 = 1$.

$c = 3$ //

$c = 3$ のとき, 最大値は 左図から,

$x = 0$ のとき

i.e. $2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3$

$= 3$ //

2.3　定義域が動く

<u>例</u>

a を正の定数とする．以下の関数について，各問いに答えよ．

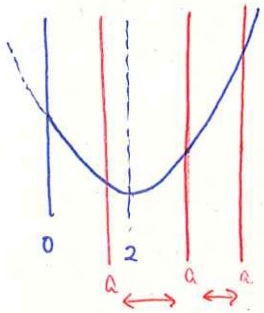
$$y = x^2 - 4x + 2 \quad (0 \leqq x \boxed{\leqq a})$$ どういうことかね…？

(1) 最大値を求めよ．

$$y = (x-2)^2 - 4 + 2$$
$$= (x-2)^2 - 2$$

頂 $(2, -2)$

軸 $x = 2$.

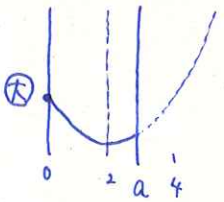


定義域の右端が自由に動く!!

この問は，「aの値により，最大値はどうなるだろう？」という問題.

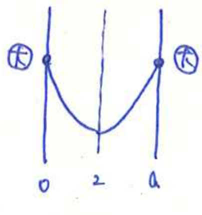
☆「状況に応じて場合分け」が基本!!

(i) $0 < a < 4$ のとき



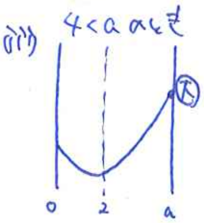
$x = 0$で Max. 2

(ii) $a = 4$ のとき



$x = 0, 4$で Max. 2

(iii) $4 < a$ のとき



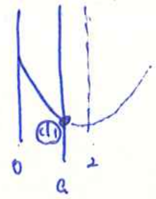
$x = a$で Max $a^2 - 4a + 2$.

(i)〜(iii)より 最大値は

$$\begin{cases} 0 < a < 4 \text{ のとき} & 2 \quad (x=0) \\ a = 4 \text{ のとき} & 2 \quad (x=0,4) \\ 4 < a \text{ のとき} & a^2 - 4a + 2 \quad (x=a) \end{cases}$$
//

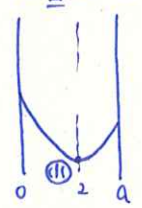
(2) 最小値を求めよ．

(i) $0 < a < 2$ のとき



$x = a$で Min $a^2 - 4a + 2$.

(ii) $2 \leqq a$ のとき



$x = 2$で Min. -2.

(i),(ii)より 最小値は

$$\begin{cases} 0 < a < 2 \text{ のとき} & a^2 - 4a + 2 \quad (x=a) \\ 2 \leqq a \text{ のとき} & -2 \quad (x=2) \end{cases}$$
//

練習 1

a を正の定数とする．以下の関数について，各問いに答えよ．

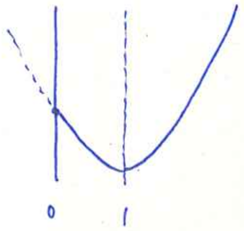
$$y = x^2 - 2x \quad (0 \leqq x \leqq a)$$

(1) 最大値を求めよ．

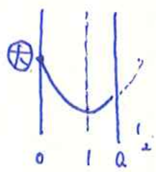
$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x \\ &= (x-1)^2 - 1. \end{aligned}$$

頂 $(1, -1)$

軸 $x = 1.$

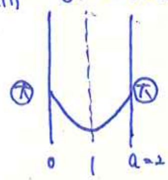


(i) $0 < a < 2$ のとき



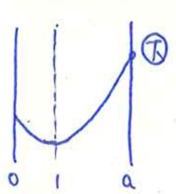
$x = 0$ で Max. 0

(ii) $a = 2$ のとき



$x = 0, 2$ で Max 0

(iii) $2 < a$ のとき



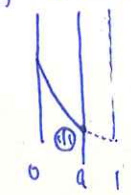
$x = a$ で Max. $a^2 - 2a$

(i)〜(iii)より 最大値は

$$\begin{cases} 0 < a < 2 \text{ のとき} & 0 \quad (x=0) \\ a = 2 \text{ のとき} & 0 \quad (x=0, 2) \\ 2 < a \text{ のとき} & a^2 - 2a \quad (x=a) \end{cases}$$

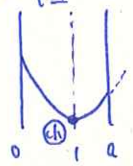
(2) 最小値を求めよ．

(i) $0 < a < 1$ のとき



$x = a$ で Min $a^2 - 2a.$

(ii) $1 \leqq a$ のとき



$x = 1$ で Min. $-1.$

(i),(ii)より 最小値は

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \text{ のとき} & a^2 - 2a \quad (x=a) \\ 1 \leqq a \text{ のとき} & -1 \quad (x=1) \end{cases}$$

練習 2

a を正の定数とする．以下の関数について，各問いに答えよ．

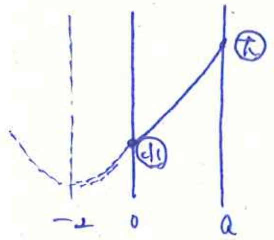
$$y = 2x^2 + 8x - 5 \quad (0 \leqq x \leqq a)$$

(1) 最大値を求めよ．

$$\begin{aligned}
y &= 2x^2 + 8x - 5 \\
&= 2(x^2 + 4x) - 5 \\
&= 2\left((x+2)^2 - 4\right) - 5 \\
&= 2(x+2)^2 - 8 - 5 \\
&= 2(x+2)^2 - 13
\end{aligned}$$

頂 $(-2, -13)$

軸 $x = -2$.



$a > 0$ なので，どのような a の値に対しても
上図のような位置関係は変わらない．

∴ $x = a$ のとき 最大値

$2a^2 + 8a - 5$ //

(2) 最小値を求めよ．

左図から，

$x = 0$ で最小値．-5 //

2.3では，右端のみが動く場合について考えた。
2.4では，両端が動く場合について考える！

2.4　定義域が動く (ver. 2)

例

a を正の定数とする．以下の関数について，各問いに答えよ．

$$y = x^2 - 4x + 2 \quad (a \leqq x \leqq a+2)$$

(1) 最大値を求めよ．

$y = x^2 - 4x + 2$

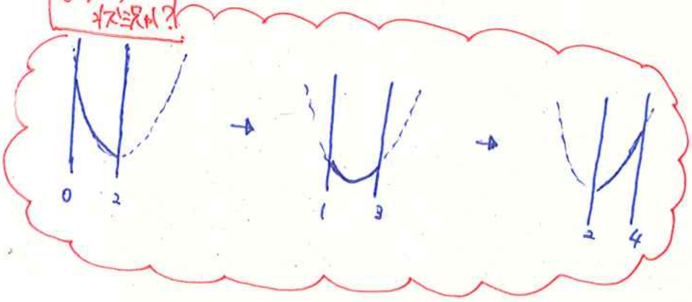
$= (x-2)^2 - 4 + 2$

$= (x-2)^2 - 2.$

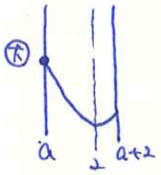
頂 $(2, -2)$

軸 $x = 2.$

どういう状況か？



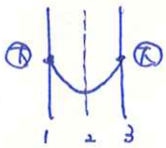
(i) $0 < a < 1$ のとき



$x = a$ で Max.

$a^2 - 4a + 2.$

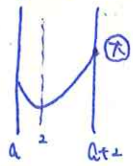
(ii) $a = 1$ のとき．



$x = 1, 3$ で Max.

$-1.$

(iii) $1 < a$ のとき



$x = a+2$ で Max.

$(a+2)^2 - 4(a+2) + 2$

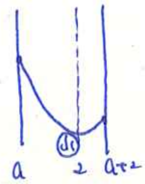
$= a^2 - 2.$

(i)〜(iii)より 最大値は

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \text{ のとき} & a^2 - 4a + 2 \quad (x = a) \\ a = 1 \text{ のとき} & -1 \quad (x = 1, 3) \\ 1 < a \text{ のとき} & a^2 - 2 \quad (x = a+2) \end{cases}$$

(2) 最小値を求めよ．

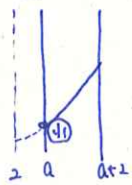
(i) $0 < a \leqq 2$ のとき



$x = 2$ で Min.

-2

(ii) $2 < a$ のとき



$x = a$ で Min.

$a^2 - 4a + 2.$

(i),(ii)より 最小値は

$$\begin{cases} 0 < a \leqq 2 \text{ で} & -2 \quad (x = 2) \\ 2 < a \text{ で} & a^2 - 4a + 2 \quad (x = a) \end{cases}$$

練習

a を正の定数とする．以下の関数について，各問いに答えよ．

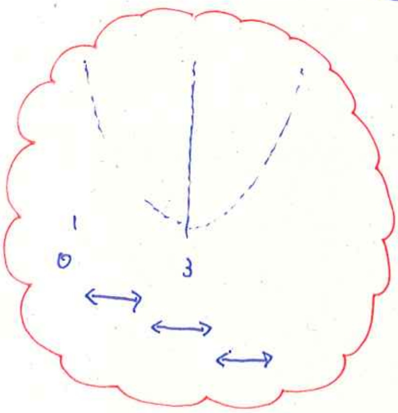
$$y = x^2 - 6x + 5 \quad (a \leqq x \leqq a+2)$$

(1) 最大値を求めよ．

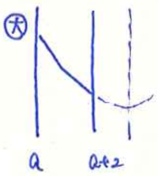
$$y = x^2 - 6x + 5$$
$$= (x-3)^2 - 9 + 5$$
$$= (x-3)^2 - 4.$$

頂 $(3, -4)$

軸 $x = 3$.



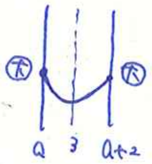
(i) $0 < a < 2$ のとき



$x = a$ で Max.

$a^2 - 6a + 5$

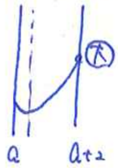
(ii) $a = 2$ のとき



$x = 2, 4$ で Max.

-3.

(iii) $2 < a$ のとき



$x = a+2$ で Max.

$(a+2)^2 - 6(a+2) + 5$

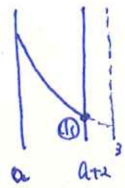
$= a^2 - 2a - 3$

ふ～つまり　最大値は

$$\begin{cases} 0 < a < 2 \text{ のとき} & a^2 - 6a + 5 & (x = a) \\ a = 2 \text{ のとき.} & -3 & (x = 2, 4) \\ 2 < a \text{ のとき} & a^2 - 2a - 3 & (x = a+2) \end{cases}$$

(2) 最小値を求めよ．

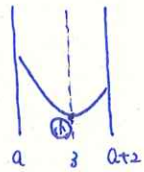
(i) $0 < a < 1$ のとき．



$x = a+2$ で Min.

$a^2 - 2a - 3$.

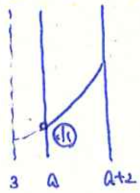
(ii) $1 \leqq a \leqq 3$ のとき



$x = 3$ で Min.

-4

(iii) $3 < a$ のとき



$x = a$ で Min.

$a^2 - 6a + 5$

ふ～つまり　最小値は

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \text{ のとき} & a^2 - 2a + 3. & (x = a+2) \\ 1 \leqq a \leqq 3 \text{ のとき} & -4 & (x = 3) \\ 3 < a \text{ のとき} & a^2 - 6a + 5 & (x = a) \end{cases}$$

2.5　軸が動く

<u>例</u>

a を正の定数とする．以下の関数について，各問いに答えよ．

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + 1 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$$

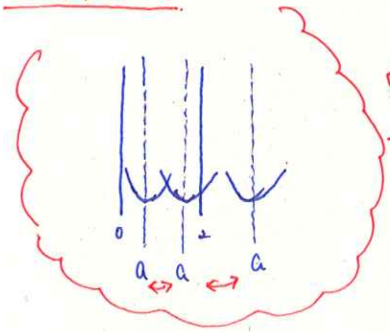
(1) 最大値を求めよ．

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + 1.$$
$$= (x-a)^2 + 1.$$

頂 $(a, 1)$

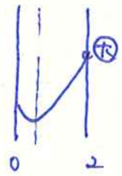
軸 $x = a$.

どういう状況か?



定義域は固定され，軸が動く!!

(i) $0 < a < 1$ のとき

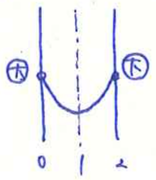


$x = 2$ で Max.

$4 - 4a + a^2 + 1.$

$a^2 - 4a + 5.$

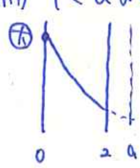
(ii) $a = 1$ のとき



$x = 0, 2$ で Max.

$1^2 + 1. = 2$

(iii) $1 < a$ のとき



$x = 0$ で Max.

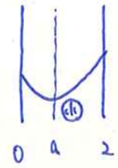
$a^2 + 1.$

(i)〜(iii)より．最大値は

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \text{ のとき} & a^2 - 4a + 5 \quad (x=2) \\ a = 1 \text{ のとき} & 2 \quad (x = 0, 2) \\ 1 < a \text{ のとき} & a^2 + 1 \quad (x = 0) \end{cases}$$

(2) 最小値を求めよ．

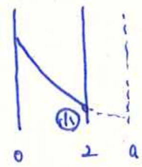
(i) $0 < a < 2$ のとき



$x = a$ で Min.

$1.$

(ii) $2 \leqq a$ のとき



$x = 2$ で Min.

$4 - 4a + a^2 + 1$

$= a^2 - 4a + 5$

(i), (ii)より　最小値は

$$\begin{cases} 0 < a < 2 \text{ のとき} & 1. \quad (x = a) \\ 2 \leqq a \text{ のとき} & a^2 - 4a + 5 \quad (x = 2) \end{cases}$$

練習

a を正の定数とする．以下の関数について，各問いに答えよ．

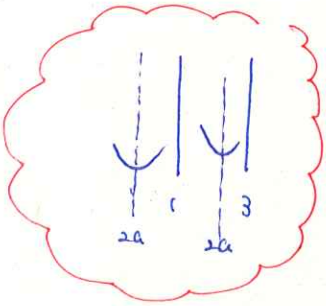
$$y = x^2 - 4ax + 4a^2 + 3 \quad (1 \leqq x \leqq 3)$$

(1) 最大値を求めよ．

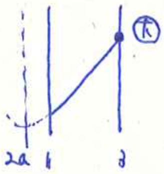
$$y = x^2 - 4ax + 4a^2 + 3$$
$$= (x - 2a)^2 + 3$$

頂 $(2a, 3)$

軸 $x = 2a$.



(i) $0 < 2a < 2$ のとき i.e. $0 < a < 1$.

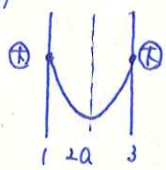


$x = 3$ で Max.

$9 - 12a + 4a^2 + 3$

$4a^2 - 12a + 12$

(ii) $2a = 2$ のとき i.e. $a = 1$.



$x = 1, 3$ で Max.

4.

(iii) $2 < 2a$ のとき i.e. $1 < a$.

$x = 1$ で Max.

$1 - 4a + 4a^2 + 3$

$4a^2 - 4a + 4$

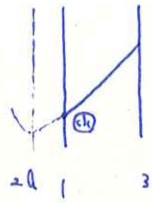
(i)〜(iii)より 最大値は

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \text{ のとき} & 4a^2 - 12a + 12 \quad (x = 3) \\ a = 1 \text{ のとき} & 4 \quad (x = 1, 3) \\ 1 < a \text{ のとき} & 4a^2 - 4a + 4 \quad (x = 1) \end{cases}$$

//

(2) 最小値を求めよ．

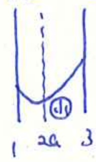
(i) $0 < 2a < 1$ i.e. $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき



$x = 1$ で Min.

$4a^2 - 4a + 4$

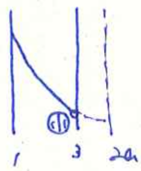
(ii) $1 \leqq 2a \leqq 3$ i.e. $\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{3}{2}$ のとき



$x = 2a$ で Min.

3.

(iii) $3 < 2a$ i.e. $\frac{3}{2} < a$ のとき



$x = 3$ で Min.

$4a^2 - 12a + 12$

(i)〜(iii)より 最小値は

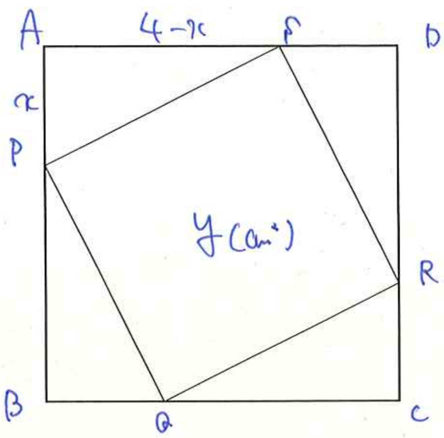
$$\begin{cases} 0 < a < \frac{1}{2} \text{ のとき} & 4a^2 - 4a + 4 \quad (x = 1) \\ \frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{3}{2} \text{ のとき} & 3 \quad (x = 2a) \\ \frac{3}{2} < a \text{ のとき} & 4a^2 - 12a + 12 \quad (x = 3) \end{cases}$$

//

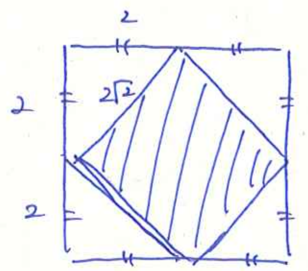
2.6 活用

例題

1 辺が 4(cm) である正方形に内接する正方形の面積について考える.



(1) 最小値を予想しよう.



上図の状況が Minimum. で,

1辺が $2\sqrt{2}$ なので

$$S_{Min} = (2\sqrt{2})^2$$
$$= 8 \ (cm^2)$$

(2) 内接正方形の面積を $y(\mathrm{cm}^2)$, APの長さ $x(\mathrm{cm})$ とする. y を x の式で表せ.

$AP = x$. かつ. $SD = x$ でもある.

$\therefore AS = 4 - x$.

$PS^2 = x^2 + (4-x)^2$

ここで PS^2 は内接四角形の面積そのもの.

$$\therefore y = x^2 + 16 - 8x + x^2$$
$$= 2x^2 - 8x + 16$$

(3) 最小値を求めよ.

□ABCD の1辺が4なので,

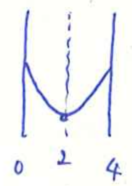
$0 \leqq x \leqq 4$. である.

この範囲で $y = 2x^2 - 8x + 16$ の Min を考える.

$$y = 2x^2 - 8x + 16$$
$$= 2(x^2 - 4x) + 16$$
$$= 2\left((x-2)^2 - 4\right) + 16$$
$$= 2(x-2)^2 + 8.$$

頂 $(2, 8)$

軸 $x = 2$.



左図より $x=2$ で最小値8.

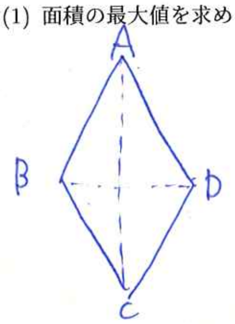
よって, $y_{Min} = 8 \ (cm^2)$

どのような問題も、ある程度答えの予想をしておくことで計算ミスは減る!!

練習問題

対角線の長さの和が 8 である菱形について, 以下の問いに答えよ.
(「予想 → 解く」の癖をつける.)

(1) 面積の最大値を求めよ.

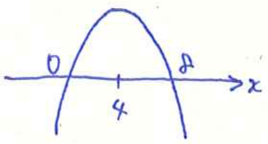


$AC = x$ とおく.
すると $BC = 8 - x$ である.

条件から.
$0 < x < 8$.

よって、面積を y とおくと

$$y = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (8 - x)$$

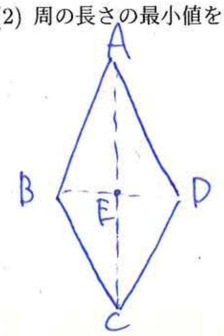


左図から,
$x = 4$ のとき最大値をとる

$$\therefore y_{max} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (8 - 4) = 8$$

ひし形が正方形になるとき!!

(2) 周の長さの最小値を求めよ.



$AE = x$ とおくと
$DE = 4 - x$. であり.

条件から.
$0 < x < 4$.

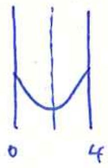
周の長さを y とおく.

$$AD^2 = x^2 + (4 - x)^2$$
$$= 2x^2 - 8x + 16$$
$$\therefore AD = \sqrt{2x^2 - 8x + 16}$$

よって $y = 4 \cdot AD$
$$= 4 \cdot \sqrt{2x^2 - 8x + 16}.$$

y が最小値をとるのは, $\sqrt{\ }$ の中身が min になる時。

$z = 2x^2 - 8x + 16$ とおく.
$$= 2(x^2 - 4x) + 16$$
$$= 2((x-2)^2 - 4) + 16$$
$$= 2(x-2)^2 + 8$$ 頂 $(2, 8)$



左図より $\sqrt{\ }$ の中身の最小値は 8

$$\therefore y_{min} = 4 \cdot \sqrt{8} = 8\sqrt{2}$$

ひし形が正方形になるとき!!

3　二次不等式とグラフの関係性

3.1　基本

<u>復習</u>

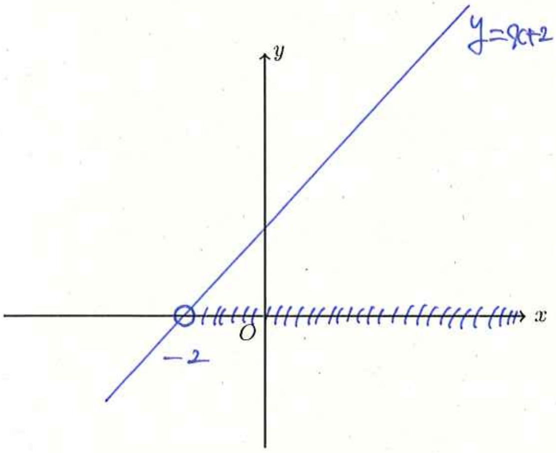
不等式

$$x + 2 > 0$$

を解く.

$x > -2$

<u>不等式を絵で見る</u>

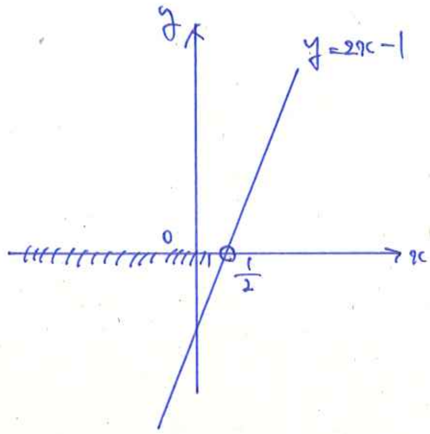


$x + 2 > 0$ を解くとは...

y = x+2 のグラフのうち，値が 0より大きくなるような x の範囲を求めること.

<u>確認</u>

不等式 $2x - 1 < 0$ についてグラフを描き, 解け.



求める範囲は上図の斜線部.

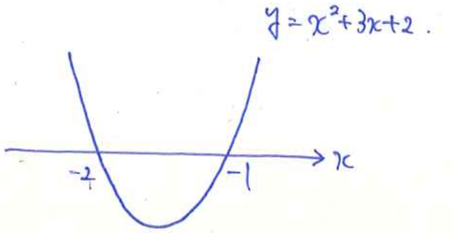
$\therefore\ x < \frac{1}{2}$

練習問題 1

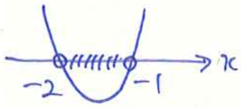
$y = x^2 + 3x + 2$ について,

(1) グラフを描け.

$y=(x+2)(x+1)$



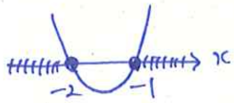
(2) $x^2 + 3x + 2 < 0$ を解け.



左図より

$-2 < x < -1$

(3) $x^2 + 3x + 2 \geqq 0$ を解け.



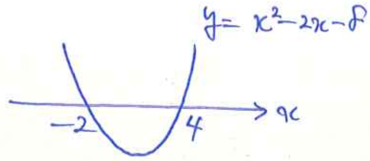
$x \leqq -2,\ -1 \leqq x$

練習問題 2

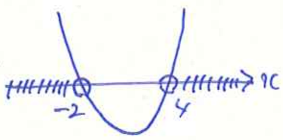
$y = x^2 - 2x - 8$ について,

(1) グラフを描け.

$y=(x-4)(x+2)$



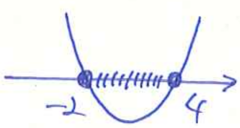
(2) $x^2 - 2x - 8 > 0$ を解け.



左図より

$x < -2,\ 4 < x$

(3) $x^2 - 2x - 8 \leqq 0$ を解け.



左図より

$-2 \leqq x \leqq 4$

3.2 連立不等式

復習

以下の連立不等式を解け．

$$\begin{cases} 2x+4 > 0 & \text{—①} \\ x-3 < 0 & \text{—②} \end{cases}$$

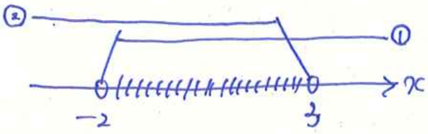
① から．

$2x > -4$

$x > -2$．

② から．

$x < 3$



共通部分は上図の斜線部．

$\therefore\ -2 < x < 3$

連立不等式とは，

各不等式の共通部分を求めること!!

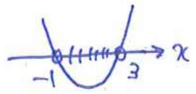
練習問題

以下の連立不等式を解け．

(1) $\begin{cases} x^2+2x-3 < 0 & \text{—①} \\ x^2-x-6 < 0 & \text{—②} \end{cases}$

① について．

$(x-3)(x+1) < 0$

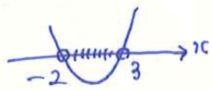


左図より

$-1 < x < 3$．

② について．

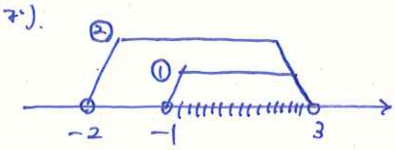
$(x-3)(x+2) < 0$



左図より

$-2 < x < 3$．

①，②より．



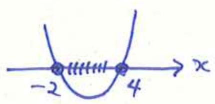
共通部分は上図の斜線部．

$\therefore\ -1 < x < 3$

(2) $\begin{cases} x^2-2x-8 \leqq 0 & \text{—①} \\ x^2+4x+3 > 0 & \text{—②} \end{cases}$

① について．

$(x-4)(x+2) \leqq 0$

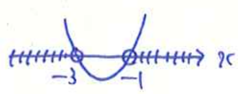


左図より

$-2 \leqq x \leqq 4$．

② について．

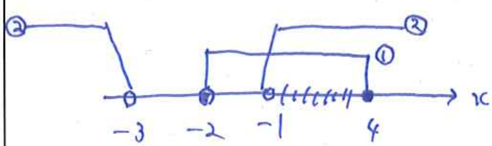
$(x+3)(x+1) > 0$



左図より

$x < -3,\ -1 < x$．

①，②より．



共通部分は上図の斜線部．

$\therefore\ -1 < x \leqq 4$

☆ グラフの状況はよく!!

3.3　活用 1

練習問題 1

(1) 2 次方程式 $x^2 + mx + 1 = 0$ が実数解を持つように, 定数 m の値の範囲を求めよ.

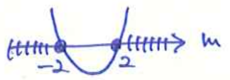
$x^2+mx+1=0$ の判別式を D とおく.

実数解をもつ $\Leftrightarrow$ $D \geqq 0$ より.

$D = m^2 - 4 \cdot 1 \geqq 0$

$m^2 - 4 \geqq 0$

$(m-2)(m+2) \geqq 0$



左図より

$x^2+mx+1=0$ が実数解をもつには.

$m \leqq -2,\ 2 \leqq m$

(2) 2 次方程式 $x^2 + 2mx + 3 = 0$ が実数解を持たないように, 定数 m の値の範囲を求めよ.

$x^2+2mx+3=0$ の判別式を D とおく.

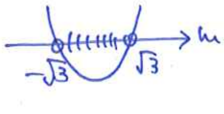
実数解をもたない $\Leftrightarrow$ $D<0$

$\therefore$ $D = (2m)^2 - 4 \cdot 3 < 0$

$4m^2 - 4 \cdot 3 < 0$

$4(m^2-3) < 0$

$4(m-\sqrt{3})(m+\sqrt{3}) < 0$



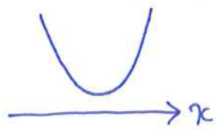
左図より.

$x^2+2mx+3=0$ が実数解をもたないためには

$-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$

練習問題 2

(1) 2 次不等式 $x^2 + 2mx + m + 2 > 0$ の解が全ての実数であるとき, 定数 m の値の範囲を求めよ.



条件をみたすためには,
$y = x^2+2mx+m+2$ のグラフが
左図のようになればよい.

i.e. 共有点0コ.

$x^2+2mx+m+2=0$ の判別式を D とおくと

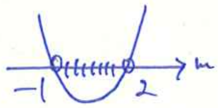
$D<0$ であればよい.

$D = (2m)^2 - 4 \cdot (m+2) < 0$

$4m^2 - 4m - 8 < 0$

$m^2 - m - 2 < 0$

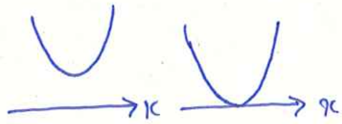
$(m-2)(m+1) < 0$



左図より

$-1 < m < 2$

(2) 2 次不等式 $x^2 - mx - m \geqq 0$ の解が全ての実数であるとき, 定数 m の値の範囲を求めよ.



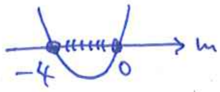
条件をみたすには,
$y = x^2-mx-m$ のグラフが
左図のようになればよい.

これは.
2次方程式 $x^2-mx-m=0$ の判別式 D が
$D \leqq 0$ であればよい.

$D = (-m)^2 - 4 \cdot (-m) \leqq 0$

$m^2 + 4m \leqq 0$

$m(m+4) \leqq 0$



左図より

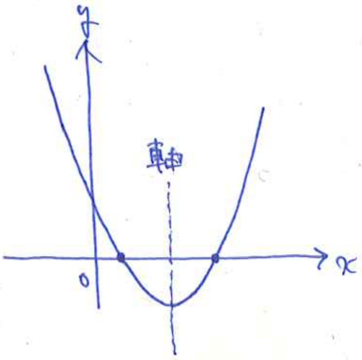
$-4 \leqq m \leqq 0$

まず、グラフで状況はあく!!
その状況にあるための条件を
過不足なく思考!!

3.4 判・軸・値

例題

2 次関数 $y = x^2 - 2mx + 5m + 6$ のグラフと x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるとき, 定数 m の値の範囲を求めよ.



条件をみたすには、
左図のようになればよい。
そのために、
i) 判別式 $D>0$.
ii) 軸 >0
iii) $x=0$ のとき $y>0$

i) について、
$x^2-2mx+5m+6=0$ の判別式を D とおく.

$$D=(-2m)^2-4\cdot(5m+6)$$
$$=4(m^2-5m-6)$$

$D>0$ より

$$m^2-5m-6>0$$
$$(m-6)(m+1)>0$$

左図より
$m<-1,\ 6<m.$

ii) について、

$$y=x^2-2mx+5m+6$$
$$=(x-m)^2-m^2+5m+6.$$

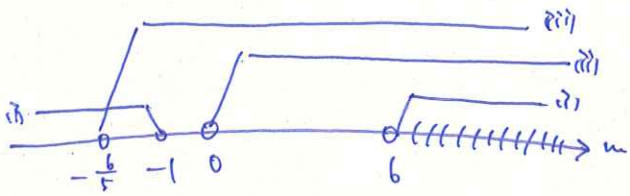
軸 $x=m$.

軸 >0 より $m>0$

iii) について、
$x=0$ のとき $y>0$ より

$$0-2m\cdot 0+5m+6>0$$
$$5m+6>0$$
$$m>-\frac{6}{5}$$

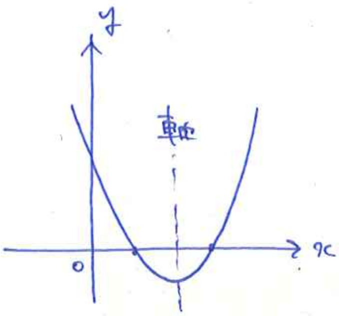
i)〜iii) の共通部分は下図の斜線部.



よって $6<m$

練習問題 1

2 次関数 $y = x^2 - 2mx + 2m + 3$ のグラフと x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるとき, 定数 m の値の範囲を求めよ.



条件をみたすには,
グラフが左図のようになればよい.

(i) 判別式 $D>0$

(ii) 軸 >0

(iii) $x=0$ で $y>0$.

(i) について.

2次方程式 $x^2-2mx+2m+3=0$

の判別式を D とおく.

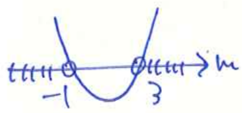
$D=(-2m)^2-4\cdot(2m+3)$

$=4(m^2-2m-3)$.

$=4(m-3)(m+1)$.

$D>0$ より

$(m-3)(m+1)>0$



左図から.

$m<-1,\ 3<m$

(ii) について.

$y=x^2-2mx+2m+3$

$=(x-m)^2-m^2+2m+3$

軸 $x=m$.

軸 >0 から, $m>0$.

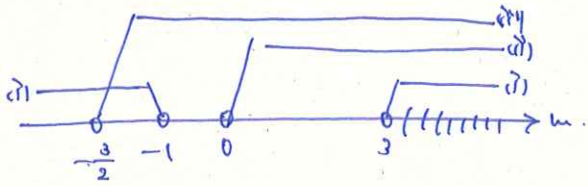
(iii) について.

$x=0$ での $y>0$ より

$2m+3>0$

$m>-\frac{3}{2}$.

(i)〜(iii) の共通部分は, 下図の斜線部.

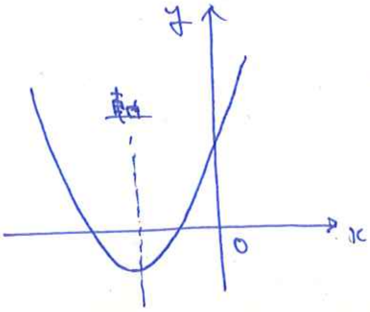


よって

$3<m$

練習問題 2

2 次関数 $y = x^2 - 2mx + 5m + 6$ のグラフと x 軸の負の部分が異なる 2 点で交わるとき, 定数 m の値の範囲を求めよ.

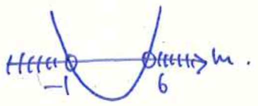


条件をみたすには、
左図のようになればよい。
そのために、
i) 判別式 $D>0$
ii) 軸 <0
iii) $x=0$ のとき $y>0$.

i) について、
2次方程式 $x^2-2mx+5m+6=0$
の判別式を D とおく.

$$D=(-2m)^2-4(5m+6)$$
$$=4(m^2-5m-6)$$
$$=4(m-6)(m+1).$$

$D>0$ であればよいので
$$(m-6)(m+1)>0$$



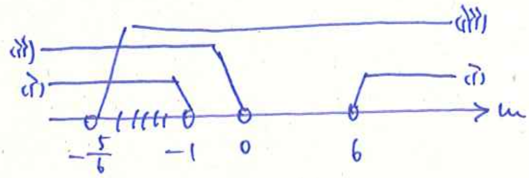
左図より
$m<-1,\ 6<m$.

ii) について、
$$y=x^2-2mx+5m+6$$
$$=(x-m)^2-m^2+5m+6.$$
軸 $x=m$.

軸 <0 より. $m<0$

iii) について、
$x=0$ のとき、$y>0$ であればよいので、
$$5m+6>0$$
$$m>-\frac{5}{6}$$

i)〜iii) の共通部分は下図の斜線部.



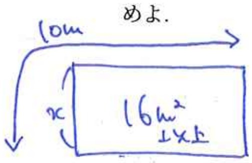
よって
$$-\frac{5}{6}<m<-1$$

3.5 文章題

練習問題 1

長さが 20m のロープを張って, 長方形の囲いを作る. 囲いの中の面積を $16\mathrm{m}^2$ 以上にするための, 囲いの縦の長さの範囲を求めたい. ただし, 縦とは長方形の短い方の 1 辺とする.

(1) 縦の長さを x とおく. 長方形ができるための x の範囲を求めよ.



縦は短い方であるので,

$0 < x \leqq 5$.

(2) 面積を x の式で表せ.

横: $(10-x)$ cm なので

面積を y とおくと

$y = x(10-x)$ //

(3) 面積を $16\mathrm{m}^2$ 以上にするための, 囲いの縦の長さの範囲を求めよ.

(2)で求めた y が 16以上であればよいので

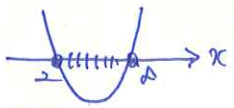
$x(10-x) \geqq 16$

$-x^2+10x \geqq 16$

$-x^2+10x-16 \geqq 0$

$x^2-10x+16 \leqq 0$

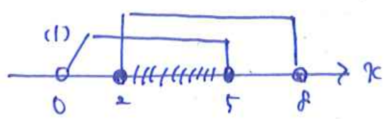
$(x-2)(x-8) \leqq 0$



左図から.

$2 \leqq x \leqq 8$ —★

(1)の結果との共通部分は. 下図斜線部.



よって $2 \leqq x \leqq 5$.

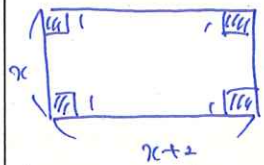
∴ 2m以上 5m以下 //

練習問題 2

横の長さが (縦の長さ +2) cm で与えられる長方形の画用紙がある. この画用紙の四隅から, 1 辺の長さが 1cm の正方形を切り取り, 蓋のない直方体の箱を作る.

< x: たての長さとおく.

(1) 箱の体積を x を用いて表せ.



底面は, たて $(x-2)$

よこ $(x+2)-2 = x$

高さ 1

∴ 体積は $(x-2)\cdot x$ //

(2) 箱の体積を $3\mathrm{cm}^3$ 以上 $15\mathrm{cm}^3$ 以下にするためには, 縦の長さをどのような範囲に取れば良いか求めよ.

(1)で求めた体積が 3以上 15以下.

i.e.

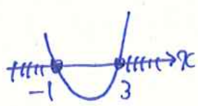
$$\underbrace{3 \leqq x(x-2)}_{①} \leqq 15 \quad \underbrace{x(x-2) \leqq 15}_{②}$$

① について,

$3 \leqq x^2-2x$

$0 \leqq x^2-2x-3$

$0 \leqq (x-3)(x+1)$



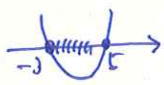
左図から. $x \leqq -1,\ 3 \leqq x$ —①

② について

$x^2-2x \leqq 15$

$x^2-2x-15 \leqq 0$

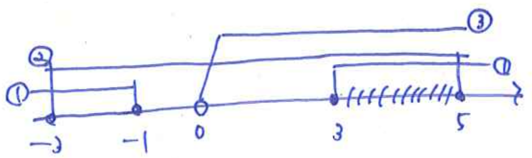
$(x-5)(x+3) \leqq 0$



左図から $-3 \leqq x \leqq 5$ —②

また, 長さは正なので $x > 0$ —③ であることから,

①〜③の共通部分は下図の斜線部.



よって $3 \leqq x \leqq 5$

3cm 以上 5cm 以下 //

4　絶対値の方程式・不等式

復習～学び 1

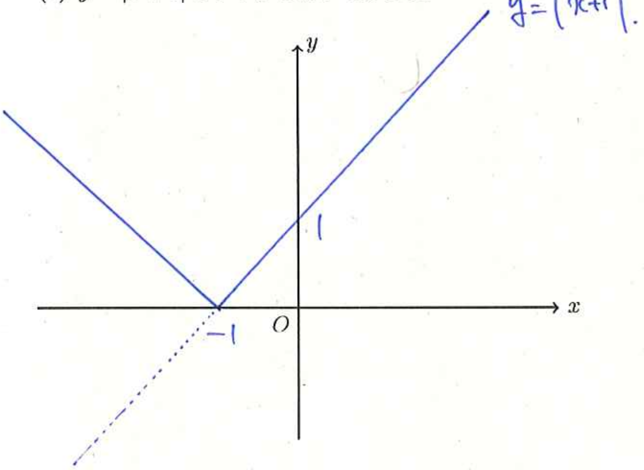
(1) $|x+1| = 2$ を解け.

$x+1 = \pm 2$

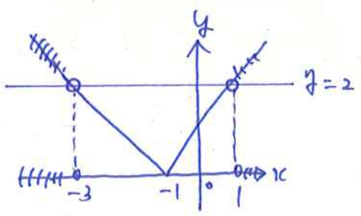
$x = -1 \pm 2$

$= 1, -3$

(2) $y = |x+1|$ のグラフを描いてみよう.



(3) グラフをもとに, $|x+1| > 2$ を解け.



上図から.

$x < -3,\ 1 < x$

復習～学び 2

(1) $|2x-3| = 1$ を解け.

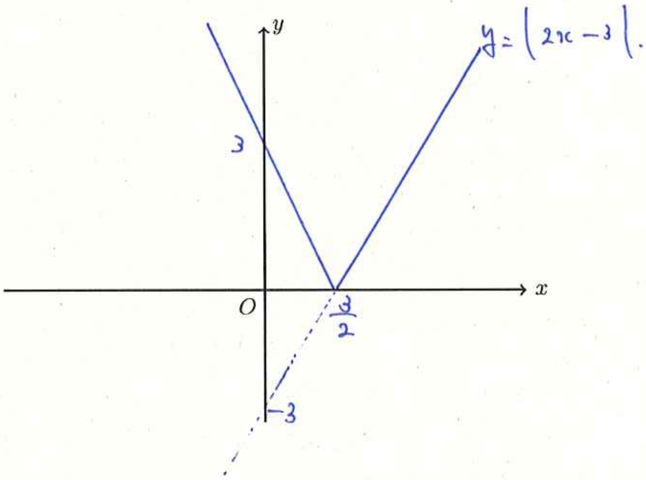
$2x - 3 = \pm 1$

$2x = 3 \pm 1$

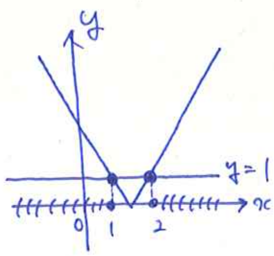
$= 4, 2$

$\therefore\ x = 1, 2$

(2) $y = |2x-3|$ のグラフを描いてみよう.



(3) グラフをもとに, $|2x-3| \geqq 1$ を解け.



上図から.

$x \leqq 1,\ 2 \leqq x$

考える 1

(1) $|x^2-3x+2|=2$ を解け.

$x^2-3x+2=\pm 2$

・$x^2-3x+2=2$　　　・$x^2-3x+2=-2$

$x^2-3x=0$　　　$x^2-3x+4=0$

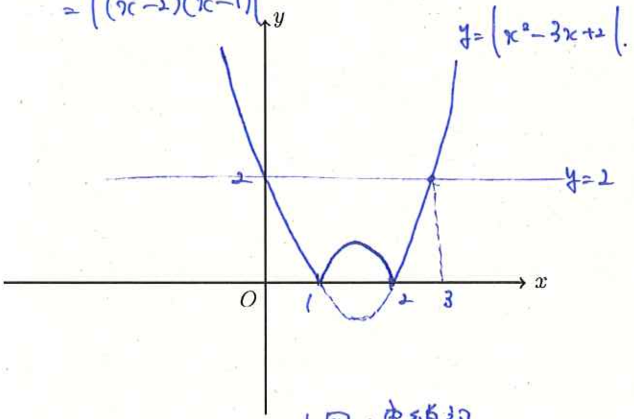
$x(x-3)=0$　　　解なし

$x=0,3$

よって　$x=0,3$ //

(2) $y=|x^2-3x+2|$ のグラフを描いてみよう.

$=|(x-2)(x-1)|$



上図の実線部.

(3) グラフをもとに, $|x^2-3x+2|\leqq 2$ を解け.

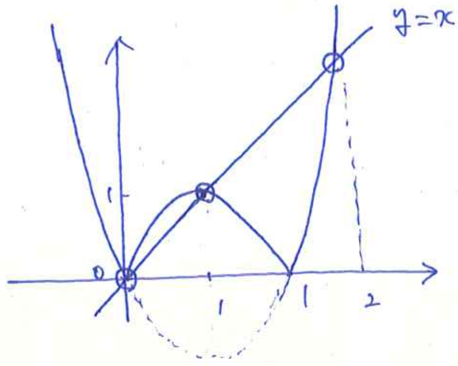
上の(2)の図から,

$0\leqq x\leqq 3$ //

問題

$|x^2-x|>x$ を解け.

$y=|x(x-1)|$. と $y=x$ について考える.



2つのグラフのうち, $y=|x(x-1)|$ の y の値が大きい部分を求めればよい.

図から,

$x<0,\ 0<x<1,\ 2<x$ //