1 集合

1.1 集合の記法

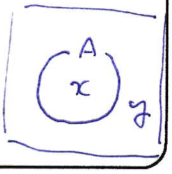
定義

- **集合**：範囲がはっきりしたものの集まり。

  ex.
  1以上10以下の自然数の集まり。

- **要素**：集合を構成する1つ1つのもの

- **x が集合 A に属する**：
  x が集合Aの要素であること。
  $x \in A$ と書く。
  一方，y がAの要素でないこと。
  $y \notin A$ と書く。



<u>有名な数の集合</u>

- $\mathbb{N}$：自然数全体の集合　Natural Number
- $\mathbb{Z}$：整数全体の集合　Integer → Zahlen（独語の整数）
- $\mathbb{Q}$：有理数全体の集合　Rational Number → Quotient ：商
- $\mathbb{R}$：実数全体の集合　Real Number

<u>記法</u>

外延的記法

… 要素を1つ1つ書き並べる方法。

例

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

内包的記法

… 要素のみたす条件を書いて表す方法。

例

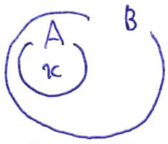
$A = \{n \mid 1 \leq n \leq 5,\ n \in \mathbb{N}\}$.

$B = \{2n \mid 1 \leq n \leq 5,\ n \in \mathbb{N}\}$.

1.2 部分集合

定義

2つの集合A，Bに対し，
$x \in A$ ならば $x \in B$
が成立するとき，AをBの部分集合という。
このとき，
・AはBに含まれる
・BはAを含む



といい，$A \subset B$ or $B \supset A$ と書く。

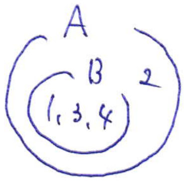
注）AはA自身の部分集合でもある。

AとBの要素がすべて一致しているとき，
AとBは等しいといい，$A = B$ と書く。

要素が1つもない集合のことを空集合といい，$\emptyset$ と書く。
注）空集合は，どのような集合Aに対してもその部分集合。
i.e. $\emptyset \subset A$.

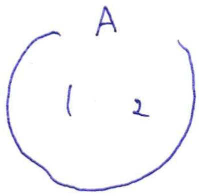
例.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{1, 3, 4\}$ のとき



$A \supset B$ である。

<u>集合 $\{a, b\}$ に対する部分集合</u>



この集合の部分集合は，

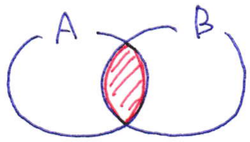
$\emptyset$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1, 2\}$ の4つ。

1.3 共通部分と和集合

定義

- **共通部分**

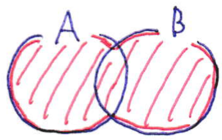
…2つの集合 A, B のどちらにも属する要素全体の集合



$A \cap B$ で表す.

- **和集合**

…2つの集合 A, B の少なくとも一方に属する要素全体の集合.



$A \cup B$ で表す.

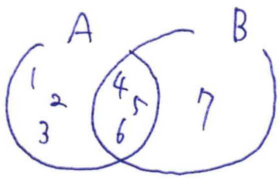
例.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{4, 5, 6, 7\}$ に対し.

$A \cap B = \{4, 5, 6\}$.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

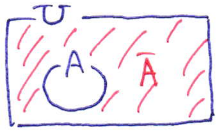


1.4 補集合

定義

様々な集合を考える上で，前提となる集合のことを全体集合という。(U で書くことが多い. Universal set)

全体集合 U の部分集合 A に対し.
U の要素であり A の要素ではないものの集まりを A の補集合という.
$\overline{A}$ で書き表す.



補集合の性質

U : 全体集合, $A, B \subset U$ とする.

(i) $A \cap \overline{A} = \emptyset$

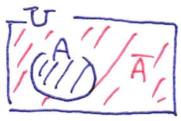
(ii) $A \cup \overline{A} = U$

(iii) $\overline{\overline{A}} = A$

(iv) $A \subset B$ ならば $\overline{A} \supset \overline{B}$

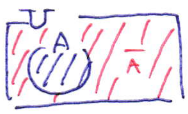
〈ベン図を用いた説明〉

(i) $A \cap \overline{A} = \emptyset$



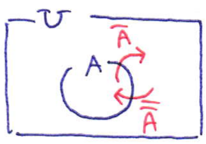
A と $\overline{A}$ の共通部分なし.

(ii) $A \cup \overline{A} = U$



A と $\overline{A}$ をあわせると全体になる.

(iii) $\overline{\overline{A}} = A$



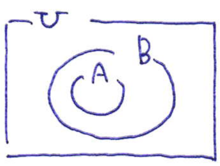
A から外に出る → $\overline{A}$

$\overline{A}$ から外に出る → $\overline{\overline{A}}$

‖

A にもどる.

(iv) $A \subset B$ ならば $\overline{A} \supset \overline{B}$



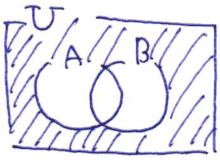
B の外の要素をとると
必ず A には含まれない
→ $\overline{B}$ の要素は $\overline{A}$ に含まれる.

ド・モルガンの法則

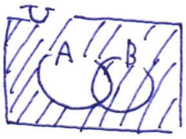
$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

〈ベン図を用いた証明〉

。$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ について.



左図斜線部が $\overline{A\cup B}$ である.



左斜線部は $\overline{A}$

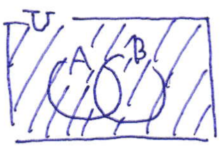
左斜線部 $\overline{B}$.

よって $\overline{A}\cap\overline{B}$ は下図斜線部

これは $\overline{A\cup B}$ と一致.

。$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ について.

$\overline{A\cap B}$は



であるが、$\overline{A}\cup\overline{B}$とも一致

2 命題

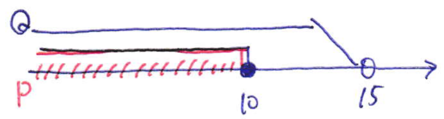
2.1 命題

定義

- 命題とは
  正しいか正しくないかが定まる文や式のこと
  正しいとき → 真
  正しくないとき → 偽
- 条件とは
  …変数を含み式で，その変数に値を入れることで
  真偽が定まる文．
  ex. $x < 3$． $x = 1$ のとき → 真
  $x = 5$ のとき → 偽．
- 命題「$p \Longrightarrow q$」〜 pならば q と読む．
  …「p をみたすものはすべて q をみたす」を表す．
  「$p \Rightarrow q$」
  p：仮定　q：結論
- 反例
  命題「$p \Rightarrow q$」が偽のとき，
  p をみたすが q をみたさないものの例を反例という．
  $p \Rightarrow q$ の偽を示すのに，反例1つあれば十分．

［命題 $p \Rightarrow q$ と集合］

例． $x \in \mathbb{R}$．
p： $x \leqq 10$．　q： $x < 15$
について．
$P = \{x \mid x \leqq 10,\ x \in \mathbb{R}\}$
$Q = \{x \mid x < 15,\ x \in \mathbb{R}\}$



$P \subset Q$ が成立．
また， $p \Rightarrow q$ も成立．

一般に．
U：全体集合．
P：条件 p をみたすもの全体の集合
Q：条件 q をみたすもの全体の集合　とすると．
命題「$p \Rightarrow q$」が真のとき $P \subset Q$ が成立．

2.2 必要条件・十分条件

定義

- 命題 $p \Longrightarrow q$ が真のとき，
  p は q であるための 十分条件
- 命題 $p \Longleftarrow q$ が真のとき，
  p は q であるための 必要条件．
- また，
  $p \Rightarrow q$， $p \Leftarrow q$ のいずれも成立するとき，
  p は q であるための 必要十分条件 という。
  このとき，
  p と q は同値 であるという。
  $p \Leftrightarrow q$ と書く．

たとえば，

- 2つの条件「$x = 1$」と「$x^2 = 1$」について．
  $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ は成立するが，
  $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ は不成立．
  i.e.
  「$x = 1$」は「$x^2 = 1$」であるための十分条件．
- 2つの条件．「$x = \pm 1$」と「$x^2 = 1$」について．
  $x = \pm 1 \Rightarrow x^2 = 1$
  $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ のいずれも成立．
  i.e.
  「$x = \pm 1$」は「$x^2 = 1$」であるための必要十分条件で，
  「$x = \pm 1$」と「$x^2 = 1$」は同値．
  $$x = \pm 1 \Leftrightarrow x^2 = 1．$$

3 命題と証明

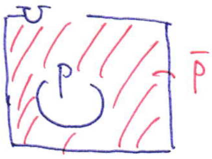
3.1 条件の否定

定義

- 否定

…条件 p に対して「p でない」

$\overline{p}$ で表す.



例

$p : x < 0$ に対し.

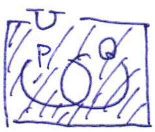
$\overline{p} : x \geqq 0$

かつ，またはの否定

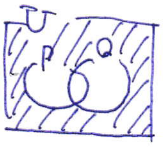
$\overline{p \text{ かつ } q} = \overline{p}$ または $\overline{q}$

$\overline{p \text{ または } q} = \overline{p}$ かつ $\overline{q}$

★ド・モルガンの法則を思い出そう!



$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$



$\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$

3.2 逆・裏・対偶

定義

命題「$p \Longrightarrow q$」に対して,

- 逆 $q \Rightarrow p$
- 裏 $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$
- 対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$

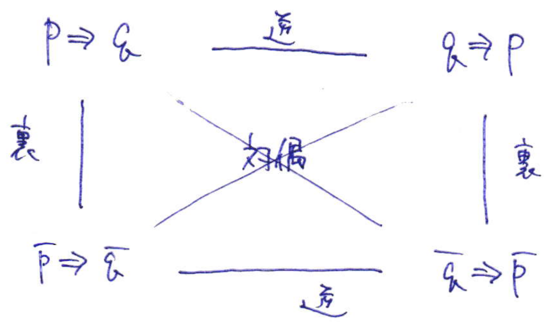
例

命題「$\underset{p}{x = -2} \Longrightarrow \underset{q}{x^2 = 4}$」について ← 真

逆：$x^2 = 4 \Rightarrow x = -2$ 偽 反例 $x = 2$

裏：$x \neq -2 \Rightarrow x^2 \neq 4$ 偽 反例 $x = 2$

対偶：$x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq -2$ 真.



注)

もとの命題とその逆の真偽は

一致するとは限らない.

3.3　対偶証明法

元の命題と, その逆・裏・対偶の真偽について考える.

性質

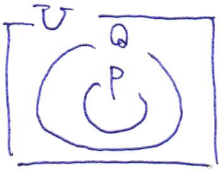
命題「$p \Longrightarrow q$」の真偽と 対偶「$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$」の真偽は一致

〈簡単な説明〉.

P : 条件pをみたすもの全体の集合.

Q : 条件qをみたすもの全体の集合.

$P \Rightarrow q$ が真とは, 以下の図の状況.
$(P \subset Q)$.



このとき, $\bar{P}$ と $\bar{Q}$ について.

$\bar{P} \supset \bar{Q}$ である.

つまり, $\bar{Q}$ に含まれるものはすべて $\bar{P}$ に含まれる.

i.e. $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$

問題1

$n \in \mathbb{Z}$(整数) とする. 以下の命題を示せ.

n^2が奇数ならば, n も奇数である.

〈証明〉.

対偶「nが偶数 ⇒ n^2が偶数」を示す.

n が偶数なので,

$n = 2m \quad (m \in \mathbb{Z})$

と書ける.

$\therefore n^2 = 4m^2$

$= 2 \times 2m^2$ と表せるので

n^2も偶数.

よって 対偶は真なので, もとの命題も真 □

問題2

$n \in \mathbb{Z}$(整数) とする. 以下の命題を示せ.

n^2が偶数ならば, n も偶数である.

〈証明〉.

対偶「nが奇数 ⇒ n^2も奇数」を示す。

nが奇数なので

$n = 2m+1 \quad (m \in \mathbb{Z})$

と書ける。

$\therefore n^2 = (2m+1)^2$

$= 4m^2 + 4m + 1$

$= 2(2m^2 + 2m) + 1$.

であり, (偶数)+1 の形で表せるので,

n^2も奇数.

よって 対偶は真なので, もとの命題も真 □

4　背理法

4.1　問題 1

$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，以下の命題を示せ．

$$1+\sqrt{2} \text{ は無理数である．}$$

＜証明＞.

$1+\sqrt{2}$ が有理数であると仮定.

もとの命題が不成立と仮定.

i.e. 互いに素な整数 m, n を用いて

$$1+\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad (n \neq 0)$$

と表せる。

その仮定のもと式変形

$$1+\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} - 1$$

$$= \frac{m-n}{n}$$

さて，m, n : 整数 なので

$m-n$ は整数.

矛盾を導く

∴ (右辺) = 有理数 となり，

$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾.

矛盾が生じたのは，仮定が誤っていたから。

∴ 仮定が誤り

つまり．$1+\sqrt{2}$ は無理数

■ つまり，もとの命題は真

4.2　問題 2

$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，以下の命題を示せ．

$$2+5\sqrt{2} \text{ は無理数である．}$$

＜証明＞.

$2+5\sqrt{2}$ が有理数であると仮定.

i.e. 互いに素な整数 m, n を用いて，

$$2+5\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad (n \neq 0)$$

と表せる.

$$2+5\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

$$5\sqrt{2} = \frac{m}{n} - 2$$

$$= \frac{m-2n}{n}$$

$$\sqrt{2} = \frac{m-2n}{5n}$$

さて，m, n は整数なので

$m-2n$ も $5n$ も整数

∴ (右辺) = 有理数 となり.

$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾.

∴ 仮定が誤り

つまり　$2+5\sqrt{2}$ は無理数

■

4.3 問題 3

$\sqrt{2}$ が無理数であることを示せ.

〈証明〉

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定.

i.e. 互いに素な整数 m, n を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad (n \neq 0)$$

と書ける.

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

$$n\sqrt{2} = m$$

$$2n^2 = m^2 \quad \text{—— } (*)$$

さて, $2n^2$ は偶数なので, m^2 も偶数.

m^2 が偶数のとき m も偶数

∵ 対偶「m が奇数 ⇒ m^2 が奇数」は,

$m = 2k+1$ (k: 整数) とおくと

$$m^2 = 4k^2+4k+1$$
$$= 2(2k^2+2k)+1 = (奇数)$$

なので真.

∴ m は偶数なので $m = 2l$ (l: 整数) とおくと $m^2 = 4l^2$.

(*)より

$$2n^2 = 4l^2$$
$$n^2 = 2l^2$$

(右辺) = (偶数) なので, 同じ議論から.

n も偶数.

さて, m, n はともに偶数だが, これは m と n が互いに素であることに矛盾.

∴ $\sqrt{2}$ は無理数

□

4.4 問題 4

$\sqrt{3}$ が無理数であることを示せ.

〈証明〉.

$\sqrt{3}$ が有理数であると仮定.

i.e. 互いに素な整数 m, n を用いて

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}$$

と書ける.

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}$$

$$n \cdot \sqrt{3} = m$$

$$3n^2 = m^2 \quad \text{—— } (*)$$

さて, $3n^2$ は 3の倍数なので, m^2 も 3の倍数.

m^2 が3の倍数 ⇒ m も3の倍数.

∵ 対偶「m が3の倍数でない ⇒ m^2 が3の倍数でない」で示す.

i) $m = 3k+1$ のとき ($k \in \mathbb{Z}$)

$$m^2 = (3k+1)^2$$
$$= 9k^2+6k+1$$
$$= 3(3k^2+2k)+1$$

ii) $m = 3k+2$ のとき. ($k \in \mathbb{Z}$)

$$m^2 = (3k+2)^2$$
$$= 9k^2+12k+4$$
$$= 3(3k^2+4k+1)+1.$$

どちらの場合も m^2 は3の倍数ではない.

∴ 真

∴ m が3の倍数なので, $m = 3l$ ($l \in \mathbb{Z}$)

とおけて, $m^2 = 9l^2$

(*)から.

$$3n^2 = 9l^2$$
$$n^2 = 3l^2$$

(右辺) = (3の倍数) なので, 同じ議論から,

n も3の倍数.

よって, m, n はともに3の倍数だが, これは互いに素であることに矛盾.

∴ $\sqrt{3}$ は無理数.

□

5 演習問題

5.1 集合記法

(1) $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ はそれぞれ自然数全体の集合，実数全体の集合とする．

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{x | 0 < x < 6, x \in \mathbb{N}\}$$
$$C = \{x | 1 \leqq x \leqq 6, x \in \mathbb{R}\}$$

のとき，以下の $\boxed{}$ に当てはまる記号を書け．

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$

(a) $A \boxed{} B$

$A = B$

(b) $A \boxed{} C$

$A \subset C$

(c) $3 \boxed{} A$

$3 \in A$

(d) $1.3 \boxed{} B$

$1.3 \notin B$

(e) $C \boxed{} \sqrt{2}$

$C \ni \sqrt{2}$

(2) 以下の集合を，別の記法で書き表せ．ただし，$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合とする．

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{x \mid 1 \leqq x \leqq 10, x \in \mathbb{Z}\}.$

(b) $B = \{x | -3 < x < 5, x \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}.$

(c) $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$C = \{2x \mid 1 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{Z}\}.$

(d) $D = \{x | x$ は 24 の正の約数 $\}$

$D = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}.$

(3) 以下の集合の部分集合を全て求めよ．

(a) $A = \{a, b\}$

$\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}.$

(b) $B = \{a, b, c\}$

$\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}.$

$\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}.$

$\{a, b, c\}.$

(c) $C = \{1, 2, 3, 4\}$

$\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\},$

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\},$

$\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\},$

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\},$

$\{1, 2, 3, 4\}.$

5.2 共通部分・和集合・補集合

$U = \{x|1 \leqq x \leqq 15, x \in \mathbb{N}\}$ を全体集合とし，その部分集合を

$$A = \{x|x \text{ は奇数 }\}$$

$A = \{1, 3, 5, 7, \cdots, 13, 15\}$

$$B = \{x|x \text{ は 3 の倍数 }\}$$

$B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

$$C = \{x|x \text{ は 5 の倍数 }\}$$

$C = \{5, 10, 15\}.$

とする．以下の部分集合を求めよ．

(1) $A \cap B$

$A \cap B = \{3, 9, 15\}.$

(2) $A \cup B$

$A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15\}.$

(3) $C \cap B$

$C \cap B = \{15\}.$

(4) $\overline{A}$

$\overline{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}.$

(5) $\overline{\overline{B}}$

$\overline{\overline{B}} = B$

$= \{3, 6, 9, 12, 15\}.$

(6) $\overline{A} \cap C$

$\overline{A} \cap C = \{10\}.$

$\overline{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

$\overline{B} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}.$

(7) $\overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14\}.$

(8) $\overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A} \cap \overline{B} = \{2, 4, 8, 10, 14\}.$

(9) $\overline{A \cap C}$

$A \cap C = \{5, 15\}$ [illegible]

$\overline{A \cap C} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}.$

(10) $\overline{A \cup C}$

$A \cup C = \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15\}$ [illegible]

$\overline{A \cup C} = \{2, 4, 6, 8, 12, 14\}.$

(11) $A \cap B \cap C$

$A \cap B \cap C = \{15\}.$

(12) $\overline{\overline{A} \cup (B \cap C)}$

$B \cap C = 15.$

$\overline{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}.$

$\therefore \overline{A} \cup (B \cap C) = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15\}$

$\therefore \overline{\overline{A} \cup (B \cap C)} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}.$

5.3 命題

以下の文が命題であるか否かを判断せよ．また，命題である場合は真偽を判定し，偽の場合はその理由を説明せよ．

(1) 福井県は石川県よりも面積が広い．

真

(2) 日本の人口は多い．

命題でない．

(3) 4 は素数である．

偽

(4) 100 は大きい数である．

命題でない

(5) $x \in \mathbb{R}$(実数全体の集合) とする．

$$x < 10 \Longrightarrow x < 2$$

偽

反例 : $x = 9$

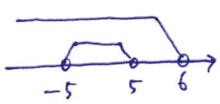
(6) $x \in \mathbb{R}$(実数全体の集合) とする．

$$x \geqq 10 \Longrightarrow x \geqq 2$$

真

(7) $x \in \mathbb{R}$(実数全体の集合) とする．

$$|x| < 5 \Longrightarrow x < 6$$



真

(8) $x \in \mathbb{Z}$(整数全体の集合) とする．

$$x \text{ が偶数} \Longrightarrow x^2 \text{が奇数}$$

偽

反例 $x = 4$ のとき $x^2 = 16$

(9) $x \in \mathbb{Z}$(整数全体の集合) とする．

$$x \text{ が } 3 \text{ の倍数} \Longrightarrow x^2 \text{が奇数}$$

偽

反例 $x = 6$ のとき

$x^2 = 36$.

(10) $x \in \mathbb{R}$(実数全体の集合) とする．

$$x^2 \text{が } 3 \text{ の倍数} \Longrightarrow x \text{ が奇数}$$

偽

反例.

$x^2 = 36$ のとき $x = \pm 6$

5.4 必要条件・十分条件

$\boxed{}$に当てはまるものを以下から選べ.

(a) 必要条件であるが十分条件ではない
(b) 十分条件であるが必要条件ではない
(c) 必要条件でも十分条件でもない
(d) 必要十分条件である

(1)「x が整数」であることは「x が自然数」であるための$\boxed{}$

⇒ 偽

⇐ 真 ×

a.

(2)「x が 6 の倍数」であることは「x が 3 の倍数」であるための$\boxed{}$

⇒ 真 +

⇐ 偽

b

(3) $x \in \mathbb{R}$(実数全体の集合) とする.
「$x < 10$」であることは「$|x| < 10$」であるための$\boxed{}$

⇒ 偽

⇐ 真 ×

a

(4) $x \in \mathbb{N}$(自然数全体の集合) とする.
「$x < 10$」であることは「$|x| < 10$」であるための$\boxed{}$

$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

⇒ 真

⇐

d

5.5 同値

x, y, z は実数とする. 以下の中で, $x = y$ と同値な条件を全て選べ.

(a) $x + z = y + z$ 真
(b) $3x = 3y$ 真
(c) $xz = yz$ 偽
(d) $x^2 = y^2$ 偽
(e) $x - y = 0$ 真
(f) $(x - y)^2 = 0$ 真

a, b, e, f

(c) について

「$xz = yz$」⇒「$x = y$」は偽.

反例. $z = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

(d) について.

「$x^2 = y^2$」⇒「$x = y$」は偽.

反例 $x = 1$, $y = -1$.

5.6　否定

以下の条件を否定した条件をかけ．ただし，$x \in \mathbb{R}, n, y \in \mathbb{N}$ とする．

(1) n は 3 の倍数である．

n は 3の倍数でない

(2) n は 3 の倍数かつ偶数である．

n は 3の倍数でない または 奇数

	3の倍	でない
偶	もと	
奇		

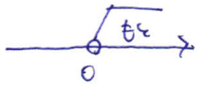
(3) x, y はともに有理数である．

x, y の少なくとも一方は無理数

y \ x	有	無
有	もと	
無		

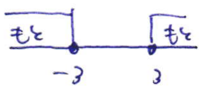
(4) $x > 0$

$x \leqq 0$



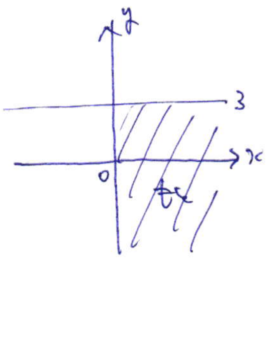
(5) $|x| \geqq 3$

$-3 < x < 3$



(6) $x > 0$ かつ $y \leqq 3$

$x \leqq 0$ または $y > 3$.



5.7　逆・裏・対偶

$x \in \mathbb{R}$(実数全体) とする．

以下の命題の逆・裏・対偶を述べ，それらの真偽を求めよ．

(1) $x > 0 \Longrightarrow x > 5$　偽　反 $x=1$.

逆　$x > 5 \Rightarrow x > 0$　真

裏　$x \leqq 0 \Rightarrow x \leqq 5$　真

対偶　$x \leqq 5 \Rightarrow x \leqq 0$　偽　反 $x=4$

(2) $x < 4 \Longrightarrow x^2 < 4$　偽　反 $x=-10$

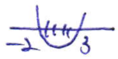
逆　$x^2 < 4 \Rightarrow x < 4$　真

裏　$x \geqq 4 \Rightarrow x^2 \geqq 4$　真

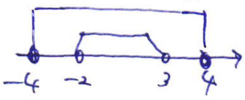
対偶　$x^2 \geqq 4 \Rightarrow x \geqq 4$　偽　反 $x=-4$

(3) $x^2 - x - 6 < 0 \Longrightarrow |x| \leqq 4$ → $-4 \leqq x \leqq 4$

$(x-3)(x+2) < 0$



$-2 < x < 3 \Rightarrow -4 \leqq x \leqq 4$　真



逆　$|x| \leqq 4 \Rightarrow x^2 - x - 6 < 0$　偽　反 $x=4$

裏　$x^2 - x - 6 \geqq 0 \Rightarrow |x| > 4$　偽　反 $x=4$

対偶　$|x| > 4 \Rightarrow x^2 - x - 6 \geqq 0$　真.

6　実践問題

6.1　問題 1

実数 x に関する 3 つの条件 p, q, r を

$$p : -1 \leqq x \leqq 5,\quad q : 3 < x < 6,\quad r : x \leqq 5$$

とする．

(1) 条件 p, q の否定を，それぞれ $\overline{p}, \overline{q}$ で表すとき，以下が成立．

- 「p かつ q」は，r であるための $\boxed{\text{ア}}$．
- 「$\overline{p}$ かつ q」は，r であるための $\boxed{\text{イ}}$．
- 「p または $\overline{q}$」は，r であるための $\boxed{\text{ウ}}$．

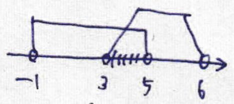
a.　必要条件であるが，十分条件ではない
b.　十分条件であるが，必要条件ではない
c.　必要十分条件である
d.　必要条件でも十分条件でもない

(2) 定数 a を正の実数とし，

$$(ax-2)(x-a-1) \leqq 0$$

を満たす実数 x 全体の集合を A とする．
集合 A は，a の値を 3 つの場合に分けて考えると，

- $0 < a < \boxed{\text{エ}}$ のとき，$A = \{x \mid \boxed{\text{オ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{カ}}\}$
  1　$a+1$　$\frac{2}{a}$
- $a = \boxed{\text{エ}}$ のとき，$A = \{\boxed{\text{キ}}\}$
  1　2
- $\boxed{\text{エ}} < a$ のとき，$A = \{x \mid \boxed{\text{カ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{オ}}\}$
  1　$\frac{2}{a}$　$a+1$



$3 < x \leqq 5$

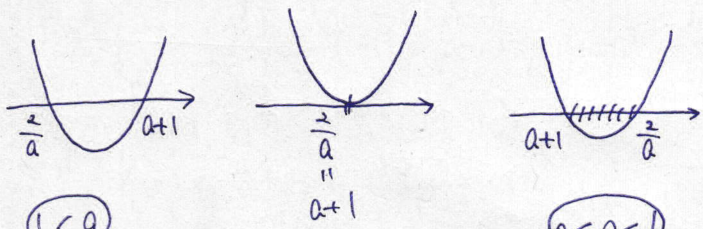
集合 B を

$$B = \{x \mid x \text{ は「}p \text{ かつ } q\text{」を満たす実数}\}$$

とするとき，$A \cap B$ が空集合となる a の値の範囲は

$$\frac{2}{3}\ \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \leqq a \leqq \boxed{\text{コ}}\ 2$$

$(ax-2)(x-(a+1)) \leqq 0$



$1 < a$　　$\frac{2}{a} = a+1$　　$0 < a < 1$

$\frac{2}{a} = a+1$

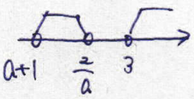
$2 = a(a+1)$

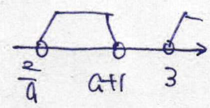
$a^2 + a - 2 = 0$

$(a+2)(a-1) = 0$

$a = 1, -2$

(i) $0 < a < 1$.　　(ii) $1 < a$



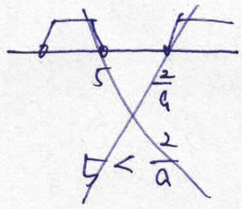


$\frac{2}{a} \leqq 3$

$\frac{2}{3} \leqq a$

$a+1 \leqq 3$.　$\therefore$　$a \leqq 2$

or



$\cancel{5 < \frac{2}{a}}$

6.2 問題 2.0

実数を元とする 2 つの集合

$$A = \{2, a-1, a+4\}$$
$$B = \{8-a, a+2, 5\}$$

の共通部分 $A \cap B$ が $\{2,5\}$ となるように実数 a の値を定めよ．また，そのときの和集合 $A \cup B$ を求めよ．

$5 \in A$ より.

$a-1=5$ or $a+4=5$

i.e. $a=6$ or $a=1$.

$a=6$ のとき

$B=\{2, 8, 5\}$

$a=1$ のとき

$B=\{7, 3, 5\}$.

$A \cap B = \{2, 5\}$ なるのは $\underline{a=6}$ //

$A \cup B = \{2, 5, 10\} \cup \{2, 8, 5\}$

$= \underline{\{2, 5, 8, 10\}}$ //

6.3 問題 2.1

実数を元とする 2 つの集合

$$A = \{2, 4, a^3 - 2a^2 - a + 7\}$$
$$B = \{-4, a+3, a^2 - 2a + 2, a^3 + a^2 + 3a + 7\}$$

の共通部分 $A \cap B$ が $\{2,5\}$ となるように実数 a の値を定めよ．また，そのときの和集合 $A \cup B$ を求めよ．

$A \ni 5$ より

$a^3 - 2a^2 - a + 7 = 5$

$a^3 - 2a^2 - a + 2 = 0$

$a^2(a-2) - (a-2) = 0$

$(a^2-1)(a-2) = 0$

$(a-1)(a+1)(a-2) = 0$

$a = 1, -1, 2$

(i) $a=1$ のとき

$B = \{-4, 4, 1, 12\}$

不適

(ii) $a=-1$ のとき

$B = \{-4, 2, 5, 4\}$.

$A \cap B = \{2, 5, 4\}$ で不適.

(iii) $a=2$ のとき

$B = \{-4, 5, 2, 25\}$.

$A \cap B = \{2, 5\}$ となる

$\therefore \underline{a=2}$ //

$A \cup B = \{2, 4, 5\} \cup \{-4, 5, 2, 25\}$

$= \underline{\{-4, 2, 4, 5, 25\}}$ //

6.4　**問題 3**

下記の各命題についてその真偽を記し，理由を述べよ．
(つまり，真の場合は示し，偽の場合は反例を挙げる．)

(1) $\sqrt{7}$ は無理数である．　真．

(2) 和も積もともに 0 でない有理数であるような 2 つの実数 a, b はともに有理数である．　偽

(3) a, b, c を実数とする．
全ての実数 x について，$ax^2 + bx + c > 0$ ならば $b^2 - 4ac < 0$ である．　~~真~~ 偽

(1) <proof>
背理法で示す．

$\sqrt{7}$ が有理数と仮定．

i.e. $\sqrt{7} = \frac{n}{m}$　($m, n \in \mathbb{Z}$，互いに素)

とおく．

$\sqrt{7}\,m = n$

$7m^2 = n^2$ —— ※1

左辺 = 7の倍数なので，n^2も7の倍数．

n^2が7の倍数 $\Rightarrow$ nも7の倍数．

∵ 対偶「nが7の倍数でない $\Rightarrow$ n^2が7の倍数でない」を示す。

$n \equiv 1 \mod 7$ のとき $n^2 \equiv 1 \mod 7$

$n \equiv 2 \mod 7$ 〃 $n^2 \equiv 4 \mod 7$

$n \equiv 3 \mod 7$ 〃 $n^2 \equiv 9 \mod 7$
$\equiv 2 \mod 7$

$n \equiv 4 \mod 7$ 〃 $n^2 \equiv 16 \mod 7$
$\equiv 2 \mod 7$

$n \equiv 5 \mod 7$ 〃 $n^2 \equiv 25 \mod 7$
$\equiv 4 \mod 7$

$n \equiv 6 \mod 7$ 〃 $n^2 \equiv 36 \mod 7$
$\equiv 1 \mod 7$．

以上より，対偶は真 ∴ nは7の倍数

∴ $n = 7k$　($k \in \mathbb{Z}$) とおく．

※1から，

$7m^2 = 7^2 k^2$

$m^2 = 7k^2$

同じ理由で mも7の倍数だが，これは nとmが互いに素であることに矛盾．

∴ 仮定が偽．∴ $\sqrt{7}$は無理数　∎

(2) 偽

反例．$a = 1 + \sqrt{2}$
$b = 1 - \sqrt{2}$．のとき

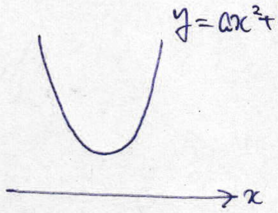
$a + b = 2$

$ab = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$．

(3) 真．

$y = ax^2 + bx + c$ とおく．

すべてのxにおいて
$ax^2 + bx + c > 0$ が成立するには，



左図のようになるはずである。

グラフとx軸の共有点がなければよい．

i.e. $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 $D < 0$

∴ $b^2 - 4ac < 0$ が成立．∎

2次不等式　$ax^2 + bx + c > 0$

これが書いてあれば…。

ただ，書いてないので…

偽

$a = 0$，$b = 0$，$c = 1$ のときが反例．