1　集合と場合の数

定義

集合 A の要素が有限のとき，その個数を $n(A)$ で表す．

例

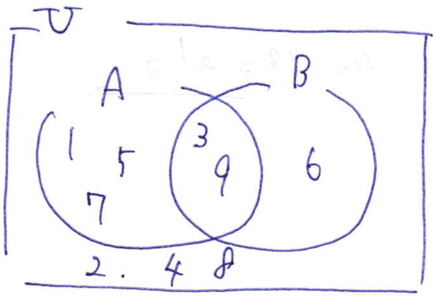
$A\ \{1,2,3,4,5\}$ のとき，要素の個数は 5 個なので，

問題 1

$$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$
$$A=\{1,3,5,7,9\}$$
$$B=\{3,6,9\}$$

のとき，以下の問いに答えよ．

(1) ベン図を描け．



(2) $n(A)$ を求めよ．

$n(A)=5$

(3) $n(B)$ を求めよ．

$n(B)=3$

(4) $n(A\cap B)$ を求めよ．

$n(A\cap B)=2$

(5) $n(A\cup B)$ を求めよ．

$n(A\cup B)=6$

(6) $n(\overline{A}\cap B)$ を求めよ．

$n(\overline{A}\cap B)=1$

問題 2

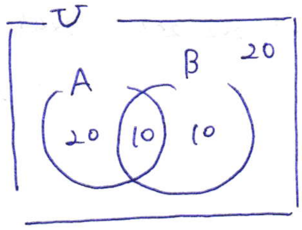
全体集合 U と，その部分集合 A,B に対し，

$$n(U)=60,\quad n(A)=30,\quad n(B)=20,\quad n(A\cap B)=10$$

を満たすとき，以下の値を求めよ．

(1) $n(\overline{A})$

$n(\overline{A})=30$



(2) $n(A\cup B)$

$n(A\cup B)=40$

(3) $n(\overline{A\cap B})$

$n(\overline{A\cap B})=n(U)-n(A\cap B)$

$=60-10=50$

(4) $n(\overline{A}\cap\overline{B})$

$=n(\overline{A\cup B})$　(ド・モアブル)

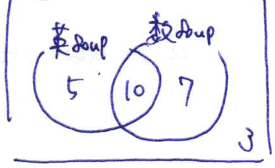
$=n(U)-n(A\cup B)$

$=60-40=20$

問題 3

25 人クラスで，英語と数学の小テストを実施したところ，英語で 80 点以上の生徒は 15 人，数学で 80 点以上の生徒は 17 人，英語と数学ともに 80 点以上の生徒は 10 人であった．このとき，以下の人数を求めよ．

(1) 少なくとも一方は 80 点以上であった人．



22人

(2) ともに 80 点未満であった人．

3人

問題 4

100 以下の正の整数において，以下の条件を満たすものの個数を求めよ．

(1) 2 の倍数

2, 4, 6, ---, 98, 100

2×1 2×2 2×3 2×49 2×50

よって 50コ

(2) 3 の倍数

3, 6, 9, ---, 99

3×1 3×2 3×3 3×33

よって 33コ

(3) 2 の倍数かつ 3 の倍数

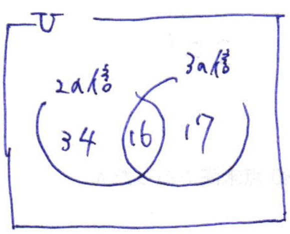
i.e. 6の倍数．

6, 12, ---, 96

6×1 6×2 6×16

よって 16コ

(4) 2 の倍数または 3 の倍数



ベン図より

34+16+17 = 67コ

問題 5

100 以上 200 以下の整数において，以下の条件を満たすものの個数を求めよ．

(1) 3 の倍数

102, 105, ---, 198

3×34 3×35 --- 3×66

よって 66−33 = 33コ

(2) 5 の倍数

100, 105, ---, 200

5×20 5×21 --- 5×40

よって 40−19 = 21コ

(3) 3 の倍数かつ 5 の倍数

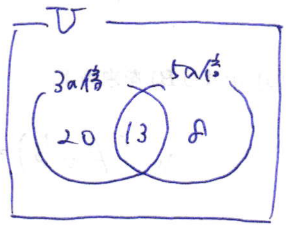
i.e. 15の倍数．

105, 120, ---, 195

15×7 15×8 --- 15×19

よって 19−6 = 13コ

(4) 3 の倍数または 5 の倍数



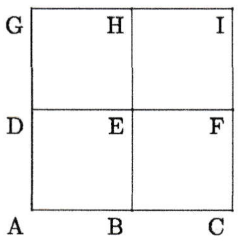
上図より

20+13+8 = 41コ

2　場合の数

> **Point**
> もれなく, 重複なく.
> そのために, 規則的に数えあげる.

問題 1



A をスタートとし, I まで行く最短路は何通りあるか.

A ─ B ─ C ─ F ─ I
　　　B ─ E ─ F ─ I
　　　　　E ─ H ─ I
A ─ D ─ E ─ F ─ I
　　　　　E ─ H ─ I
　　D ─ G ─ H ─ I

6通り

問題 2

サイコロを 2 個投げたとき, 以下の場合の数を求めよ.

(1) 和が 6 となる.

和	1	2	3	4	5	6
1					6	
2				6		
3			6			
4		6				
5	6					
6						

左図より

5コ

(2) 積が 6 となる.

積	1	2	3	4	5	6
1						6
2			6			
3		6				
4						
5						
6	6					

左図より

4コ

問題 3

大中小 3 個のサイコロを同時に投げる. 以下の場合の数を求めよ.

(1) 和が 6 となる.

大 中 小
1 − 1 − 4
　　2 − 3
　　3 − 2
　　4 − 1

大 中 小
2 − 1 − 3
　　2 − 2
　　3 − 1
3 − 1 − 2
　　2 − 1

大 中 小
4 − 1 − 1

10通り

(2) 積が 6 となる.

大 中 小
1 − 1 − 6
　　2 − 3
　　3 − 2
　　6 − 1

大 中 小
2 − 1 − 3
　　3 − 1
3 − 1 − 2
　　2 − 1
6 − 1 − 1

9通り

(3) 全て奇数となる.

大　中　小
1, 3, 5　〃　〃
3パターン

3 × 3 × 3 = 27通り.

問題 4

$(a+b+c+d+e)(x+y+z)$ を展開したときの項数を求めよ.

aに対し. x, y, zの3コ
b　〃
⋮

∴ 5 × 3 = 15コ

問題 5

A 組 3 人, B 組 5 人, C 組 7 人のうちから 1 人ずつ選ぶ. 選び方は何通りあるか.

A組　B　C
3通り × 5 × 7 = 105通り

問題 6

以下の数の正の約数の個数を求めよ.

(1) 6

1, 2, 3, 6

4コ

(2) 12

1, 2, 3, 4, 6, 12

6コ

(3) 24

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

8コ

(4) 122 $= 61 \times 2$

1, 2, 61, 122

4コ

(5) 3600 $= 6 \times 6 \times 10 \times 10$

$= 2^4 \times 3^2 \times 5^2$

2の数		3の数		5の数
0	←	0, 1, 2	←	0, 1, 2
1		⋮		
2				
3				
4				

上図より

$5 \times 3 \times 3 = 45$コ

3　順列

例題
5 個の数 1, 2, 3, 4, 5 から異なる数字を使ってできる以下のような数は何個あるか.

(1) 4 桁の整数

$\boxed{千}\ \boxed{百}\ \boxed{十}\ \boxed{一}$

$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ こ

(2) 3 桁の偶数

$\boxed{百}\ \boxed{十}\ \boxed{一}$

2通り　まず、一の位. 2 or 4.

4×3 通り　次に百、十の位は残り4つから2つ.

よって

$2 \times 4 \times 3 = 24$ 通り

(3) 3 桁の5の倍数

$\boxed{百}\ \boxed{十}\ \boxed{一}$

1通り　まず一の位は5.

4×3 通り　次に百、十の位は残った4つから2つ.

よって　$4 \times 3 = 12$ 通り

問題 1
以下の順列の総数を求めよ.

(1) 7 人から 4 人選んで並べる.

$\boxed{\ }\ \boxed{\ }\ \boxed{\ }\ \boxed{\ }$

$7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ (通り)

(2) 1, 2, 3, 4 のうち異なる 3 つを使い 3 桁の整数を作る.

$\boxed{百}\ \boxed{十}\ \boxed{一}$

$4 \times 3 \times 2 = 24$ (通り)

(3) 8 人から 3 人のリレー選手と走順を決める.

$\boxed{一}\ \boxed{二}\ \boxed{三}$

$8 \times 7 \times 6 = 336$ 通り

(4) 1~8 と書かれた席に 3 人が座る.

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \cdots\ \boxed{8}$

A　B　C

$8 \times 7 \times 6 = 336$ 通り

(5) 6 人の異なる景品を 6 人に配る.

$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \cdots\ \boxed{F}$

A

$\underbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{6!\ と書く.} = 720$ 通り

階乗

(6) 5 人を一列に並べる.

$\boxed{\ }\ \boxed{\ }\ \boxed{\ }\ \boxed{\ }\ \boxed{\ }$

$\underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{5!} = 120$ 通り

問題 2

大人 4 人，子供 3 人が一列に並ぶ．以下の条件を満たすように並ぶときの並び方の総数を求めよ．

(1) 大人が両端に並ぶ．

□ ‐ ‐ ‐ ‐ ‐ ‐ □

4 × 3　　まず，大人を両端に並べる．

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$　　残り 5 人を中に並べる

よって

$4 \times 3 \times 5! = \underline{1440}$ 通り

(2) 大人と子供が交互に並ぶ．

まず大人を一列に並べる

$\boxed{大}\ \boxed{大}\ \boxed{大}\ \boxed{大}$　　$4! = 24$ 通り

次に，間に子どもを入れていく

$\boxed{大}\ \boxed{大}\ \boxed{大}\ \boxed{大}$

子　子　子　　$3! = 6$ 通り．

$\therefore\ 24 \times 6 = \underline{144}$ 通り

(3) 子供が 3 人連続して並ぶ．

$\boxed{子ども3人}$ 大 大 大 大

↑

3! 通り．

子ども 1 まとまりで並べていく。

子どもの並べ方は $3! = 6$ 通り．

まとまり＋大人 4 人 の 5 コを一列に並べる

$5! = 120$ 通り．

$\therefore\ 6 \times 120 = \underline{720}$ 通り

問題 3

6 個の数 0, 1, 2, 3, 4, 5 から異なる数字を使ってできる以下のような数は何個あるか．

(1) 4 桁の整数

$\boxed{千}\ \boxed{百}\ \boxed{十}\ \boxed{一}$

5　　千の位は 0 以外の 5 通り．

$5 \times 4 \times 3$　　以下 3 ケタは残り 5 コから 3 つ．

$\therefore\ 5 \times 5 \times 4 \times 3 = \underline{300}$ コ

(2) 4 桁の奇数

$\boxed{千}\ \boxed{百}\ \boxed{十}\ \boxed{一}$

3　　一の位は 1, 3, 5 の 3 通り．

4　　千の位は 残り 5 コから 0 を除く 4 通り．

4×3　　残りは 4 コから 2 コ．

$\therefore\ 3 \times 4 \times 4 \times 3 = \underline{144}$ コ

(3) 4 桁の偶数

(4 ケタの整数) = (4 ケタの奇数) + (4 ケタの偶数)

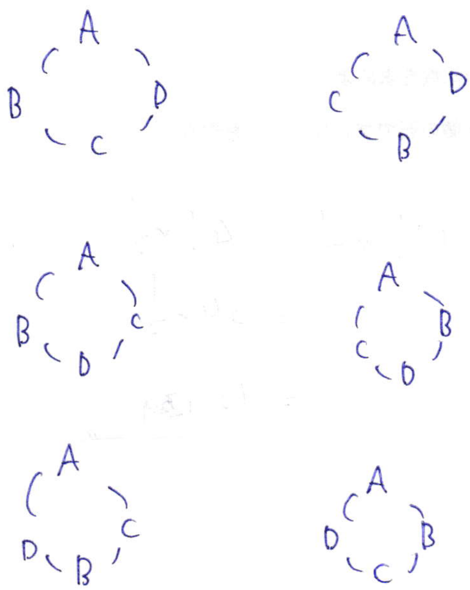
$\therefore\ 300 - 144 = \underline{156}$ コ

4 色々な順列

4.1 円順列

検討

A, B, C, D の 4 人を円形に並べる．どんな並べ方があるか全列挙しよう．



何通りあるか. ⟶ 6通り.

どうすれば計算できるか検討しよう.

基準を1人決め、時計まわりに
どのように並んでいるかを数え上げる。

残り3人を一列に ⟶ 3! 通り.

円順列

異なる n 個のものを円形に並べるときの並べ方は,

$(n-1)!$

問題

以下の順列の総数を求めよ

(1) 異なる 5 個の石を円形に並べる．

$(5-1)! = 4!$

$= 24$ 通り

(2) 3 人の人間を円形に並べる．

$(3-1)! = 2!$

$= 2$ (通り)

(3) 8 人の人間を円形に並べる．

$(8-1)! = 7!$

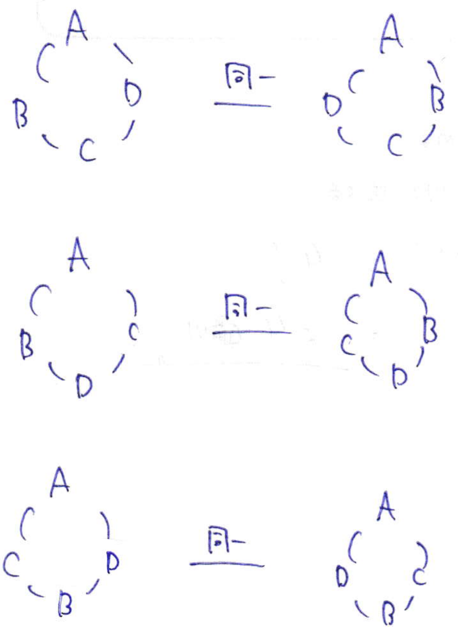
$= 5040$ (通り)

4.2　数珠順列

検討

A, B, C, D

異なる 4 つの石を用いてブレスレットを作る．どんな並べ方があるか全列挙しよう．



何通りあるか. ⟶　3通り.

どうすれば計算できるか検討しよう．

円に並べた後，左右対称を考慮

i.e. $\frac{1}{2}$倍する．

$(4-1)! = 3! = 6.$

$6 \times \frac{1}{2} = 3$コ

数珠順列

異なる n 個のものの数珠順列は,

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

問題

以下の順列の総数を求めよ

(1) 異なる 5 個の石でブレスレットを作る．

$$(5-1)! \times \frac{1}{2} = 4! \times \frac{1}{2} = 24 \times \frac{1}{2} = 12 \text{ (通り)}$$

(2) 異なる 10 個の石で首飾りを作る．

$$(10-1)! \times \frac{1}{2} = 9! \times \frac{1}{2} = 9 \cdot 8 \cdot 7! \cdot \frac{1}{2} = 9 \cdot 4 \cdot 5040 = 181440 \text{ (通り)}$$

(3) 異なる 7 個の石で首飾りを作る．

$$(7-1)! \times \frac{1}{2} = 6! \times \frac{1}{2} = 720 \times \frac{1}{2} = 360 \text{ (通り)}$$

4.3　重複順列

検討

○と×を重複を許して 3 個並べる．どんな並べ方があるか全列挙しよう．

$\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

O or X　O or X　O or X

$2 \times 2 \times 2$

何通りあるか．⟶　8 通り．

どうすれば計算できるか検討しよう．

各々 2 通りずつ．

i.e. 2^3 通り．

重複順列

をr回並べる．

異なる n 個のもの の重複順列は，

n^r

問題

(1) 1, 2, 3, 4 から重複を許して 4 個の数字を選んでできる 4 桁の整数は何個か．

$\boxed{千}$ $\boxed{百}$ $\boxed{十}$ $\boxed{一}$

$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$

$= 256$ 通り //

(2) 10 人を A または B の 2 部屋に分ける方法．ただし，1 人も入らない部屋があっても良い．

1人目　2人目　----　10人目

A or B　A or B　　　A or B

$2^{10} = 1024$ 通り //

(3) 0, 1, 2, 3 から重複を許して 4 個の数字を選んでできる 4 桁の整数は何個か．

$\boxed{千}$ $\boxed{百}$ $\boxed{十}$ $\boxed{一}$

$3 \times 4 \times 4 \times 4 = 192$ 通り //

(4) 0, 1, 2, 3 から重複を許して 4 個の数字を選んでできる 4 桁の偶数は何個か．

$\boxed{千}$ $\boxed{百}$ $\boxed{十}$ $\boxed{一}$

千の位 … 1, 2, 3

一の位 … 0, 2

$3 \times 4 \times 4 \times 2$

$= 96$ 通り //

5　組み合わせ

5.1　並べる

5 人から$\boxed{}$人並べる．総数は何通りか．

(1) 1 人

□

5

5通り.

(2) 2 人

□ □

5 × 4 = 20

20通り

(3) 3 人

□ □ □

5 × 4 × 3 = 60

60通り.

(4) 4 人

□ □ □ □

5 × 4 × 3 × 2 = 120

120通り

(5) 5 人

□ □ □ □ □

5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 120

120通り

5.2　選ぶ

5 人から$\boxed{}$人選ぶ．総数は何通りか．

(1) 1 人

a
b
c
d
e

5通り.

(2) 2 人

a − b, c, d, e
b − c, d, e
c − d, e
e − d

10通り

(3) 3 人

a − b − c, d, e
a − c − d, e
a − d − e
b − c − d, e
b − d − e
c − d − e

10通り.

(4) 4 人

a − b − c − d, e
a − b − e − d
a − c − d − e
b − c − d − e

5通り.

(5) 5 人

a − b − c − d − e

1通り.

5.3 どうやって考えるか

・5人から2人選ぶ場合.

○ 並べる.

a − b ①, c ②, d ③, e

b − a ①, c, d, e

c − a ②, b, d, e

d − a ③, b, c, e

e − a, b, c, d

選ぶ

① a, b

② a, c

③ a, d

⋮

⑩

計10通り.

並べた後に、組みあわせとして同じものが2コずつあるので2で割る。

$\frac{5\times4}{2} = 10$通り.

・5人から3人選ぶ場合

並べた後に2で割ればいいか?

→ No.

a, b, c
a, c, b
b, a, c
b, c, a
c, a, b
c, b, a

$\xrightarrow[(\div 3!)]{\div 6}$ a, b, c

$6 = 3!$ 通り.

i.e. 5人から3人並べて, 3!でわる.

$\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1} = 10$通り

5.4 組み合わせ

定義

異なる n 個から r 個選ぶときの組み合わせの総数は

$$\frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdots\cdot(n-(r-1))}^{r\text{コ}}}{\underbrace{r\cdot(r-1)\cdot\cdots\cdot1}_{r\text{コ}}}$$

で計算することができる.

この総数のことを

$${}_nC_r$$

と書く.

i. e.

$${}_nC_r = \frac{n(n-1)\cdots\cdot(n-(r-1))}{r\cdot(r-1)\cdots\cdot1}$$

例

4 種類の果物から 2 種類選ぶ.

$${}_4C_2 = \frac{4\cdot3}{2\cdot1} = 6\text{(通り)}$$

練習

(1) 8 人から 2 人えらぶ.

$${}_8C_2 = \frac{8\cdot7}{2\cdot1} = 28\text{ (通り)}$$

(2) 5 人から 3 人えらぶ.

$${}_5C_3 = \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1} = 10\text{ (通り)}$$

(3) 8 人から 6 人えらぶ. ← 選ばれない2人を選べばよい。i.e. ${}_8C_2$と同じ!!

$${}_8C_6 = \frac{8\cdot7\cdot\cancel{6\cdot5\cdot4\cdot3}}{\cancel{6\cdot5\cdot4\cdot3}\cdot2\cdot1} = \frac{8\cdot7}{2\cdot1} = 28\text{ (通り)}$$

性質

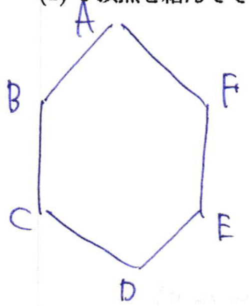
$${}_nC_r = {}_nC_{(n-r)}$$

5.5 さまざまな問題

問題 1

正六角形 ABCDEF について，以下の問いに答えよ．

(1) 3 頂点を結んでできる三角形は何個できるか．



6頂点から 3頂点選べばよいので

$_6C_3 = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}$

$= 20$ 通り

(2) 2 頂点を結んでできる線分は何個できるか．

6頂点から 2頂点選べばよい．

$_6C_2 = \frac{6\cdot5}{2\cdot1} = 15$ 通り

(3) 対角線は何本引くことができるか．
(ただし対角線とは，2 点を結んでできる線分のうち，六角形の辺ではないもののことである．)

(2)の辺のうち，対角線でないものは，6本あるので

$15 - 6 = 9$ (本)

問題 2

大人 3 人，子供 5 人から以下のような選び方は何通りあるか．

(1) 大人子供関係なく，8 人から 3 人選ぶ．

$_8C_3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}$

$= 56$ 通り

(2) 大人 3 人を選ぶ．

大人3人から3人選ぶので 1通り

(3) 子供 3 人を選ぶ．

5人から3人選ぶので $_5C_3 = \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}$

$= 10$ 通り

(4) 大人 2 人，子供 3 人を選ぶ．

大人の選び方は 3人から2人 … $_3C_2 = 3$.

子供の 〃 5人から3人 … $_5C_3 = \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}$

$= 10$

$\therefore\ 3\times10 = 30$ 通り

(5) 子供が少なくとも 1 人は含まれるように 3 人選ぶ．

大	子	
3	0	
2	1	←ここ
1	2	←ここ
0	3	←ここ

誰でも3人選ぶ選び方から，大人3人選ぶ通りを引けばよい．

(1)より 8人中3人選ぶのは 56通り．

(2)より 大人 3人 〃 1通り．

$\therefore\ 56 - 1 = 55$ 通り

問題 3

9 人を以下のように分けるときの分け方は何通りあるか.

(1) A, B, C の 3 部屋に, 3 人ずつ分ける.

まず、9人中3人Aの部屋に入れる ${}_9C_3$

次に6人中3人B 〃 ${}_6C_3$

さいごに、3人中3人C 〃 1.

$$\therefore\ {}_9C_3 \times {}_6C_3 \times 1 = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\overset{4}{\cancel{8}}\cdot 7}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}\times\frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4}{\cancel{3\cdot 2}\cdot 1}$$

$$= \underline{1680\text{(通り)}}$$

(2) A の　部屋に 2 人, B の部屋に 3 人, C の部屋に 4 人分ける.

まず9人中2人Aの部屋に入れる ${}_9C_2$

次に7人中3人B 〃 ${}_7C_3$

さいごに 4人をCの 〃 1.

$$\therefore\ {}_9C_2 \times {}_7C_3 \times 1 = \frac{9\cdot\overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{2}\cdot 1}\times\frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{3\cdot 2}\cdot 1}$$

$$= \underline{1260\text{(通り)}}$$

(3) 3 人ずつの班に分ける.

A、B、Cの3部屋に分けて区別をなくす。

(1)の結果から、

$$1680 \div 3! = \frac{1680}{3\cdot 2\cdot 1}$$

$$= \underline{280\text{(通り)}}$$

(4) 4 人, 4 人, 1 人の 3 つに分ける.

まず、A、B、Cに4、4、1人ずつ入れる。

$${}_9C_4 \times {}_5C_4$$

$$= \frac{9\cdot\overset{2}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot\cancel{6}}{\cancel{4\cdot 3\cdot 2}\cdot 1}\cdot 5 = 630\text{通り}.$$

AとBの区別をなくす。

$$630 \div 2 = \underline{315\text{(通り)}}$$

6 同じものを含む順列

6.1 例題

F, U, K, U, I の 5 文字を全て使ってできる文字列は, 何通りあるか.

5コのマスから1マス Fを入れる … 5通り.

残4コのマスから1マス K 〃 … 4通り.

残3コの 〃 I 〃 … 3通り.

残りは 2つのUを入れる … 1通り.

∴ $5\times4\times3\times1 = 60$通り //

6.2 練習

(1) BANANA の 6 文字を全て使ってできる文字列は, 何通りあるか.

B…1コ

A…3コ

N…2コ

6マスから1マス Bを入れる … 6通り.

残り5マスから3マス Aを入れる … ${}_5C_3 = 10$通り.

残りにNを入れる … 1通り.

∴ $6\times10 = 60$通り //

(2) KOUKOUSEI の 9 文字を全て使ってできる文字列は, 何通りあるか.

K…2

O…2

U…2

S…1

E…1

I…1

Kを9マスから2マス … ${}_9C_2$

Oを7マスから2マス … ${}_7C_2$

Uを5マスから2マス … ${}_5C_2$

Sを3マスから1マス … 3

Eを2 〃 … 2

Iを1 〃 … 1

$$\therefore\ {}_9C_2\times{}_7C_2\times{}_5C_2\times3\cdot2\cdot1$$

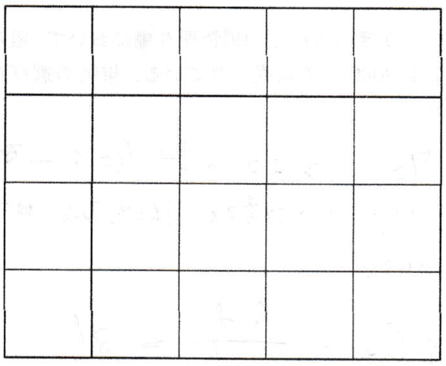
$$=\frac{9\cdot8}{2\cdot1}\times\frac{7\cdot6}{2\cdot1}\times\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\times3\cdot2\cdot1$$

$$=9\times5040$$

$$=45360\text{通り}$$ //

6.3 最短経路問題

Goal



Start

上の図において, Start から Goal までの経路の最短路は, 何通りあるか.

最短で Start → Goal は、

→ が5回、↑が4回

であり、この矢印を並べ替えたら最短路が作れる。

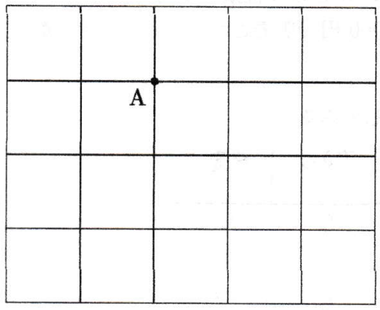
∴ その総和は

$$ {}_9C_5 = \frac{9\cdot\cancel{8}\cdot7\cdot\cancel{6}^{2}\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1} $$

$= 126$ 通り

練習

Goal



Start

(1) Start から A までの経路の最短路は, 何通りあるか.

→ が2回、↑が3回、なので、

${}_5C_2 = 10$ 通り

(2) A から Goal までの経路の最短路は, 何通りあるか.

→ が3回、↑が1回、なので

${}_4C_3 = 4$ 通り

(3) Start から Goal までの経路の最短路のうち, A を通るものは, 何通りあるか.

$$ \text{Start} \underset{10通り}{\longrightarrow} \text{A} \underset{4通り}{\longrightarrow} \text{Goal}. $$

よって $10 \times 4 = 40$ 通り

(4) Start から Goal までの経路の最短路のうち, A を通らないものは, 何通りあるか.

Start → Goal は、→×5、↑×4 なので

${}_9C_5 = 126$ 通り.

∴ Aを通らないものは、Aを通るものを引けばよいので

$126 - 40 = 86$ 通り

7　重複組み合わせ

7.1　例題

りんご, なし, かきの 3 種類の果物売り場において, 組み合わせ自由で 4 個 1000 円で販売されている．果物の選び方は何通りあるか.

(1) 個数列挙してみる…

りんご	なし	かき
4	0	0
3	1	0
3	0	1
2	2	0
	1	1
	0	2
1	3	0
	2	1
	1	2
	0	3
0	4	0
	3	1
	2	1
	1	3
	0	4

15通り

(2) New 思考

○ ○ ○ ○ | |　の6コを並べる

ex.

○ | ○○ | ○　← 1コ 2コ 1コ に対応

並べ方は

$$_6C_4 = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15\text{通り}$$

7.2　問題

(1) りんご, なし, かきの 3 種類の果物売り場において, 組み合わせ自由で 7 個 2000 円で販売されている．果物の選び方は何通りあるか.

○を7コ, |を2コ の計9コを一列に並べ, 左から順に○の個数をりんご, なし, かきに対応させる.

$$_9C_2 = \frac{9\cdot 8}{2\cdot 1} = 36.$$

∴ 36通り

(2) $x+y+z=7$ を満たす負でない整数 x, y, z の組の個数は, 全部で何通りか.

○を7コ, |を2コ の計9コを一列に並べ, 左から順に○の数を x, y, z の値に対応させる.

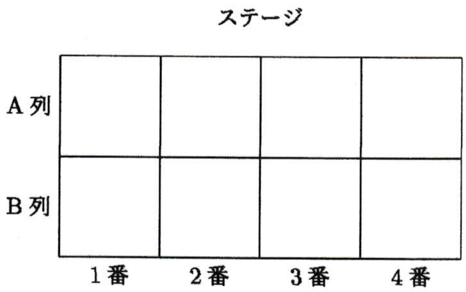
$$_9C_2 = 36$$

36通り

7 場合の数・確率演習

7.1 問題

4 組の親子, 計 8 人がいる. この 8 人が, 以下のような会場の座席に座ることを考える.



このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 8 人の座席の座り方は何通りあるか.

(2) A 列に子供が座り, 親は自身の子供の後ろに座る. このような並び方は何通りあるか.

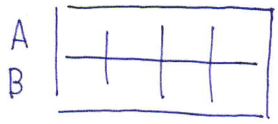
(3) 親子が隣同士に座るような並び方は何通りあるか. ただし, ここでいう隣同士とは, 同じ列で隣接番号に座ることである.

(4) どの親子も隣同士にならないような座り方は何通りあるか.

(1) 各席に1人ずつ、8人が座る.

$8!$ 通り

(2)

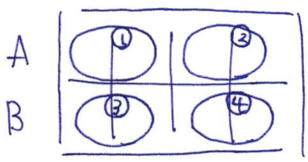


まず, 子ども4人をA列に入れる. … $4!$ 通り.

子どもが決まれば, 親は子の並びに対し1通り.

∴ $4! = 24$ (通り)

(3)



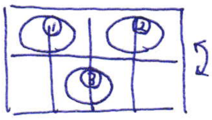
①～④にどの親子を入れるか. … $4!$ 通り.

①～④ 各々に親子の入れ替わり. 2^4 通り.

∴ $4! \times 2^4$ (通り)

(4) 親子が隣同士になるものを考える.

(i) 3組のみ隣同士.

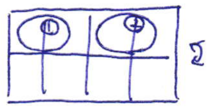


- 隣り合う親子を選ぶ $_4C_3 = 4$.
- 3ペアの入れ方 $3! = 6$
- 各々の親子の入れ替わり 2^3
- 隣り合わない親子の並び 2.
- 上下の反転 2

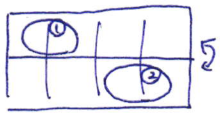
∴ 3組のみ隣同士 … $4 \cdot 6 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 2$

$= 2^8 \cdot 3$ 通り.

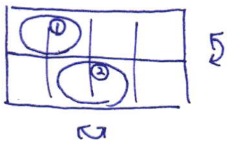
(ii) 2組のみ隣同士.



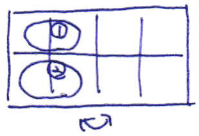
$_4C_2 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot$
$4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \times 2$
$= 2^9 \cdot 3$ 通り.



$_4C_2 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot$
$4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \times 2$
$= 2^9 \cdot 3$ 通り



$_4C_2 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot$
$4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \times 4$.
$= 2^{10} \cdot 3$ 通り.

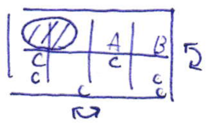


$_4C_2 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot$
$4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \times 2$
$= 2^9 \cdot 3$ 通り.

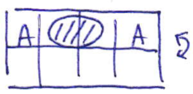
∴ 2組のみ隣同士

$2^9 \cdot 3 \times 3 + 2^{10} \cdot 3 = 2^9 \cdot (9+6)$
$= 2^9 \cdot 15$ 通り.

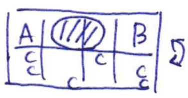
(iii) 1組のみ隣同士.



$_4C_1 \cdot 2 \cdot$
$6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1. \times 4$
$= 2^{10} \cdot 9$ 通り.



$_4C_1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 1.$
$4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \times 2$
$= 2^9 \cdot 3$ 通り.



$_4C_1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot$
$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \times 2$
$= 2^9 \cdot 9$ 通り.

∴ 1組のみ隣同士

$2^{10} \cdot 9 + 2^9 \cdot 3 + 2^9 \cdot 9 = 2^9 \cdot (18+3+9)$
$= 2^{10} \cdot 15$ 通り.

(3), (i)～(iii) より, 隣あう親子のいるものは

$4! \cdot 2^4 + 2^8 \cdot 3 + 2^9 \cdot 15 + 2^{10} \cdot 15$

$= 2^7 \cdot 3 + 2^7 \cdot 6 + 2^7 \cdot 60 + 2^7 \cdot 120$

$= 2^7 \cdot (3+6+60+120) = 2^7 \cdot 189.$

∴ 隣あう親子のいない並びは $8! - 2^7 \cdot 189$ (通り)

$(= 16128)$

7.2 問題

1 のカードが 1 枚, 2 のカードが 2 枚, 3 のカードが 3 枚, 4 のカードが 4 枚の計 10 枚の中から, 同時に 3 枚引く. このとき, 引いたカードの最大値を M, 最小値を m とし, $X = M - m$ とする.

(1) 3 枚全てが 4 のカードである確率を求めよ.

(2) $X = 0$ となる確率を求めよ.

(3) X についての確率分布表を作れ.

(4) 同時に 3 枚引く操作に対し, X の値が気に入らなかった場合もう一度だけやり直すことができる. このとき, X の期待値を最大にするには, X の値がどのようなときにやり直せば良いか.

10枚から3枚引くので　全体… ${}_{10}C_3 = \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}$

$= 120$ 通り.

(1). 3枚全て4.

… 4枚から3枚引く. ${}_4C_3 = 4$.

$\therefore P = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

(2) $X=0$ となるのは, 3枚とも同じ数を引く.

i) 3枚全て4

… (1)より $\frac{4}{120}$

ii) 3枚全て3.

… 3枚から3枚引く　1通り　$\therefore \frac{1}{120}$

$\therefore P(X=0) = \frac{4}{120} + \frac{1}{120}$

$= \frac{5}{120}$

(3) i) $X=1$ となるのは,

- 2, 2, 1 …… ${}_2C_2 \times {}_1C_1 = 1$ 通り
- 3, 2, 2 … $3\times1 = 3$ 通り
- 3, 3, 2 … ${}_3C_2 \times {}_2C_1 = 6$ 通り
- 4, 3, 3 … ${}_4C_1 \times {}_3C_2 = 12$ 通り
- 4, 4, 3 … ${}_4C_2 \times {}_3C_1 = 18$ 通り.

計. 40通り.

$\therefore P(X=1) = \frac{40}{120}$

ii) $X=3$ となるのは,

4, 4, 1 のみ.

${}_4C_2 \times 1 = 6$

$\therefore P(X=3) = \frac{6}{120}$

iii) $X=2$ となるのは,

全体から. $X=0,1,3$ の分を除く.

$120 - (5+40+6) = 69$.

$\therefore P(X=2) = \frac{69}{120}$

よって確率分布は

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{5}{120}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{69}{120}$	$\frac{6}{120}$	1.

(4) i) やり直さない場合の期待値.

$E = \frac{5}{120}\cdot0 + \frac{40}{120}\cdot1 + \frac{69}{120}\cdot2 + \frac{6}{120}\cdot3$

$= \frac{1}{120}\cdot(40+138+18) = \frac{196}{120}$

ii) $X=0$ のときのみ やり直す場合.

X	$\boxed{0}$	1	2	3	計
P	$\boxed{\frac{5}{120}}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{69}{120}$	$\frac{6}{120}$	1

(改)

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{5}{120}\cdot\frac{5}{120}$	$\frac{5}{120}\cdot\frac{40}{120}$	$\frac{5}{120}\cdot\frac{69}{120}$	$\frac{5}{120}\cdot\frac{6}{120}$	$\frac{5}{120}$

$E = \frac{40}{120}\cdot1 + \frac{69}{120}\cdot2 + \frac{6}{120}\cdot3$

$+ \frac{5}{120}\cdot\frac{40}{120}\cdot1 + \frac{5}{120}\cdot\frac{69}{120}\cdot2 + \frac{5}{120}\cdot\frac{6}{120}\cdot3$

$= \frac{40}{120}\cdot\frac{125}{120} + \frac{69}{120}\cdot\frac{125}{120}\cdot2 + \frac{6}{120}\cdot\frac{125}{120}\cdot3$

$= \frac{1}{120}\cdot\frac{125}{120}\cdot(40+138+18) = \frac{196}{120}\times\frac{125}{120} = \frac{225}{120}$

iii) $X=0$, $X=1$ のとき やり直す場合.

X	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	2	3	計
P	$\boxed{\frac{5}{120}}$	$\boxed{\frac{40}{120}}$	$\frac{69}{120}$	$\frac{6}{120}$	1.

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{45}{120}\cdot\frac{5}{120}$	$\frac{45}{120}\cdot\frac{40}{120}$	$\frac{45}{120}\cdot\frac{69}{120}$	$\frac{45}{120}\cdot\frac{6}{120}$	$\frac{45}{120}$

$E = \frac{69}{120}\cdot2 + \frac{6}{120}\cdot3 + \frac{45}{120}\cdot\frac{40}{120} + \frac{45}{120}\cdot\frac{69}{120}\cdot2 + \frac{45}{120}\cdot\frac{6}{120}\cdot3$

$= \frac{45}{120}\cdot\frac{40}{120} + \frac{69}{120}\cdot\frac{165}{120}\cdot2 + \frac{6}{120}\cdot\frac{165}{120}\cdot3$

$= \frac{15\cdot3}{120}\cdot\frac{40}{120} + \frac{3\cdot23}{120}\cdot\frac{15\cdot11}{120}\cdot2 + \frac{6}{120}\cdot\frac{15\cdot11}{120}\cdot3$

$= \frac{15\cdot3\cdot2}{120\cdot120}(20 + 23\cdot11 + 3\cdot33)$

$= \frac{90}{120\cdot120}\cdot372 = \frac{279}{120}$

うらへ.

(iv) $X=0, X=1, X=2$ のとき やり直す場合.

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{5}{120}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{69}{120}$	$\frac{6}{120}$	1

$\Big\downarrow$ 2回

0	1	2	3	計
$\frac{114}{120}\cdot\frac{5}{120}$	$\frac{114}{120}\cdot\frac{40}{120}$	$\frac{114}{120}\cdot\frac{69}{120}$	$\frac{114}{120}\cdot\frac{6}{120}$	1

期待値は

$$E = \frac{114}{120}\cdot\frac{40}{120}\cdot 1 + \frac{114}{120}\cdot\frac{69}{120}\cdot 2 + \frac{114}{120}\cdot\frac{6}{120}\cdot 3 + \frac{6}{120}\cdot 3$$

$$= \frac{114}{120}\cdot\frac{40}{120} + \frac{114}{120}\cdot\frac{2\cdot 69}{120} + \frac{234}{120}\cdot\frac{6\cdot 3}{120}$$

$$= \frac{3\cdot 2\cdot 17\cdot(40+138) + 9\cdot 2\cdot 13\cdot 6\cdot 3}{120\cdot 120}$$

$$= \frac{2\cdot 3\cdot 17\cdot 2\cdot 89 + 2\cdot 3\cdot 9\cdot 13\cdot 6}{120\cdot 120}$$

$$= \frac{\cancel{4\cdot 3}\cdot(17\cdot 89 + 3\cdot 9\cdot 13)}{\underset{10}{\cancel{120}}\cdot 120}$$

$$= \frac{1864}{1200} = \frac{186.4}{120}$$

i.e. $X=2$ のときもやり直すと、期待値 Down.

$X=0, 1$ のとき やり直すのがよい。 //

7.6 問題

原点を始点として数直線上を動く点 P がある．サイコロを 1 回投げ，動き方を以下の通り決める．

- 3 の倍数が出た場合，+2
- それ以外の場合，−1

(1) 3 回繰り返す場合，点 P が原点にいる確率を求めよ．

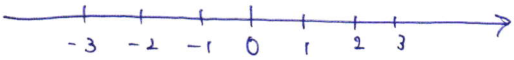
(2) 3 回繰り返した後の点 P の座標の期待値を求めよ．

(3) 6 回繰り返した後の点 P の座標の期待値を求めよ．

(4) 動き方を以下の通りに変更する．
- 1 が出た場合，+3
- 3 の倍数が出た場合，±0
- それ以外の場合，−1

このとき，6 回繰り返した後の期待値を求めよ．

3の倍 +2
以外 −1.



1回の試行で 3の倍数… $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

それ以外… $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(1) 3回後に点Pが原点にいるには，

+2 が1回，−1が2回．

$\boxed{+2}$ $\boxed{-1}$ $\boxed{-1}$

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times {}_3C_1=\frac{4}{9}$ //

(2) 3回後の点Pのとり得る座標は

+2	−1	座標	確率
0	3	−3	$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$
1	2	0	$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot{}_3C_1=\frac{12}{27}$
2	1	3	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{2}{3}\cdot{}_3C_1=\frac{6}{27}$
3	0	6	$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

上の表より．期待値は

$$E=\frac{8}{27}\cdot(-3)+\frac{12}{27}\cdot 0+\frac{6}{27}\cdot 3+\frac{1}{27}\cdot 6$$

$$=\frac{1}{27}(-24+0+18+6)$$

$$=0$$ //

(3) サイコロ1回投げたときの点Pの移動座標の期待値は

$$\frac{2}{6}\times 2+\frac{4}{6}\times(-1)=0$$

∴ 6回後は．

$$E=0\times 6=0$$ //

(4) 1回の試行において，点Pの座標の期待値は

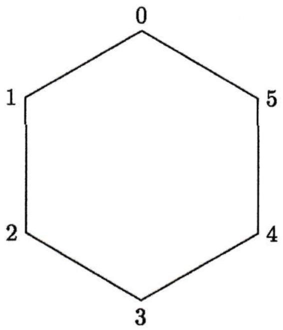
$$\frac{1}{6}\times 3+\frac{2}{6}\times 0+\frac{3}{6}\times(-1)=0$$

∴ 6回後は

$$E=0\times 6=0$$ //

7.7 問題

0 を始点として, 下のような正六角形の周上を動く点 P がある.



サイコロを投げて動き方を以下の通り決め, 操作終了後の点 P の位置を得点とする.

- 3 の倍数が出た場合, 反時計まわりに +2
- それ以外の場合, 反時計まわりに +1

(1) 3 回の操作後に, 得点が 0 である確率を求めよ.

(2) 3 回の操作後に, 得点が 4 以上である確率を求めよ.

(3) 3 回の操作後の得点の期待値を求めよ.

(4) 3 回の操作を行う. 1 回の操作ごとに得点を記録し, それを X_1, X_2, X_3 とする. $S = X_1 + X_2 + X_3$ とするとき, S の期待値を求めよ.

(1) 3回後に 0にいるには,

(+2) が 3回.

i.e. 3の倍数が 3回 出る.

$$\therefore P = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

(2) 4点 or 5点のいずれか.

(i) 得点が 4点の場合.

(+2) が 1回, (+1) が 2回.

i.e. 3の倍数 …… 1回.

それ以外 … 2回.

$$\therefore P = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times {}_3C_1 = \frac{4}{9}$$

(ii) 5点の場合.

(+2) が 2回, (+1) が 1回.

i.e. 3の倍数 2回

それ以外 1回.

$$\therefore P = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right) \times {}_3C_2 = \frac{2}{9}$$

(i), (ii) より

$$P = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

(3) 3回の操作後. 1, 2 の場所には P は存在しない.

3点の場合.

3の倍数以外が 3回

$$\therefore P = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

これまでの結果から.

$$E = 0 \times \frac{1}{27} + 3 \times \frac{8}{27} + 4 \times \frac{12}{27} + 5 \times \frac{6}{27}$$

$$= \frac{1}{27}(24 + 48 + 30)$$

$$= \frac{102}{27} = \frac{34}{9}$$

(4)

X_1	X_2	X_3	確率	S
1	2	3	$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$	6
	2	4	$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$	7
	3	4	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$	8
	3	5	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$	9
2	3	4	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$	9
	3	5	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$	10
	4	5	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$	11
	4	0	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$	6

上の表より

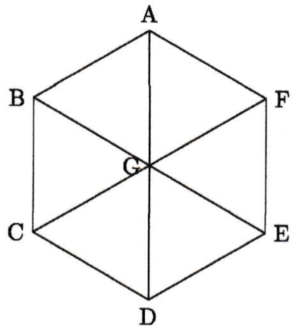
$$E = \frac{1}{27}(48 + 28 + 32 + 18 + 36 + 20 + 22 + 6)$$

$$= \frac{1}{27} \times 210$$

$$= \frac{70}{9}$$

7.8 問題

図のような正六角形 ABCDEF において，点 G を向かい合う対角線の交点とする．この 7 点のうち，3 点を無作為に選んでできる図形について考える．



以下の問いに答えよ．

(1) 三角形ができない確率を求めよ．

(2) 1 辺が 1 の正三角形ができる確率を求めよ．

(3) 直角三角形ができる確率を求めよ．

(4) できる図形の面積の期待値を求めよ．ただし，三角形ができなかった場合の面積は 0 とする．

(1) 直線になった場合のみ、三角形ができない。

このような3点の選び方は

A-G-D, B-G-E, C-G-F

の 3とおり。

また、全体は $_7C_3 = 35$ とおり。

$\therefore P = \dfrac{3}{35}$ //

(2) 1辺が1の正三角形は、

・A-G-B

・B-G-C

⋮

・F-G-A　　の 6とおり

$\therefore P = \dfrac{6}{35}$ //

(3) 直角三角形は

A-D — B, C, E, F　　4とおり

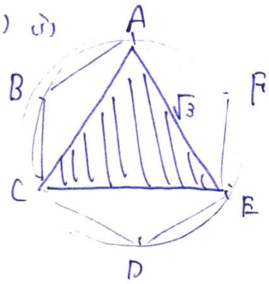
B-E　　4とおり

C-F　　4とおり

$\therefore 4 \times 3 = 12$ とおり。

$\therefore P = \dfrac{12}{35}$ //

(4) i)



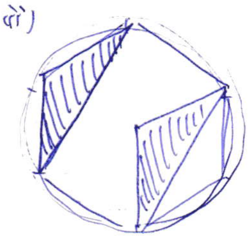
1辺が$\sqrt{3}$の正三角形は、2とおり。

面積は $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ$

$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$

確率は $\frac{2}{35}$

ii)



二等辺三角形ができる場合。

12とおり。

面積は $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 120^\circ$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

確率は $\frac{12}{35}$

また、1辺が1の正三角形の面積は

$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

直角三角形は

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

よって期待値は

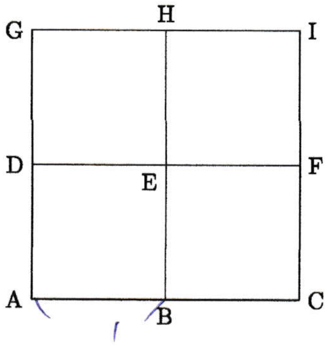
$$E = \frac{3}{35}\cdot 0 + \frac{6}{35}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{12}{35}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{35}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{12}{35}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{1}{35\cdot 4}(6\sqrt{3} + 24\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 12\sqrt{3})$$

$$= \frac{48\sqrt{3}}{35\cdot 4} = \frac{12}{35}\sqrt{3}$$ //

7.9　問題

以下のような図形において, 3 点を無作為に選んでできる図形について考える.



以下の問いに答えよ.

(1) 三角形ができない確率を求めよ.

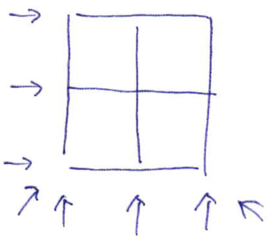
(2) 面積が 1 の三角形ができる確率を求めよ.

(3) 面積が 2 の三角形ができる確率を求めよ.

(4) できる図形の面積の期待値を求めよ. ただし, 三角形ができなかった場合の面積は 0 とする.

計9点のうち、3点の選び方は $_9C_3 = \frac{\cancel{9}^{3}\cdot\cancel{8}^{4}\cdot 7}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}$

(1) 三角形ができない3点の選び方は.

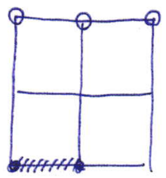


左図の8通り.

$\therefore P = \frac{8}{3\cdot4\cdot7} = \frac{2}{21}$ //

(2) 面積1になるのは.

(i)

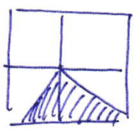


黒2点＋白1点 → 3通り.

これが、8コ分

$3\times8=24$.

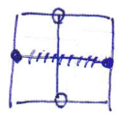
(ii)



左図のように、中心の点を使うもの

4通り.

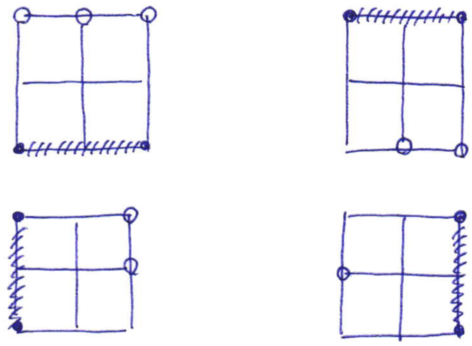
(iii)



左図のように、大きい正方形上に辺をもたないもの　4通り.

$\therefore P = \frac{32}{3\cdot4\cdot7} = \frac{8}{21}$ //

(3)



計8通り.

$\therefore P = \frac{8}{3\cdot4\cdot7} = \frac{2}{21}$ //

(4) (i) 面積$\frac{1}{2}$.

A ─ B ─ D, E, F
A ─ D ─ E, H
A ─ E ─ F, H

B ─ C ─ D, E, F
B ─ D ─ E, G
B ─ E ─ F, G, I
B ─ F ─ I

C ─ D ─ E
C ─ E ─ F, H
C ─ F ─ H

D ─ E ─ G, H, I
D ─ G ─ H
D ─ H ─ I

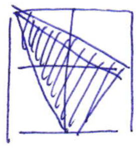
E ─ F ─ G, H, I
E ─ G ─ H
E ─ H ─ I

F ─ G ─ H
F ─ H ─ I

32通り

$P = \frac{32}{3\cdot4\cdot7} = \frac{8}{21}$

(ii) 面積 $\frac{3}{2}$



4通り

$P = \frac{4}{3\cdot4\cdot7} = \frac{1}{21}$

表をつくると

面積	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	計
確り	$\frac{2}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	1

$E = \frac{1}{21}\left(\frac{1}{2}\cdot8 + 1\cdot8 + \frac{3}{2}\cdot1 + 2\cdot2\right)$

$= \frac{1}{21}\left(4+8+\frac{3}{2}+4\right)$

$= \frac{1}{\cancel{21}_{3}}\cdot\frac{\cancel{35}^{5}}{2} = \frac{5}{6}$ //

7.10　問題

「1 段ずつ」「1 段飛ばし」のいずれかで階段を登る．以下の問いに答えよ．

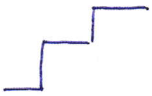
(1) 2 段, 3 段, 4 段の登り方はそれぞれ何通りか．

(2) 15 段を登る方法は何通りあるか．

(3) 連続して「1 段飛ばし」は選択できないとする．このとき 15 段を登る方法は何通りあるか．

(4) 登り方として「2 段飛ばし」を追加する．このとき 15 段を登る方法は何通りあるか．

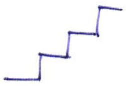
(1) 2段



1 + 1
2

2通り

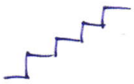
3段



1 + 1 + 1
1 + 2
2 + 1

3 通り

4段



1 + 1 + 1 + 1
1 + 1 + 2
1 + 2 + 1
2 + 1 + 1
2 + 2

5 通り

(2) 15段登る方法は

1段 +1	1段とばし +2	通り
15	0	1
13	1	$_{14}C_1 = 14$
11	2	$_{13}C_2 = \frac{13 \cdot 12}{2 \cdot 1} = 78$
9	3	$_{12}C_3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$
7	4	$_{11}C_4 = \frac{11 \cdot 10 \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 330$
5	5	$_{10}C_5 = \frac{\cancel{10} \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6}^2}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 252$
3	6	$_9C_3 = \frac{\cancel{9}^3 \cdot \cancel{8}^4 \cdot 7}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 84$
1	7	$_8C_1 = 8$

∴ 987 通り

(3)
(2)のうち，(15, 0)，(13, 1) の組みあわせは
すべてok． → 15通り．
また，(3, 6)，(1, 7) の組みあわせは どちらも
1段飛ばしが続くのでNG．

∘ (11, 2) の組．

12コの ∧ のうち 2ヶ所 に 1段飛ばし．

$$_{12}C_2 = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66.$$

∘ (9, 3) の組．

10コのうち，3ヶ所に 1段飛ばし．

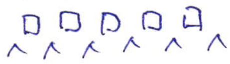
$$_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

∘ (7, 4) の組．

8コのうち，4ヶ所に 1段飛ばし．

$$_8C_4 = \frac{\cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6}^2 \cdot 5}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 70$$

∘ (5, 5) の組．



6コのうち，5ヶ所に 1段飛ばし

6 通り．

∴ 15 + 66 + 120 + 70 + 6 = 277 通り

(4) 2段飛ばし 0のパターンは (2) の場合．
1コ以上のパターンは．

2段 +3	1段とばし +2	1段 +1		
1	0	12	→ 13	2285
	1	10	→ 12・11 = 132	
	2	8	→ $11 \cdot {}_{10}C_2 = 495$	
	3	6	→ $10 \cdot {}_9C_3 = 840$	
	4	4	→ $9 \cdot {}_8C_4 = 630$	
	5	2	→ $8 \cdot {}_7C_2 = 168$	
	6	0	→ 7.	
2	0	9	→ $_{11}C_2 = 55$	3325
	1	7	→ $_{11}C_2 \cdot 8 = 440$	
	2	5	→ $_{11}C_2 \cdot {}_7C_2 = 1155$	
	3	3	→ $_{11}C_2 \cdot {}_6C_3 = 1100$	
	4	1	→ $_{11}C_2 \cdot {}_5C_1 = 575$	
3	0	6	→ $_9C_3 = 84$	1092
	1	4	→ $_9C_3 \cdot {}_5C_1 = 420$	
	2	2	→ $_9C_3 \cdot {}_4C_2 = 504$	
	3	0	→ $_9C_3 = 84$.	
4	0	3	→ $_7C_3 = 35$	105
	1	1	→ $_7C_3 \cdot 2 = 70$	
5	0	0	→ 1	1

∴ 6808 通り