1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

1 復習

1.1 問題 1

以下の式を展開せよ.

(1) $(x+1)^3$

$= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3$

$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

(2) $(x-2)^3$

$= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (-2) + 3 \cdot x \cdot (-2)^2 + (-2)^3$

$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

(3) $(2x+3y)^3$

$= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot (2x)(3y)^2 + (3y)^3$

$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

(4) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$= x^3 + y^3$

(5) $(x-2)(x^2+2x+4)$

$= x^3 - 8$

(6) $(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

$= 27x^3 + 8y^3$

1.2 問題 2

以下の式を因数分解せよ．

(1) $x^3 - 1$

$= (x-1)(x^2+x+1)$

(2) $x^3 + 8$

$= (x+2)(x^2-2x+4)$

(3) $125x^3 - 27y^3$

$= (5x-3y)(25x^2+15xy+9y^2)$

(4) $x^6 - y^6$

$= (x^3)^2 - (y^3)^2$

$= (x^3-y^3)(x^3+y^3)$

$= (x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)$

(5) $x^6 - 64$

$= x^6 - 2^6$

$= (x^3)^2 - (2^3)^2$

$= (x^3-2^3)(x^3+2^3)$

$= (x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4)$

(6) $x^6 + 7x^3 - 8$ 　　$A = x^3$ とおく．

$= A^2 + 7A - 8$

$= (A-1)(A+8)$

$= (x^3-1)(x^3+8)$

$= (x-1)(x^2+x+1)(x+2)(x^2-2x+4)$

2 二項定理

2.1 復習

展開せよ.

(1) $(x+y)^5$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\ 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \end{array}$$

$= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

(2) $(x+2y)^4$

$= 1\cdot x^4 + 4(x)^3\cdot(2y)^1 + 6(x)^2\cdot(2y)^2$
$+ 4(x)\cdot(2y)^3 + (2y)^4$

$= x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$

(3) $(2x+3)^6$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\ 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \\ 1\ 6\ 15\ 20\ 15\ 6\ 1 \end{array}$$

$= (2x)^6 + 6\cdot(2x)^5\cdot 3$
$+ 15(2x)^4\cdot 3^2 + 20\cdot(2x)^3\cdot 3^3 + 15\cdot(2x)^2\cdot 3^4$
$+ 6(2x)\cdot 3^5 + 3^6$

$= 64x^6 + 576x^5 + 2160x^4$
$+ 4320x^3 + 4860x^2 + 2916x + 729$

2.2 二項定理

$(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$

xy^4	x	y	y	y	y
	y	x	y	y	y
			$\vdots$		

${}_5C_4 = 5$

xy^4の係数 $\cdots {}_5C_4 = 5$

同様にして…

$$\boxed{(x+y)^5 = {}_5C_5\cdot x^5 + {}_5C_4\cdot x^4y + {}_5C_3\cdot x^3y^2 + {}_5C_2\cdot x^2y^3 + {}_5C_1\cdot xy^4 + {}_5C_0\, y^5}$$

二項定理

xy^3の係数

x は $2y$ 3 つ

${}_4C_1 \times x \times (2y)^3 = 4\times x\times 8y^3$
$= 32xy^3$

2.3 **問題**

以下の展開式において, [ ] 内に指定された項の係数を求めよ.

(1) $(2x+3y)^5$ $[x^3y^2]$

5コの( )から. 2xを3コ. 3yを2コ.

i.e.

$$_5C_2 \cdot (2x)^3 \cdot (3y)^2$$

$$= 10 \times 8x^3 \times 9y^2$$

$$= 720x^3y^2$$

720 //

(2) $(2x-y)^7$ $[x^5y^2]$

7コの( )の中から, 2xを5コ. −yを2コ

i.e.

$$_7C_2 \times (2x)^5 \cdot (-y)^2$$

$$= \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} \times 32x^5 \times y^2$$

$$= 21 \times 32 \times x^5y^2$$

672 //

(3) $(3x-2y)^8$ $[x^4y^4]$

8コの( )の中から, 3xを4コ. (−2y)を4コ.

i.e.

$$_8C_4 \times (3x)^4 \times (-2y)^4$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} \cdot 81x^4 \cdot 16y^4$$

$$= 10\cdot 7\cdot 81\cdot 16\ x^4y^4$$

$$= 90720\ x^4y^4$$

90720 //

(4) $(5x+3y)^9$ $[x^3y^6]$

2.4 **問題**

以下の展開式において, [ ] 内に指定された項の係数を求めよ.

(1) $(a+b+c)^4$ $[a^2bc]$

4コの( )から. a2コ. b1コ. C1コ.

$$_4C_2 \times {}_2C_1 = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} \times 2 = 12$$

∴ a^2bcの係数は

12 //

(2) $(a+b+c)^6$ $[a^3b^2c]$

6コの( )から. a3コ. b2コ. C1コ.

$$_6C_3 \times {}_3C_2 \times 1 = \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4}{\cancel{3\cdot 2}\cdot 1} \times 3 = 60.$$

∴ a^3b^2c の係数は 60 //

(3) $(a+3b+2c)^7$ $[a^3b^2c^2]$

7コの中から. a3コ. b2コ. C2コ

$$_7C_3 \times {}_4C_2 = \frac{7\cdot \cancel{6}\cdot 5}{\cancel{3\cdot 2}\cdot 1} \times \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cdot 3}{\cancel{2}\cdot 1}$$

$$= 210$$

$$\therefore\ 210 \times a^3 \times (3b)^2 \times (2c)^2$$

$$= 210 \times a^3 \times 9b^2 \times 4c^2$$

$$= 840 \times 9\ a^3b^2c^2$$

$$= 7560\ a^3b^2c^2$$

∴ $a^3b^2c^2$の係数は

7560 //

3 多項式の割り算

$$13 \overline{)1234} \quad \text{商 } 94,\ 117,\ 64,\ 52,\ 12$$

3.1 割り算って…

1234 を 13 で割ったとき

商　94

余り　12

これを, 等式で表すと以下のようになる.

$$1234 = 13 \times 94 + 12.$$

<u>多項式でできないか</u>

多項式

$$x^2 + 4x + 7$$

を, $x + 2$ で割る.

$$x+2 \overline{) x^2 + 4x + 7} \quad \text{商 } x+2$$
$$x^2 + 2x$$
$$2x + 7$$
$$2x + 4$$
$$3$$

商… $x+2$

余り… 3

等式で表すと…

$\to x^2+4x+7 = (x+2)\cdot(x+2) + 3$.

3.2 練習問題 1

以下の多項式 A, B について, A を B で割ったときの商と余りを求めよ.

(1) $A = x^3 + 4x^2 + 5, \quad B = x + 1$

$$x+1 \overline{) x^3 + 4x^2 + 0x + 5} \quad \text{商 } x^2 + 3x - 3$$
$$x^3 + x^2$$
$$3x^2 + 0x$$
$$3x^2 + 3x$$
$$-3x + 5$$
$$-3x - 3$$
$$8$$

商 : $x^2 + 3x - 3$

余 : 8

(2) $A = 3x^3 + 9x^2 - 3x + 10, \quad B = x - 2$

$$x-2 \overline{) 3x^3 + 9x^2 - 3x + 10} \quad \text{商 } 3x^2 + 15x + 27$$
$$3x^3 - 6x^2$$
$$15x^2 - 3x$$
$$15x^2 - 30x$$
$$27x + 10$$
$$27x - 54$$
$$64$$

商 : $3x^2 + 15x + 27$

余 : 64

(3) $A = x^3 - 7x + 6, \quad B = x^2 + 2x - 3$

$$x^2+2x-3 \overline{) x^3 + 0x^2 - 7x + 6} \quad \text{商 } x - 2$$
$$x^3 + 2x^2 - 3x$$
$$-2x^2 - 4x + 6$$
$$-2x^2 - 4x + 6$$
$$0$$

商 : $x - 2$

余 : 0

3.3 練習問題 2

(1) 多項式 x^3+2x-1 を多項式 B で割ると, 商が $x+2$, 余りが $6x-1$ であるという. B を求めよ.

〈Ans〉.

$x^3+2x-1 = B\times(x+2)+(6x-1)$.

式変形して

$x^3-4x = B(x+2)$

i.e. x^3-4x は. $x+2$ で割り切れ, 商は B.

$$
\begin{array}{r}
x^2-2x \\
x+2\,\big)\,x^3+0x^2-4x \\
x^3+2x^2 \\
\hline
-2x^2-4x \\
-2x^2-4x \\
\hline
0
\end{array}
$$

左より. 商は x^2-2x

∴ $B=x^2-2x$ //

(2) 多項式 x^3+4x^2+4x-2 を多項式 B で割ると, 商が $x+3$, 余りが $2x+1$ であるという. B を求めよ.

〈Ans〉.

$x^3+4x^2+4x-2 = B\times(x+3)+2x+1$.

$x^3+4x^2+2x-3 = B\cdot(x+3)$

∴ x^3+4x^2+2x-3 は. $x+3$ で割り切れ, 商が B.

$$
\begin{array}{r}
x^2+x-1 \\
x+3\,\big)\,x^3+4x^2+2x-3 \\
x^3+3x^2 \\
\hline
x^2+2x \\
x^2+3x \\
\hline
-x-3 \\
-x-3 \\
\hline
0
\end{array}
$$

左より.

商は x^2+x-1

∴ $B=x^2+x-1$ //

(3) $A=4x^2+11ax+2a^2, B=x+2a$ を, x についての多項式とみなして, A を B で割ったときの商と余りを求めよ.

〈Ans〉.

$$
\begin{array}{r}
4x+3a \\
x+2a\,\big)\,4x^2+11ax+2a^2 \\
4x^2+8ax \\
\hline
3ax+2a^2 \\
3ax^2+6a^2 \\
\hline
-4a^2
\end{array}
$$

商: $4x+3a$

余: $-4a^2$ //

(4) x^3 を $(x-a)^2$ で割った余りを求めよ.

〈Ans〉

$(x-a)^2 = x^2-2ax+a^2$

$$
\begin{array}{r}
x+2a \\
x^2-2ax+a^2\,\big)\,x^3+0x^2+0x+0 \\
x^3-2ax^2+a^2x \\
\hline
2ax^2-a^2x \\
2ax^2-4a^2x+2a^3 \\
\hline
3a^2x-2a^3
\end{array}
$$

商: $x+2a$

余り: $3a^2x-2a^3$ //

4　分数式

定義

以下のように，$\dfrac{\text{多項式}}{\text{文字を含む多項式}}$ の形で表されるものを，分数式という．

$$\frac{2}{x-1},\quad \frac{2x-1}{x^2+1},\cdots$$

注）与えられた分数式の分母は 0 ではない．
また，それ以上約分できない分数式を，既約分数式という．

<u>例題</u>
以下の分数式を，既約分数式にせよ．

(1) $\dfrac{\cancel{2}a^{\cancel{2}}\cancel{b}}{\cancel{4}\cancel{a}b^{\cancel{3}}}$

$= \dfrac{a}{2b^2}$ //

(2) $\dfrac{\cancel{(x+1)}(x+2)}{\cancel{(x+1)}(x+3)}$

$= \dfrac{x+2}{x+3}$ //

(3) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$

$= \dfrac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} = \dfrac{x+3}{x+2}$ //

4.1　例題

計算せよ．

(1) $\dfrac{x+1}{\cancel{x+2}} \times \dfrac{\cancel{x+2}}{x+3}$

$= \dfrac{x+1}{x+3}$ //

(2) $\dfrac{x+1}{x+3} \div \dfrac{x+4}{x+3}$

$= \dfrac{x+1}{\cancel{x+3}} \times \dfrac{\cancel{x+3}}{x+4}$

$= \dfrac{x+1}{x+4}$ //

(3) $\dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+4}{x+2}$

$= \dfrac{x+1+x+4}{x+2}$

$= \dfrac{2x+5}{x+2}$ //

(4) $\dfrac{2x+1}{x+2} - \dfrac{x+4}{x+2}$

$= \dfrac{2x+1-(x+4)}{x+2}$

$= \dfrac{x-3}{x+2}$ //

(5) $\dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+4}{x+1}$

$= \dfrac{(x+1)(x+1)+(x+4)(x+2)}{(x+1)(x+2)}$

$= \dfrac{x^2+2x+1+x^2+6x+8}{(x+1)(x+2)}$

$= \dfrac{2x^2+8x+9}{(x+1)(x+2)}$ //

4.2　問題

(1) $\dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}$ を簡単にせよ.

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{3}+\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cancel{3}}}{\frac{4}{\cancel{3}}} = \frac{1}{4}$$ //

(2) $\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$ を簡単にせよ.

$$= \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{\frac{x+1}{\cancel{x}}} = \frac{1}{x+1}$$ //

(3) $\dfrac{\frac{1}{x-1}}{1+\frac{1}{x-1}}$ を簡単にせよ.

$$= \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cancel{x-1}}}{\frac{x}{\cancel{x-1}}} = \frac{1}{x}$$ //

(4) $\dfrac{\frac{1}{x+1}}{1+\frac{1}{x-1}}$ を簡単にせよ.

$$= \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x-1}}$$

$$= \frac{1}{x+1} \div \frac{x}{x-1}$$

$$= \frac{1}{x+1} \times \frac{x-1}{x}$$

$$= \frac{x-1}{x(x+1)}$$ //

(5) $A = \dfrac{1}{x}+1, B = \dfrac{1}{x}-x$ のとき, $\dfrac{A}{B}$ を簡単にせよ.

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-x}$$

$$= \frac{\frac{1+x}{\cancel{x}}}{\frac{1-x^2}{\cancel{x}}}$$

$$= \frac{1+x}{1-x^2}$$

$$= \frac{\cancel{1+x}}{(1-x)(\cancel{1+x})}$$

$$= \frac{1}{1-x}$$ //

5 恒等式

定義

以下のように, 文字を含む等式においてその両辺の値が存在する限り, 文字にどのような値を代入しても成立する等式を恒等式という.

$$(x+1)(x+2) = x^2+3x+2, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

以下のような式は恒等式ではない.

$$(x+1)(x+2) = 0, \quad x(x+1) = x+1$$

<u>例題</u>

恒等式になるように, 右辺を与えよ.

(1) $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2$

(2) $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

(3) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}$

(4) $\dfrac{2}{x(x+2)} = \dfrac{2}{x^2+2x}$

5.1 練習

以下の等式が x についての恒等式になるように, 定数 a, b, c の値を定めよ.

(1) $x^2-1 = a(x+1)^2+b(x+1)+c$

(右辺) $= a(x^2+2x+1)+b(x+1)+c$

$= ax^2+2ax+a+bx+b+c$

$= ax^2+(2a+b)x+a+b+c$

恒等式なので, 係数比較して,

$$\begin{cases} a=1. \\ 2a+b=0 \\ a+b+c=-1 \end{cases}$$

$\therefore a=1, b=-2, c=0$ //

(2) $\dfrac{x+4}{x(x+2)} = \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+2}$

(右辺) $= \dfrac{a(x+2)+bx}{x(x+2)}$

$= \dfrac{(a+b)x+2a}{x(x+2)}$

恒等式なので, 係数比較して,

$$\begin{cases} a+b=1. \\ 2a=4 \end{cases}$$

$\therefore a=2, b=-1$ //

6　等式の証明

6.1　問題 1

以下の等式を示せ.

(1) $a^3 - b^3 = (a-b)^3 - 3ab(-a+b)$

〈証明〉.

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= (a-b)^3 - 3ab(-a+b)\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\\ &\quad + 3a^2b - 3ab^2\\ &= a^3 - b^3 = (\text{左辺}).\end{aligned}$$

$\therefore\ a^3 - b^3 = (a-b)^3 - 3ab(-a+b)$ は成立 □

(2) $(ab+1)^2 + (a-b)^2 = (a^2+1)(b^2+1)$

〈証明〉.

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= (ab+1)^2 + (a-b)^2\\ &= a^2b^2 + 2ab + 1 + a^2 - 2ab + b^2\\ &= a^2b^2 + 1 + a^2 + b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= (a^2+1)(b^2+1)\\ &= a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1.\end{aligned}$$

よって (右辺) = (左辺)

i.e.

$(ab+1)^2 + (a-b)^2 = (a^2+1)(b^2+1)$ は成立 □

6.2　問題 2

$a+b+c=0$ のとき, 以下の等式を示せ.

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

〈証明〉.

$a+b+c=0$ より.　$c = -(a+b)$.

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= a^3 + b^3 + c^3\\ &= a^3 + b^3 + (-(a+b))^3\\ &= a^3 + b^3 - (a+b)^3\\ &= a^3 + b^3 - (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)\\ &= -3a^2b - 3ab^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= 3abc\\ &= 3ab \times (-(a+b))\\ &= -3a^2b - 3ab^2\end{aligned}$$

よって (左辺) = (右辺).

i.e.　$a+b+c=0$ のとき,

$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ が成立. □

6.2.1　問題 3

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ のとき, 以下の等式を示せ.

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

〈証明〉.

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ より.　$c = ak,\ d = bk$ (k:実数) とおくと.

$$(\text{左辺}) = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a+ak}{b+bk} = \frac{a\cancel{(1+k)}}{b\cancel{(1+k)}} = \frac{a}{b}$$

$$(\text{右辺}) = \frac{a-c}{b-d} = \frac{a-ak}{b-bk} = \frac{a\cancel{(1-k)}}{b\cancel{(1-k)}} = \frac{a}{b}$$

よって (左辺) = (右辺)

i.e. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ のとき

$\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a-c}{b-d}$ が成立 □

7 不等式の証明

実数の大小関係の基本性質

$$a > b, b > c \Longrightarrow a > c$$
$$a > b \Longrightarrow a + c > b + c, \quad a - c > b - c$$
$$a > b, c > 0 \Longrightarrow ac > bc, \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$
$$a > b, c < 0 \Longrightarrow ac < bc, \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

このことから導かれること.

$$\begin{cases} a > 0,\ b > 0 \Rightarrow a + b > 0,\ ab > 0 \\ a < 0,\ b < 0 \Rightarrow a + b < 0,\ ab > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \\ a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \end{cases}$$

7.1 基本の証明

(1) $x > 1, y > 1$ のとき, 以下の不等式を示せ.

$$xy + 1 > x + y$$

<証明>.

$$(xy+1) - (x+y) = xy - x - y + 1$$
$$= x(y-1) - (y-1)$$
$$= (x-1)(y-1)$$

さて,

$x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$

$y > 1 \Leftrightarrow y - 1 > 0$ なので,

$(x-1)(y-1) > 0$

$\therefore (xy+1) - (x+y) > 0$

よって $xy + 1 > x + y$ ■

(2) $x > y$ のとき, 以下の不等式を示せ.

$$3x - 4y > x - 2y$$

<証明>.

$$(3x - 4y) - (x - 2y) = 3x - 4y - x + 2y$$
$$= 2x - 2y$$
$$= 2(x - y)$$

さて, $x > y$ より

$x - y > 0$.

$\therefore 2(x-y) > 0$

よって. $(3x - 4y) - (x - 2y) > 0$

よって, $3x - 4y > x - 2y$ ■

7.2 さまざまな証明

(1) 以下の不等式を示せ. また, 等号成立条件を調べよ.

$$x^2 + 10y^2 \geqq 6xy$$

<証明>.

$(x^2+10y^2)-6xy = x^2-6xy+10y^2$

$= x^2-6xy+9y^2+y^2$

$= (x-3y)^2+y^2$

$(x-3y)^2 \geqq 0,\ y^2 \geqq 0$ なので,

$(x-3y)^2+y^2 \geqq 0$

$\therefore\ (x^2+10y^2)-6xy \geqq 0$

i.e. $x^2+10y^2 \geqq 6xy$ ■

等号成立は,

$x-3y=0$ かつ $y=0$

$\therefore\ x=0,\ y=0$ で 等号成立 //

(2) $a>0, b>0$ のとき, 以下の不等式を示せ.

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$$

<証明>.

$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0,\ \sqrt{a+b}>0$ なので,

$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ を示す

$\Leftrightarrow\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$ を示す. —(*)

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2 = a+2\sqrt{ab}+b-(a+b)$

$= 2\sqrt{ab}$.

$\sqrt{ab}>0$ より. $2\sqrt{ab}>0$.

$\therefore\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2>0$ が成立.

i.e. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$

よって (*) から,

$\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ ■

(3) 以下の不等式を示せ. また, 等号成立条件を調べよ.

$$|a|+|b| \geqq |a+b|$$

<証明>.

$|a|+|b| \geqq 0,\ |a+b| \geqq 0$ なので.

$|a|+|b| \geqq |a+b|$ を示す

$\Leftrightarrow\ (|a|+|b|)^2 \geqq (|a+b|)^2$ を示す. —(*).

$(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2 = |a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$

$= a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$= 2|ab|-2ab$.

$= 2(|ab|-ab)$

ここで, $|ab| \geqq ab$ なので

$|ab|-ab \geqq 0$.

$\therefore\ 2(|ab|-ab) \geqq 0$

よって

$(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2 \geqq 0$

i.e.

$(|a|+|b|)^2 \geqq (|a+b|)^2$

(*)より

$|a|+|b| \geqq |a+b|$. ■