1　複素数と四則演算

1.1　複素数とは

復習

(1) $x^2 = 9$ のとき, $x =$ ± 3

(2) $x^2 = 5$ のとき, $x =$ $\pm\sqrt{5}$

では, $x^2 = -1$ のとき… $x =$ 実数解なし.

定義

2乗して -1 になる数のうち1つを i とする.

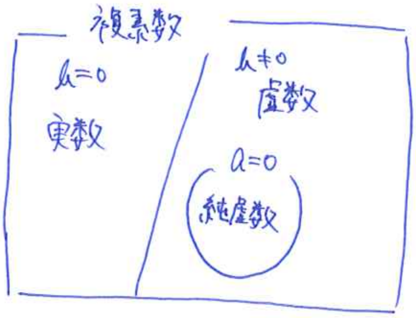
複素数について…

$i^2 = -1$.

実数 a, b に対し, $a + bi$ ← 複素数.

$b \neq 0$ のとき, 虚数

$a = 0$, $b \neq 0$ のとき 純虚数.



1.2　感覚的に…

i を虚数単位とする.

(1) $x + yi = 3 + 4i$ のとき, 実数 x, y の値を求めよ.

$x = 3$
$y = 4$ //

(2) $(x + y) + (3x - 2y)i = 3 + 4i$ のとき, 実数 x, y の値を求めよ.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

$x = 2$. $y = 1$. //

(3) $(x + y - 6) + (3x - y - 2)i = 0$ のとき, 実数 x, y の値を求めよ.

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

$x = 2$. $y = 4$ //

(4) $(2 + 3i) + (3 + 7i)$ を計算せよ.

$= 5 + 10i$ //

(5) $(2 - 5i) + 2(-1 + 4i)$ を計算せよ.

$= 2 - 5i - 2 + 8i$

$= 3i$ //

(6) $(2+3i)-(3+7i)$ を計算せよ.

$= 2+3i-3-7i$

$= -1-4i$ //

(7) $3(2-5i)-(1-4i)$ を計算せよ.

$= 6-15i-1+4i$

$= 5-11i$ //

(8) $(2+3i)(3+7i)$ を計算せよ.

$= 6+14i+9i+21i^2$

$= 6+23i-21$

$= -15+23i$ //

(9) $(2-5i)(1-4i)$ を計算せよ.

$= 2-8i-5i+20i^2$

$= 2-13i-20$

$= -18-13i$ //

1.3 共役な複素数

以下を計算せよ.

(1) $(3+2i)+(3-2i)$

$= 6$ //

(2) $(3+2i)(3-2i)$

$= 9-6i+6i-4i^2$

$= 9+4$

$= 13$ //

共役な複素数

$a+bi$, $a-bi$ を
互いに共役な複素数という。

以下の複素数 a と共役な複素数 b をいえ. また, $a+b, ab$ を計算せよ.

(1) $a = 1-2i$

$b = 1+2i$

$a+b = 2$

$ab = 1+4 = 5$ //

(2) $a = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$b = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$a+b = -1$

$ab = \frac{1}{4}(1+3) = 1$ //

1.4 除法

例

$$\frac{2+3i}{1+2i} = \frac{2+3i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i}$$

$$= \frac{1+3i-4i-6i^2}{5}$$

$$= \frac{7-i}{5}$$

問題

計算せよ.

(1) $\frac{3-2i}{4+5i} = \frac{3-2i}{4+5i} \times \frac{4-5i}{4-5i}$

$$= \frac{12-8i-15i-10}{16+25}$$

$$= \frac{2-23i}{41}$$

(2) $\frac{2+3i}{1-2i} = \frac{2+3i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i}$

$$= \frac{1+3i+4i-6}{5}$$

$$= \frac{-5+7i}{5}$$

(3) $\frac{5+2i}{3i-1} = \frac{5+2i}{3i-1} \times \frac{-3i-1}{-3i-1}$

$$= \frac{-15i+6-6-2i}{9+1}$$

$$= \frac{-17i}{10}$$

1.5 負の平方根

確認

- 2 乗して 5 になる数は...

$\pm\sqrt{5}$

- 2 乗して-5 になる数は...

$\pm\sqrt{5}\, i$

負の平方根

$a > 0$ のとき, $-a$ の平方根は

$\pm\sqrt{a}\, i$

例題

以下の数を i を用いて表せ.

(1) $\sqrt{-4}$

$2i$

(2) $\sqrt{-19}$

$\sqrt{19}\, i$

(3) -18 の平方根

$\pm\sqrt{18}\, i$

$= \pm 3\sqrt{2}\, i$

1.5.1　積

負の数の平方根を含む計算について考える．例題

$$\sqrt{-6}\sqrt{-3} = \sqrt{6}\,i \times \sqrt{3}\,i$$

$$= -3\sqrt{2}$$

計算せよ．

(1) $\sqrt{-6}\sqrt{-8} = \sqrt{6}\,i \times \sqrt{8}\,i$

$$= -4\sqrt{3}$$

(2) $\dfrac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{2i}{\sqrt{3}\,i}$

$$= \frac{2i}{\sqrt{3}\,i} \times \frac{i}{i} = \frac{-2}{-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(3) $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\cancel{\sqrt{2}}\,i}{\cancel{\sqrt{2}}} = 2i$

(4) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i} \times \dfrac{i}{i}$

$$= \frac{2\cancel{\sqrt{3}}\,i}{-\cancel{\sqrt{3}}}$$

$$= -2i$$

問い

a, b は実数とする．$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ か．

2　2 次方程式の解

以下の 2 次方程式を, 複素数範囲で解け.

(1) $x^2+3x+1=0$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

(2) $2x^2-3x+1=0$

$$(2x-1)(x-1)=0$$

$$x=\frac{1}{2},\ 1$$

(3) $x^2+\sqrt{2}x+1=0$

$$x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{2}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2}$$

(4) $x^2+x+1=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$

問題

m を定数とする. 以下の 2 次方程式の解の種類を判別せよ.

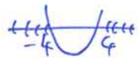
(1) $x^2+mx+4=0$

判別式を D とする.

$$D=m^2-4\cdot 4$$

$$=(m-4)(m+4).$$

i) $D>0$ のとき,



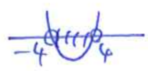
$m<-4,\ 4<m$ で

実数解 2 つ.

ii) $D=0$ のとき

$m=\pm 4$ で 重解.

iii) $D<0$ のとき



$-4<m<4$ で

虚数解 2 つ

(2) $x^2+(m+1)x+1=0$

判別式を D とおく.

$$D=(m+1)^2-4$$

$$=m^2+2m-3$$

$$=(m+3)(m-1).$$

i) $D>0$ のとき

$m<-3,\ 1<m$ で

実数解 2 つ.

ii) $D=0$ のとき

$m=1,\ -3$ で 重解.

iii) $D<0$ のとき

$-3<m<1$ で

虚数解 2 つ.

3 解と係数の関係・因数定理

3.1 どう解きますか.

二次方程式 $x^2+3x+4=0$ の 2 つの解を α, β とする. 以下の値を求めよ.

(1) $\alpha+\beta$

$\alpha+\beta=-3$

(2) $\alpha\beta$

$\alpha\beta=4$

(3) $\alpha^2+\beta^2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-3)^2-2\cdot 4$

$=1$

(4) $\alpha^3+\beta^3$

$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-3)^3-3\cdot 4\cdot(-3)$

$=-27+36 \quad = 9$

因数定理

方程式 $P(x)=0$ が $x=\alpha$ を解にもつ

$\Leftrightarrow$ $P(x)$ は $(x-\alpha)$ を因数にもつ.

つまり...

$x^2+3x+4=(x-\alpha)(x-\beta)$ と書ける。

$\Leftrightarrow x^2+3x+4=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$.

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-3 \\ \alpha\beta=4 \end{cases}$$

一般化.

$ax^2+bx+c=0$ の解 α, β に対し.

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$=ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta$.

係数比較して.

$$\begin{cases} b=-a(\alpha+\beta) \\ c=a\alpha\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

解と係数の関係.

これを活用して, さまざまな問題を解いていく.

3.2 問題 1

二次方程式 $2x^2-3x+4=0$ の 2 つの解を α,β とする．以下の値を求めよ．

(1) $\alpha+\beta$

$$2x^2-3x+4 = 2(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$= 2x^2-2(\alpha+\beta)x+2\alpha\beta.$$

係数比較.

$$\alpha+\beta = \frac{3}{2}$$
$$\alpha\beta = 2$$

(2) $\alpha\beta$

(3) $\alpha^2+\beta^2$

$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=\frac{9}{4}-4 = \frac{-7}{4}$$

(4) $\alpha^3+\beta^3$

$$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$=\left(\frac{3}{2}\right)^3-3\cdot\cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}$$
$$=\frac{27}{8}-9 = \frac{-45}{8}$$

3.3 問題 2

以下の問いに答えよ．

(1) 2 次方程式 $x^2-6x+m=0$ において，1 つの解が他の解の 2 倍であるとき，定数 m の値と 2 つの解を求めよ．

1つの解をαとおく. もう1つは 2α とかける.

$$x^2-6x+m = (x-\alpha)(x-2\alpha)$$
$$= x^2-3\alpha x+2\alpha^2.$$

係数比較.

$$\begin{cases} -6 = -3\alpha \\ m = 2\alpha^2 \end{cases}$$

$\alpha = 2$. $m = 8$

よって. $m=8$.

2解は 2, 4

(2) 2 次方程式 $x^2+3x+m=0$ において，2 つの解の差が 1 であるとき，定数 m の値と 2 つの解を求めよ．

1つの解をαとおく. もう1つは α+1 とかける.

$$x^2+3x+m = (x-\alpha)(x-(\alpha+1))$$
$$= x^2-(2\alpha+1)x+\alpha(\alpha+1)$$

係数比較.

$$\begin{cases} 2\alpha+1 = -3. \\ m = \alpha(\alpha+1) \end{cases}$$

$\alpha = -2$, $m = 2$.

$\therefore \alpha+1 = -1$.

よって $m = 2$.

2解は $-1, -2$

(3) 2 次方程式 $2x^2-7x+m=0$ において，1 つの解が他の解の 4 倍であるとき，定数 m の値と 2 つの解を求めよ．

1つの解をαとおく. もう1つの解は 4α とおける.

$$2x^2-7x+m = 2(x-\alpha)(x-4\alpha)$$
$$= 2x^2-10\alpha x+8\alpha^2.$$

係数比較.

$$\begin{cases} -10\alpha = 7. \\ 8\alpha^2 = m \end{cases}$$

$\alpha = -\frac{7}{10}$. $m = \frac{98}{25}$

$4\alpha = -\frac{7}{5}$

よって $m = \frac{98}{25}$

2解は $-\frac{7}{10}, -\frac{7}{5}$

3.4　問題 3

複素数範囲で因数分解せよ．

(1) $x^2 + x + 2$

$x^2+x+2=0$

$x = \dfrac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2}$

$= \dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

$\therefore x^2+x+2 = \underline{\left(x - \dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)\left(x - \dfrac{-1-\sqrt{7}i}{2}\right)}$ //

(2) $4x^2 + 1$

$= \underline{(2x-i)(2x+i)}$. //

(3) $x^4 - 16$

$= (x^2-4)(x^2+4)$

$= \underline{(x-2)(x+2)(x+2i)(x-2i)}$ //

(4) $x^2 + 2x + 1$

$= \underline{(x+1)^2}$ //

3.5　問題 4

(1) 以下の 2 数を解とする 2 次方程式を作れ．

(a) $2, -3$

$\underline{(x-2)(x+3)}$ //

(b) $\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1$

$(x-(\sqrt{2}+1))(x-(\sqrt{2}-1))$

$= \underline{x^2 - 2\sqrt{2}x + 1}$ //

(c) $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i$

$(x-(1+\sqrt{3}i))(x-(1-\sqrt{3}i))$.

$= \underline{x^2 - 2x + 4}$ //

(2) 2 次方程式 $x^2 + 2x + 6 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき，
以下の 2 数を解にもつ 2 次方程式を作れ．

(a) $\alpha - 1, \beta - 1$

$(x-(\alpha-1))(x-(\beta-1))=0$

$x^2-(\alpha+\beta-2)x+(\alpha-1)(\beta-1)=0$.

$x^2-(\alpha+\beta-2)x+(\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1)=0$

式で求める対称式.

ここで

$x^2+2x+6=(x-\alpha)(x-\beta)$

$=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$.

係数比較．　$\alpha+\beta=-2$．　$\alpha\beta=6$

$\therefore$ $\underline{x^2+4x+9=0}$ //

(b) α^2, β^2

$(x-\alpha^2)(x-\beta^2)=0$

$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+(\alpha\beta)^2=0$　式で求める対称式.

ここで

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$= 4-12=-8$.

$(\alpha\beta)^2 = 36$

$\therefore$ $\underline{x^2-8x+36=0}$ //

3.6 問題 5

以下の条件を満たす 2 数を求めよ.

(1) 和が 5 で, 積が 6

2数を α, β とおく. この2数は.

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$ の解.

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

i.e. $x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$x=2, 3$

よって. 2数は 2, 3 //

(2) 和が 2 で, 積が 4

2数を α, β とおく. この2数は

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$ の解.

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

$x^2-2x+4=0$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4-16}}{2}$

$=1\pm\sqrt{3}i$

よって 2数は $1\pm\sqrt{3}i$ //

(3) 和が 2 で, 積が 3

2数を α, β とおく. この2数は

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$ の解.

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

$x^2-2x+3=0$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4-12}}{2}$

$=1\pm\sqrt{2}i$

よって 2数は $1\pm\sqrt{2}i$ //

(4) 和が −2 で, 積が 6

2数を α, β とおく. この2数は

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

$x^2+2x+6=0$

$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-24}}{2}$

$=-1\pm\sqrt{5}i$

よって 2数は $-1\pm\sqrt{5}i$ //

(5) 和も積も 3

2数を α, β とおく. この2数は

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$ の解.

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

$x^2-3x+3=0$

$x=\frac{3\pm\sqrt{9-12}}{2}$

$=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$

よって 2数は $\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$ //

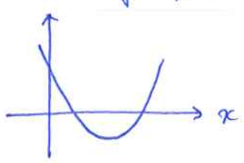
3.7 問題 6

(1) 2 次方程式 $x^2 + 2(m-3)x + 4m = 0$ が, 以下のような解を持つとき, 定数 m の値の範囲を求めよ. (*1)

(a) 異なる 2 つの正の解.

(*1)が異なる2つの正の解をもつには，

$y = x^2 + 2(m-3)x + 4m$ のグラフが



左図のようになる。

i) $D>0$

ii) 軸>0

iii) $x=0$で $y>0$.

i) (*1)の判別式をDとおくと.

$D = 4(m-3)^2 - 4\cdot 4m$

$= 4(m^2-10m+9)$

$= 4(m-9)(m-1) > 0$

$m<1,\ 9<m$.

ii) 軸 $x = -(m-3) > 0$

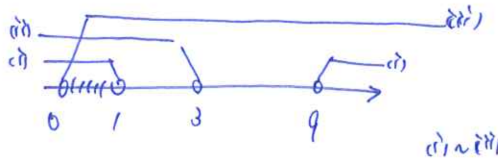
$-m+3>0$

$3>m$.

iii) $x=0$のとき.

$y = 4m > 0$

$m>0$



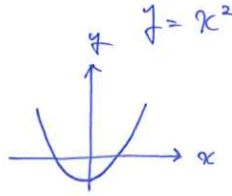
i)〜iii)より

$0<m<1$

(b) 正の解と負の解.

(*1)が正と負の解をもつには.

$y = x^2 + 2(m-3)x + 4m$ のグラフが



左図のようになる

$x=0$のとき $y<0$

であればよい.

$x=0$のとき $y=4m<0$

$m<0$

〈別解〉.

2つの解をα,βとおく.

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

係数比較して

$\alpha+\beta = -2(m-3)$

$\alpha\beta = 4m$.

さて，異なる2つの正の解をもつには

i) $D>0$

ii) $\alpha+\beta>0$

iii) $\alpha\beta>0$

i) (*1)の判別式をDとおくと

$D = 4(m-9)(m-1) > 0$

$m<1,\ 9<m$.

ii) $\alpha+\beta>0$

$-2(m-3)>0$

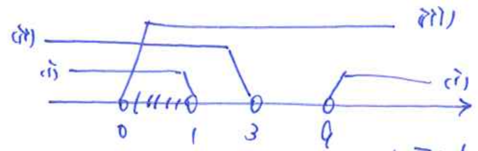
$-2m+6>0$

$3>m$.

iii) $\alpha\beta>0$

$4m>0$

$m>0$.



上図より

$0<m<1$

(b) 正の解と負の解をもつには，

$\alpha\beta<0$.

$4m<0$

$m<0$

4　割った余り

4.1　問題 1

$P(x) = x^3 + x^2 + 3x + 1$ を, 以下の 1 次式で割った余りを求めよ.

(1) $x + 1$

$$
\begin{array}{r}
x^2 + 0 + 3 \\
x+1 \,\big)\, \overline{x^3 + x^2 + 3x + 1} \\
x^3 + x^2 \\
\hline
3x + 1 \\
3x + 3 \\
\hline
-2
\end{array}
$$

余り -2

$P(x)$ を $x+1$ で割ったとき.

$P(x) = \boxed{商}(x+1) + \boxed{余り}$

$x = -1$ を代入すると.

$P(-1) = (余り)$

$= (-1)^3 + (-1)^2 + 3(-1) + 1$

$= -1 + 1 - 3 + 1. = -2$

(2) $x - 2$

$$
\begin{array}{r}
x^2 + 3x + 9 \\
x-2 \,\big)\, \overline{x^3 + x^2 + 3x + 1} \\
x^3 - 2x^2 \\
\hline
3x^2 + 3x \\
3x^2 - 6x \\
\hline
9x + 1 \\
9x - 18 \\
\hline
19
\end{array}
$$

余り 19

(2)
同様に, 求める余りは

$P(2) = 2^3 + 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$

$= 8 + 4 + 6 + 1 = 19$

4.2 問題 2

(1) 多項式 $P(x)$ を $x-1$ で割った余りが 5, $x+2$ で割った余りが -1 である．$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りを求めよ．

条件より

$P(x) = Q(x)\cdot(x-1)+5$ —①

$P(x) = R(x)\cdot(x+2)-1$ —② とおける。

求める余りを $ax+b$ とおくと，

$P(x) = S(x)\cdot(x-1)(x+2) + ax+b$. —(*)

$x=1$ 代入して，①，(*) より

$P(1)=5$

$P(1)=a+b$

$\therefore\ a+b=5$. —③

$x=-2$ 代入して，②，(*) より

$P(-2)=-1$

$P(-2)=-2a+b$.

$\therefore\ -2a+b=-1$. —④

③，④ で連立して解くと

$a=2$，$b=3$.

$\therefore$ 求める余りは $2x+3$

(2) 多項式 $P(x)$ を $x-3$ で割った余りが 1, $x+1$ で割った余りが 5 である．$P(x)$ を $(x-3)(x+1)$ で割った余りを求めよ．

条件より

$P(x) = Q(x)\cdot(x-3)+1$. —①

$P(x) = R(x)\cdot(x+1)+5$ —②

求める余りを $ax+b$ とおくと

$P(x) = S(x)(x-3)(x+1) + ax+b$ —(*)

$x=3$ を代入して，①，(*) より

$P(3)=1$.

$P(3)=3a+b$.

$\therefore\ 3a+b=1$. —③

$x=-1$ 代入して ②，(*) より

$P(-1)=5$

$P(-1)=-a+b$

$\therefore\ -a+b=5$ —④

③ ④ より

$a=-1$，$b=4$

$\therefore$ 求める余りは $-x+4$

5 因数分解，高次方程式

5.1 因数分解

以下の式を因数分解せよ．

(1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

(与式) $= P(x)$ とおくと

$P(1) = 0$ より

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$

$= (x-1)(x-2)(x-3)$

(2) $2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$

(与式) $= P(x)$ とおくと

$P(2) = 0$

$2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 = (x-2)(2x^2 - 7x + 3)$

$= (x-2)(2x-1)(x-3)$

(3) $x^4 - 13x^2 + 36$

$= (x^2 - 9)(x^2 - 4)$

$= (x-3)(x+3)(x-2)(x+2)$

(4) $9x^3 - 9x^2 - x + 1$

$= 9x^2(x-1) - (x-1)$

$= (9x^2 - 1)(x-1)$

$= (3x-1)(3x+1)(x-1)$

(5) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

$= (x-2)(x^2 + 4x + 3)$

$= (x-2)(x+3)(x+1)$

5.2 高次方程式

以下の方程式を複素数範囲で解け.

(1) $x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x=-1,\ \frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}$

よって $x=-1,\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ //

(2) $x^3+8=0$

$(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$x=-2,\ \frac{2\pm\sqrt{4-16}}{2}$

よって $x=-2,\ 1\pm\sqrt{3}i$ //

(3) $x^4-4x^2+3=0$

$(x^2-3)(x^2-1)=0$

$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-1)(x+1)=0$

$\therefore x=\pm1,\ \pm\sqrt{3}$ //

(4) $x^4-1=0$

$(x^2-1)(x^2+1)=0$

$x=\pm1,\ \pm i$ //

(5) $x^3+3x^2-2x-2=0$

$(x-1)(x^2+4x+2)=0$

$\therefore x=1,\ \frac{-4\pm\sqrt{16-8}}{2}$

よって $x=1,\ -2\pm\sqrt{2}.$ //

(6) $2x^3-x^2+3x+6=0$

$(x+1)(2x^2-3x+6)=0$

$\therefore x=-1,\ \frac{3\pm\sqrt{9-48}}{2\cdot2}$

よって $x=-1,\ \frac{3\pm\sqrt{39}i}{4}$ //

5.3 解から係数

例題

a, b を実数とする．3 次方程式 $x^3+3x^2+ax+b=0$ が，$1-2i$ を解にもつとき，定数 a, b の値を求めよ．また，他の解を求めよ．

$1-2i$ を解にもつので

$(1-2i)^3+3(1-2i)^2+a(1-2i)+b=0$

$1+3\cdot(-2i)^2+3\cdot(-2i)+(-2i)^3$
$+3(1-4i+4i^2)+a-2ai+b=0$

$1-12-6i+8i+3-12i-12$
$+a-2ai+b=0$

$(-20+a+b)+(-10-2a)i=0$

$\therefore \begin{cases} -20+a+b=0 \\ -10-2a=0 \end{cases}$

$\underline{a=-5,\ b=25}$ //

$x^3+3x^2-5x+25=0$

$(x+5)(x^2-2x+5)=0$

よって $x=-5,\ \dfrac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}$

$x=-5,\ 1\pm 2i$

以上より．

他の解は，$\underline{-5,\ 1+2i}$ //

別解

$1-2i$ が解なので，共役な複素数 $1+2i$ も解．

もう1つを α とおく．

$(x-(1-2i))(x-(1+2i))(x-\alpha)=0$

$(x^2-2x+5)(x-\alpha)=0$

$x^3-(2+\alpha)x^2+(5+2\alpha)x-5\alpha=0$

係数比較して．

$\begin{cases} 3=-(2+\alpha) \\ a=(5+2\alpha) \\ b=-5\alpha. \end{cases}$

$\alpha=-5,\ \underline{a=-5,\ b=25}$ //

よって 他の解は $\underline{1+2i,\ -5}$ //

問題

a, b を実数とする．3 次方程式 $x^3+x^2+ax+b=0$ が，$1+i$ を解にもつとき，定数 a, b の値を求めよ．また，他の解を求めよ．

$1+i$ を解にもつので．

$(1+i)^3+(1+i)^2+a(1+i)+b=0$

$1+3i+3i^2+i^3+1+2i+i^2$
$+a+ai+b=0$

$1+3i-3-i+1+2i-1+a+ai+b=0$

$(-2+a+b)+(4+a)i=0$

$\therefore \begin{cases} -2+a+b=0 \\ 4+a=0 \end{cases}$

$\underline{a=-4,\ b=6.}$ //

$x^3+x^2-4x+6=0$

$(x+3)(x^2-2x+2)=0$

$x=-3,\ \dfrac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}$

$\therefore x=-3,\ 1\pm i$

よって 他の解は $\underline{-3,\ 1-i}$ //

〈別解〉．

$1+i$ が解なので，共役な複素数 $1-i$ も解．

もう1つを α とおく．

$(x-(1+i))(x-(1-i))(x-\alpha)=0$

$(x^2-2x+2)(x-\alpha)=0$

$x^3-(2+\alpha)x^2+(2+2\alpha)x-2\alpha=0$

係数比較して．

$\begin{cases} 1=-(2+\alpha) \\ a=2+2\alpha \\ b=-2\alpha \end{cases}$

$\alpha=-3,\ \underline{a=-4,\ b=6}$ //

よって 他の解は $\underline{-3,\ 1-i}$ //