1　対数

1.1　復習

下線部に当てはまる数値を答えよ．

(1) 2 を<u>6</u>乗すると 64 になる．

(2) 3 を<u>−1</u>乗すると $\frac{1}{3}$ になる．

(3) 5 を<u>−2</u>乗すると $\frac{1}{25}$ になる．

(4) 2 を<u>10</u>乗すると 1024 になる．

問い

では，2 を<u>?</u>乗すると 3 になるような数は存在するか．

存在する．

そのような数を

$\log_2 3$ とかく．

$M = a^p$ なる p を $\underbrace{\log_a M}_{a\text{を底とする}M\text{の対数}}$ で表す。

真数．

1.2　対数

定義

$a>0,\ a\neq 0$，$M>0$ とする．

$$M = a^p \Leftrightarrow p = \log_a M.$$

練習問題

以下の値を求めよ．

(1) $\log_3 9$

$= 2$

(2) $\log_2 64$

$= 6$

(3) $\log_2 \sqrt{2}$

$= \frac{1}{2}$

(4) $\log_2 \sqrt[3]{2}$

$= \log_2 2^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{3}$ //

(5) $\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2}$

$= -2$ //

(6) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= 2$ //

1.3　対数の性質

<u>問題</u>
以下の計算をせよ．

(1) $\log_2 (8 \times 4)$

$= \log_2 32$

$= \log_2 2^5 = \underline{5}$ //

(2) $\log_2 8 + \log_2 4$

$= 3 + 2 = \underline{5}$ //

(3) $\log_3 \dfrac{27}{9}$

$= \log_3 3 = \underline{1}.$ //

(4) $\log_3 27 - \log_3 9$

$= \log_3 3^3 - \log_3 3^2$

$= 3 - 2 = \underline{1}$ //

(5) $\log_2 4^3$

$= \log_2 (2^2)^3$

$= \log_2 2^6 = \underline{6}$ //

(6) $3 \log_2 4$

$= 3 \times \log_2 2^2$

$= 3 \times 2 = \underline{6}$ //

対数の性質

$a > 0, a \neq 0, M > 0, N > 0$ のとき，

(1) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

(2) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

(3) $\log_a M^k = k \cdot \log_a M.$

Proof.

(1) $\log_a M = p$. $\log_a N = q$ とする．

定義より $M = a^p$, $N = a^q$.

$MN = a^p \cdot a^q$

$= a^{p+q}$ (∵ 指数法則).

底が a の対数をとって

$\log_a MN = \log_a a^{p+q}$

$= p + q = \log_a M + \log_a N$ 皿

□

1.4　問題

以下の計算をせよ.

(1) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$

$= \log_{10} 5 \cdot 2$

$= \log_{10} 10 = \underline{1}_{//}$

(2) $\log_6 27 + \log_6 8$

$= \log_6 27 \cdot 8$

$= \log_6 3^3 \cdot 2^3$

$= \log_6 6^3 = \underline{3}_{//}$

(3) $\log_3 18 - \log_3 2$

$= \log_3 \frac{18}{2}$

$= \log_3 9 = \underline{2}_{//}$

(4) $\log_5 2 - \log_5 250$

$= \log_5 \frac{2}{250}$

$= \log_5 \frac{1}{125}$

$= \log_5 5^{-3} = \underline{-3}_{//}$

(5) $\log_3 8 + 2\log_3 9 - 3\log_3 2$

$= \cancel{\log_3 2^3} + \log_3 9^2 - \cancel{\log_3 2^3}$

$= \log_3 3^4 = \underline{4}_{//}$

(6) $\log_3 \sqrt[3]{6} - \frac{1}{3}\log_3 2$

$= \log_3 6^{\frac{1}{3}} - \log_3 2^{\frac{1}{3}}$

$= \log_3 \frac{6^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$

$= \log_3 \left(\frac{6}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \underline{\frac{1}{3}}_{//}$

1.5 底の変換公式

問い
以下の計算をせよ．

$$\log_2 12 - \log_4 48$$

$= \log_2 2^2 \cdot 3 - \log_4 2^4 \cdot 3$

$= \log_2 2^2 + \log_2 3$

$- \log_4 4^2 - \log_4 3$

$= 2 - 2 + \log_2 3 - \log_4 3$

⋮

底がそろっていないので困った…

底の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

つまり…

$$\log_2 12 - \boxed{\log_4 48}$$

$= \log_2 12 - \dfrac{\log_2 48}{\log_2 4}$

$= \log_2 12 - \log_2 48$

$= \log_2 \dfrac{12 \cdot 4}{48} = \log_2 1 = 0$

Proof. □

1.6 問題

以下の式を簡単にせよ．

(1) $\log_4 32$

$4^{\frac{3}{2}}$

$\dfrac{5}{2}$

(2) $\log_9 3$

$\dfrac{1}{2}$

$\log_3 4 \times \log_2 9$

(3) ~~$\log_3 4 \log_2 9$~~

(4) $\log_3 15 - \log_9 75$

$\dfrac{\frac{1}{2} \log_3 75^{\frac{1}{2}}}{\log_3 9}$

$= \log_3 15 - \cancel{\log_3 9}$

5)75
5)15
3

$5\sqrt{3}$

$\dfrac{1}{2}$

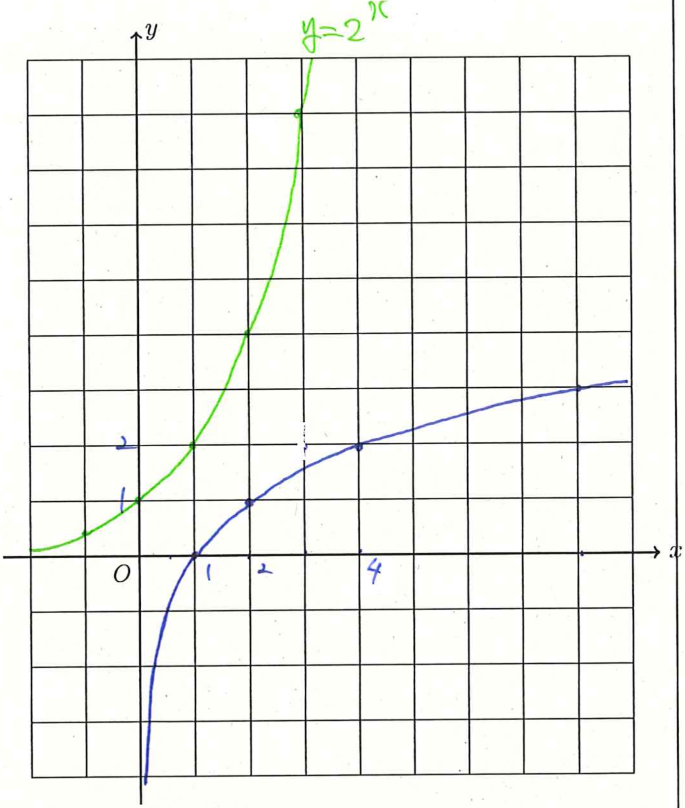
2 対数関数

2.1 さて...

関数を描こう.

$$y = \log_2 x$$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

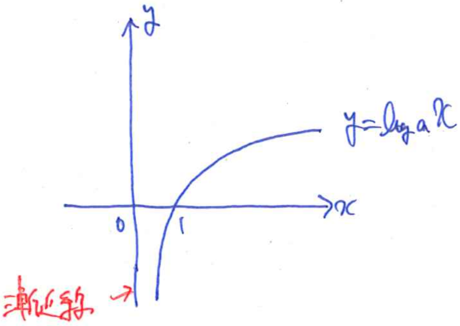


上の平面に $y = 2^x$ のグラフを描いてみて, 関係性を調べてみる.

直線 $y=x$ で対称.

$y = \log_a x$ について.

$a > 1$.

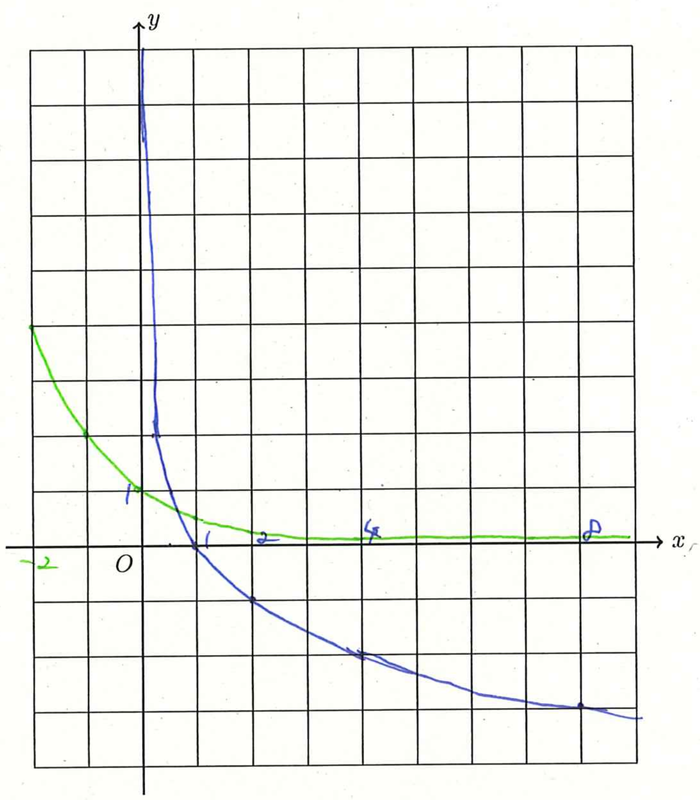


2.2 では...

関数を描こう.

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

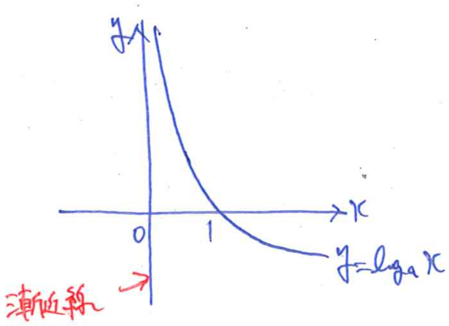
x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	3	2	1	0	-1	-2	-3



上の平面に $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフを描いてみて, 関係性を調べてみる.

直線 $y=x$ で対称.

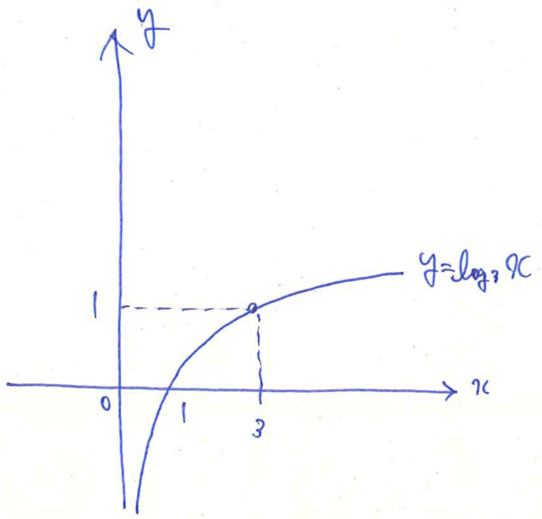
$0 < a < 1$.



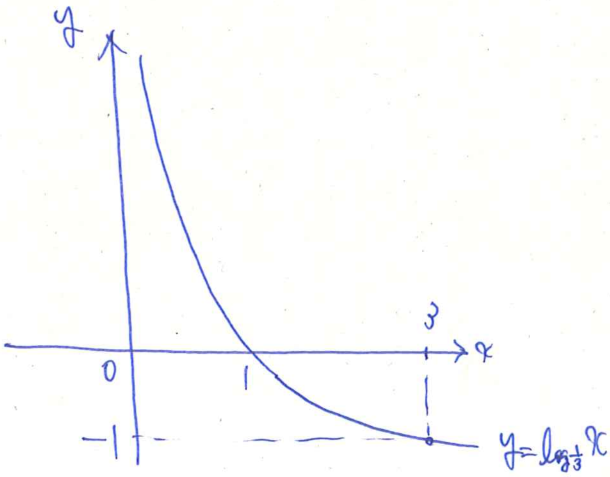
2.3　問題

以下の関数のグラフを描け．

(1) $y = \log_3 x$

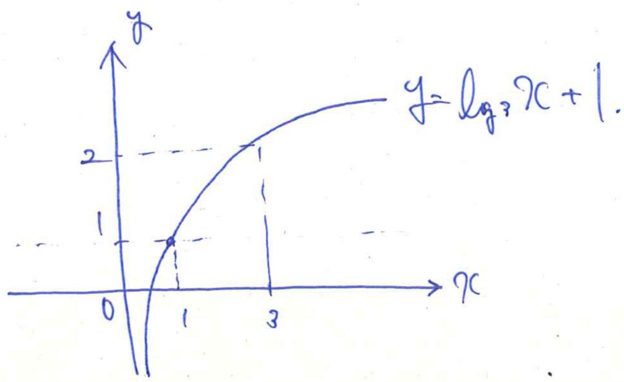


(2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$



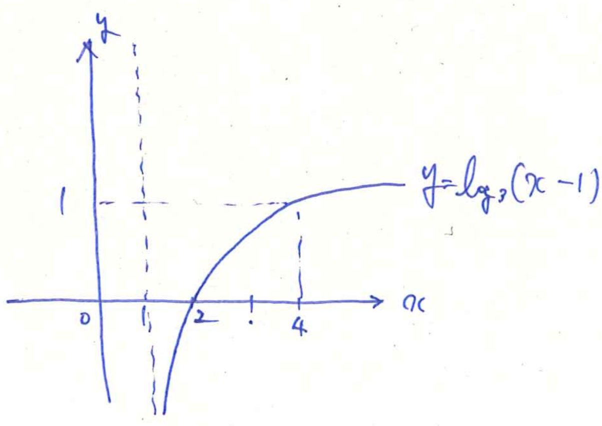
(3) $y = \log_3 x + 1$

y軸方向+1.



(4) $y = \log_3 (x-1)$

x軸方向+1.



2.4 大小比較

手順は指数の大小比較と同様．

グラフを描いてどっちが大きいか？

$\log_a \boxed{}$ の形で比較．

<u>例題</u>

以下の 2 数の大小関係を不等号を用いて表せ．

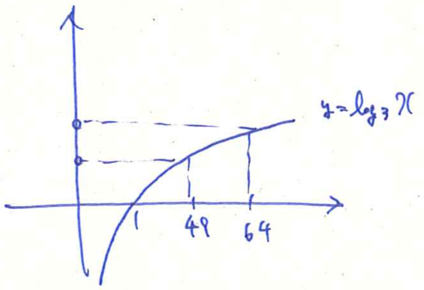
$$2\log_3 7,\quad 3\log_3 4$$

$2\log_3 7 = \log_3 7^2$

$= \log_3 49.$

$3\log_3 4 = \log_3 4^3$

$= \log_3 64$



グラフより

$\log_3 49 < \log_3 64$

$\therefore\ 2\log_3 7 < 3\log_3 4$

2.5 問題

以下の 2 数の大小関係を不等号を用いて表せ．

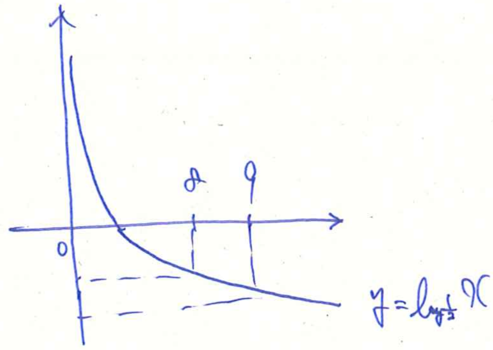
(1) $3\log_{\frac{1}{2}} 2,\quad 2\log_{\frac{1}{2}} 3$

$3\log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} 2^3$

$= \log_{\frac{1}{2}} 8$

$2\log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_{\frac{1}{2}} 3^2$

$= \log_{\frac{1}{2}} 9$



グラフより

$\log_{\frac{1}{2}} 8 > \log_{\frac{1}{2}} 9$

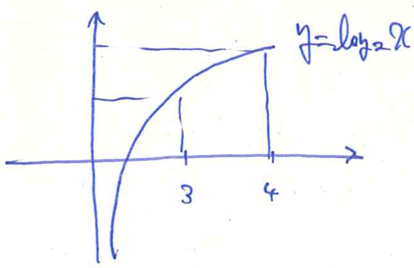
$\therefore\ 3\log_{\frac{1}{2}} 2 > 2\log_{\frac{1}{2}} 3$

(2) $\log_2 3,\quad 2$

$2 = 2\cdot\log_2 2$

$= \log_2 2^2$

$= \log_2 4$



グラフより

$\log_2 3 < \log_2 4$

$\therefore\ \log_2 3 < 2$

2.6　方程式

例題

以下の方程式を解け．

$$\log_3 x = 27$$

問題

以下の方程式を解け．

(1) $\log_2 x = 4$

(2) $\log_3 x = \dfrac{1}{3}$

(3) $\log_2 x = \dfrac{1}{64}$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} x = 8$

2.7　不等式

例題

以下の不等式を解け．

$$\log_3 x \leqq 27$$

問題

以下の不等式を解け．

(1) $\log_2 x \leqq 4$

(2) $\log_3 x \geqq \dfrac{1}{3}$

(3) $\log_2 x > \dfrac{1}{64}$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} x < 8$

2.6 方程式

例題

以下の方程式を解け.

$$\log_3 x = 2$$

3を2乗したらx.

i.e. $3^2 = x$

$x = 9$

対数の定義をきちんとおさえる!!

対数 ⟷ 指数の行き来が スムーズにできるように。

問題

以下の方程式を解け.

(1) $\log_2 x = 3$

$\Leftrightarrow 2^3 = x$

$x = 8$

(2) $\log_3 x = -2$

$\Leftrightarrow 3^{-2} = x$

$x = \frac{1}{9}$

(3) $\log_2 x = -5$

$\Leftrightarrow 2^{-5} = x$

$x = \frac{1}{32}$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 = x$

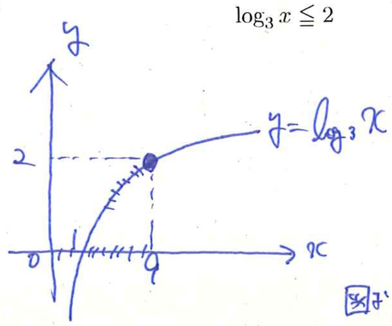
$x = \frac{1}{8}$

2.7 不等式

例題

以下の不等式を解け.

$$\log_3 x \leqq 2$$

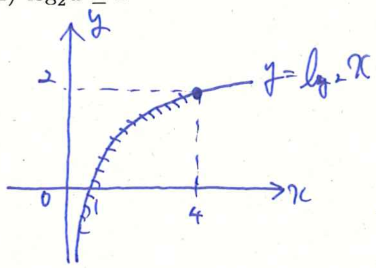


図より $0 < x \leqq 9$

問題

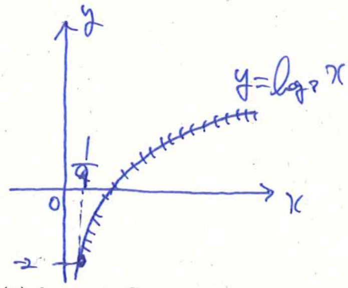
以下の不等式を解け.

(1) $\log_2 x \leqq 2$



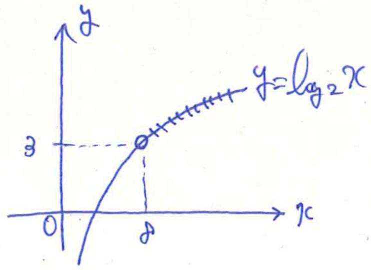
図より $0 < x \leqq 4$

(2) $\log_3 x \geqq -2$



図より $\frac{1}{9} \leqq x$

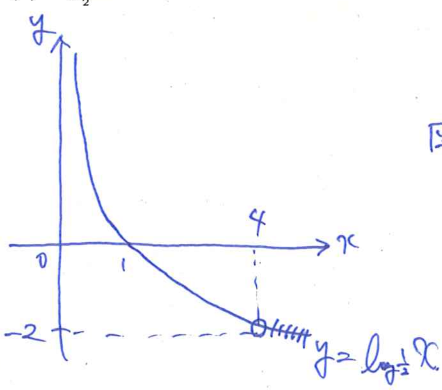
(3) $\log_2 x > 3$



図より

$8 < x$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} x < -2$



図より

$4 < x$

2.8 方程式・不等式

例題

以下の方程式を解け．

$$\log_3 x + \log_3(x-8) = 2$$

真数条件より．$x>0$．$x-8>0$　i.e. $x>8$ —①

$\log_3 x(x-8) = \log_3 3^2$

真数部分の比較．

$x(x-8)=9$

$x^2-8x-9=0$

$(x-9)(x+1)=0$

①．$x>8$ より　$x=9$ //

問題

以下の方程式を解け．

(1) $\log_2 x + \log_2(x-3) = 1$

真数条件より　$x>0$．$x-3>0$　i.e. $x>3$ — ①

$\log_2 x(x-3) = \log_2 2$

真数部分の比較．

$x(x-3)=2$

$x^2-3x-2=0$

$(x-2)(x-1)=0$

$x>3$ より．　解なし //

(2) $\log_2(x-3) + \log_2(x-1) = 3$

真数条件より．$x-3>0$．$x-1>0$　i.e. $x>3$ —①．

$\log_2 (x-3)(x-1) = \log_2 2^3$

真数部分の比較．

$(x-3)(x-1)=8$

$x^2-4x+3=8$

$x^2-4x-5=0$

$(x-5)(x+1)=0$

$x>3$ より　$x=5$ //

例題

以下の不等式を解け．

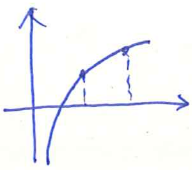
$$2\log_3(2-x) < \log_3(x+4)$$

真数条件より

$2-x>0$．　$x+4>0$．

$2>x$．　$x>-4$　i.e. $-4<x<2$ —①

$\log_3(2-x)^2 < \log_3(x+4)$

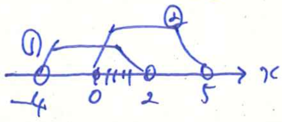


$(2-x)^2 < x+4$

$x^2-4x+4 < x+4$

$x^2-5x<0$

$x(x-5)<0$　∴ $0<x<5$ — ②



左図より　$0<x<2$ //

問題

以下の不等式を解け．

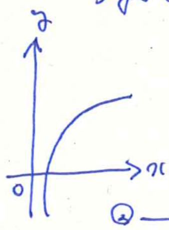
(1) $\log_3(3-x) \geqq \log_3 2x$

真数条件より．

$3-x>0$．　$2x>0$

$3>x$　$x>0$．　i.e. $0<x<3$ —①

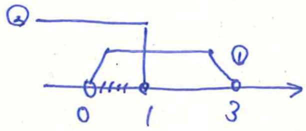
$\log_3(3-x) \geq \log_3 2x$



$3-x \geq 2x$

$3 \geq 3x$

$x \leq 1$.



左図より

$0<x\leq 1$ //

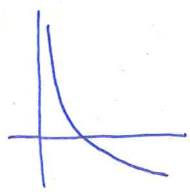
(2) $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) \leqq \log_{\frac{1}{2}} x$

真数条件より

$2-x>0$．　$x>0$

$2>x$．　$x>0$　i.e. $0<x<2$．—①

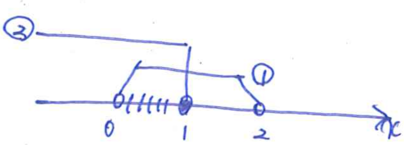
$\log_{\frac{1}{2}}(2-x) \leq \log_{\frac{1}{2}} x$



$2-x \geq x$

$2 \geq 2x$

$x \leq 1$ — ②



左図より

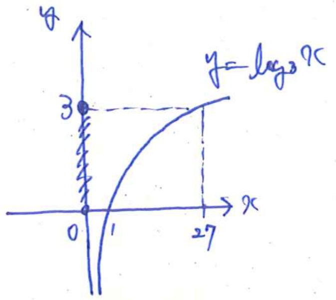
$0<x\leq 1$ //

2.9 最大最小問題

例題

関数 $y=(\log_3 x)^2-\log_2 x^2+3$ $(1 \leqq x \leqq 27)$ について考える.

(1) $\log_3 x = t$ とおくとき, t のとりうる値の範囲を求めよ.



左図より

$0 \leqq t \leqq 3$.

(2) y を t の関数として表せ.

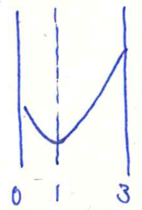
$y=(\log_3 x)^2-2\log_3 x+3$

$=t^2-2t+3$.

(3) y の最大値, 最小値とそのときの x の値を求めよ.

$y=t^2-2t+3$

$=(t-1)^2+2$.



左図より

$t=1$ で Min 2

$t=3$ で Max 6.

よって $t=1$ のとき.

$\log_3 x=1$. $x=3$

$t=3$ のとき

$\log_3 x=3$ $x=27$

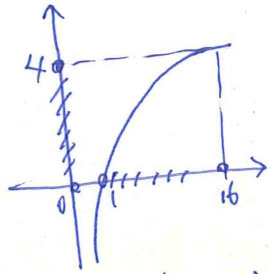
∴ $x=3$ で Min 2

$x=27$ で Max 6

問題

関数 $y=(\log_2 x)^2+\log_2 x^4+1$ $(1 \leqq x \leqq 16)$ の最大値, 最小値とそのときの x の値を求めよ.

$t=\log_2 x$ とおく.



左図より

$0 \leqq t \leqq 4$.

$y=t^2+4t+1$.

$=(t+2)^2-3$.

左図より $t=0$ で Min 1.

$t=4$ で Max 33.

よって、$t=0$ のとき.

$\log_2 x=0$. $x=1$.

$t=4$ のとき

$\log_2 x=4$ $x=16$.

∴ $x=1$ で Min 1.

$x=16$ で Max 33

3　日常と対数

3.1　地震について

<u>問い</u>
地震の規模を示すマグニチュードについて,

(1) マグニチュードが 1 上がると, エネルギーは何倍になるか.

約31.6倍

(2) マグニチュードが 2 上がると, エネルギーは何倍になるか.

1000倍

マグニチュードについて

E：地震の発するエネルギー(J), M：マグニチュードとする.

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5M.$$

つまり…

$E = 10^{10}$ (J) のとき

$$\log_{10} 10^{10} = 4.8 + 1.5M$$
$$10 = 4.8 + 1.5M$$
$$5.2 = 1.5M$$
$$M = 3.46\cdots$$

3.2　常用対数表

常用対数表を用いて, 地震のエネルギーを求めてみよう.

(1) $M1$

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5 \times 1 = 6.3$$

$E = 10^{6.3}$ (J)

(2) $M2$

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5 \times 2 = 7.8$$

$E = 10^{7.8}$ (J)

(3) $M3$

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5 \times 3 = 9.3$$

$E = 10^{9.3}$ (J)

(4) $M4$

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5 \times 4 = 10.8$$

$E = 10^{10.8}$ (J)

(5) $M5$

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5 \times 5 = 12.3$$

$E = 10^{12.3}$ (J)

(6) $M6$

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5 \times 6 = 13.8$$

$E = 10^{13.8}$ (J)

(7) $M7$

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5 \times 7 = 15.3.$$

$E = 10^{15.3}$ (J)

地震の発生時に発表される指針は，「マグニチュード」と「震度」がある．よく誤解されるが，この 2 つは別物である．

- 「マグニチュード」：地震が発するエネルギーの大きさを表したもの．1 つの地震に対し，1 つの値しかない．
- 「震度」：地震の揺れの大きさを表す指針．地域によって揺れの大きさは違うため，震度の値もさまざまである．

3.3　常用対数表の使い方

常用対数表を用いて, 以下の値を求めよ.

(1) $\log_{10} 1440$

$= \log_{10} 1.44 \times 10^3$

$= \log_{10} 1.44 + \log_{10} 10^3$

$= \log_{10} 1.44 + 3$

$= 0.1584 + 3$

$= 3.1584\cdots$

(2) $\log_{10} 92000$

$= \log_{10} 9.2 \times 10^4$

$= \log_{10} 9.2 + \log_{10} 10^4$

$= 0.9638 + 4$

$= 4.9638$

(3) $\log_{10} 1230$

$= \log_{10} 1.23 \times 10^3$

$= \log_{10} 1.23 + \log_{10} 10^3$

$= 0.0899 + 3$

$= 3.0899$

(4) $\log_{10} 0.0321$

$= \log_{10} 3.21 \times 10^{-2}$

$= 0.5065 - 2$

$= -1.4935$

(5) $\log_{10} 0.0000456$

$= \log_{10} 4.56 \times 10^{-5}$

$= \log_{10} 4.56 + \log_{10} 10^{-5}$

$= 0.6590 - 5$

$= -4.3410$

3.4　常用対数を用いた問題たち

$\log_{10} 2 = 0.3010$,　$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

問い

(1) 2^{10} は何桁か.

$2^{10} = 1024$

4ケタ

(2) 2^{30} は何桁か.

$1024 \times 1024 \times 1024$

10ケタ

桁数の求め方の工夫

3^{10} が何桁か求めてみる.

$10^N = 3^{10}$ とおく.

辺を底が10の対数をとると

$\log_{10} 10^N = \log_{10} 3^{10}$

$N = 10 \cdot \log_{10} 3$

$= 10 \cdot 0.4771$

$= 4.771$

$\therefore 3^{10} = 10^{4.771}$

よって 3^{10} は 5ケタ

問題

桁数を求めよ.

(1) 2^{15}

$10^N = 2^{15}$ とおく.

辺を底が10の対数をとると.

$\log_{10} 10^N = \log_{10} 2^{15}$

$N = 15 \cdot \log_{10} 2$

$= 15 \cdot 0.3010$

$= 4.515$

$\therefore 2^{15} = 10^{4.515}$

よって 2^{15} は 5ケタ

問い

$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ を小数で表したとき, 小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか.

$\frac{1}{1024} = 0.000976\cdots$

1 2 3 4

小数第4位

工夫

$\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$ を小数で表したとき, 小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか.

$10^N = \left(\frac{1}{3}\right)^{20}$ とおく.

辺を底が10の対数をとると.

$\log_{10} 10^N = \log_{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{20}$

$N = 20 \cdot \log_{10} \frac{1}{3}$

$= 20 (\log_{10} 1 - \log_{10} 3)$

$= 20 \cdot (0 - 0.4771)$

$= -9.542$

$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{20} = 10^{-9.542}$

よって 小数第9位

問題

同上.

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$

$10^N = \left(\frac{1}{2}\right)^{25}$ とおく.

辺を底が10の対数をとると.

$\log_{10} 10^N = \log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{25}$

$N = 25 \cdot \log_{10} \frac{1}{2}$

$= -25 \cdot 0.3010$

$= -7.525$

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{25} = 10^{-7.525}$

よって 小数第7位