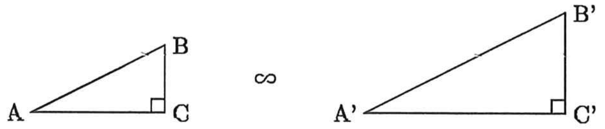
1　三角比

1.1　正弦・余弦・正接



2 つの三角形が相似なとき,

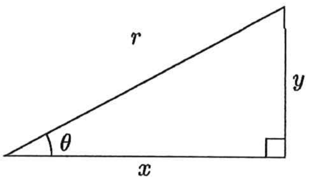
$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}\quad, \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}\quad, \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

∠C= 90° の直角三角形において, 辺の比

$$\frac{BC}{AB}, \frac{AC}{AB}, \frac{BC}{AC}$$

の値は, ∠A の値のみによって決まる.

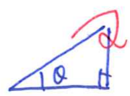
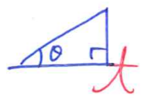
以上のことから ···



上図のように, 鋭角の 1 つを θ, 各辺を x, y, r とする.
先に見た通り,

$$\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{x}$$

の値は θ の大きさのみで決まる.

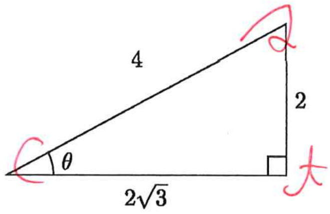
$\frac{y}{r} = \sin\theta$	正弦	
$\frac{x}{r} = \cos\theta$	余弦	
$\frac{y}{x} = \tan\theta$	正接	

★左下にθ, 右下に直角

問題

以下の図形の $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ.

(1)

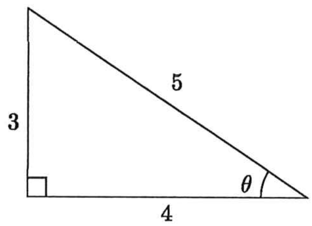


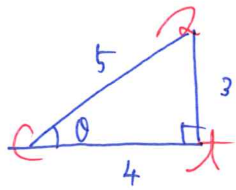
$$\sin\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2)





$$\sin\theta = \frac{3}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{4}$$

1.2 三角比の表の利用

三角比の表を使ってみよう.

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
⋮	⋮	⋮	⋮
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
⋮	⋮	⋮	⋮

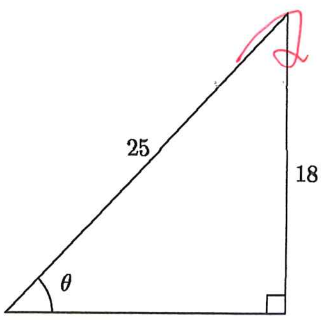
次の値を求めよ.

(1) $\sin 6^\circ \fallingdotseq 0.1045$

(2) $\cos 8^\circ \fallingdotseq 0.9903$

(3) $\tan 10^\circ \fallingdotseq 0.1763$

以下の θ のおおよその値を三角比を用いて求めよ.



$$\sin\theta = \frac{18}{25} = \frac{18}{25}\times\frac{4}{4}$$

$$= \frac{72}{100} = 0.72.$$

上の表から、$\sin\theta \fallingdotseq 0.72$ となるのは、46°の時.

$\therefore\ \theta \fallingdotseq 46^\circ$

問題

三角比の表を用いて以下のおおよその値を求めよ.

(1) $\sin 25^\circ$

0.4226

(2) $\cos 67^\circ$

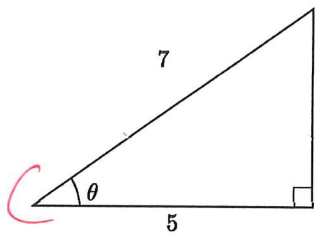
0.3907

(3) $\tan 38^\circ$

0.7813

以下の θ のおおよその値を三角比を用いて求めよ.

(1)



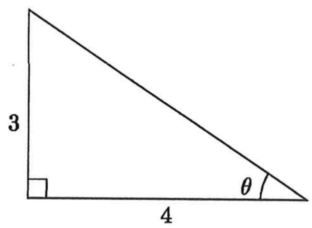
$$\cos\theta = \frac{5}{7}$$

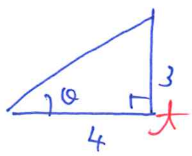
$$\fallingdotseq 0.714$$

0.714
7) 50
49
10
7
30
28

$\therefore\ \theta \fallingdotseq 44^\circ$

(2)





$$\tan\theta = \frac{3}{4}$$

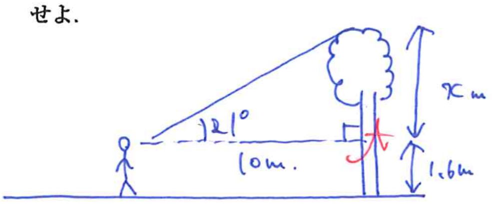
$$= 0.75.$$

$\therefore\ \theta \fallingdotseq 37^\circ$

1.3 三角比の活用

文章問題を解いてみよう．

(1) 木の根本から水平に 10 m 離れた地点に立って木の先端を見上げると，水平面とのなす角が 21° であった．目の高さを 1.6 m として，木の高さを求めよ．ただし，小数第 2 位を四捨五入せよ．



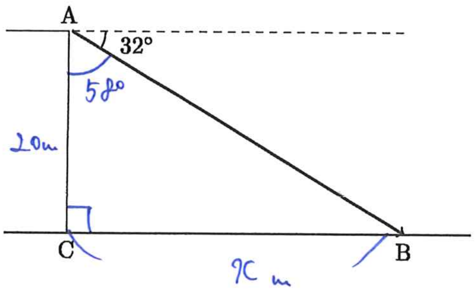
上図から，$\tan 21^\circ = \dfrac{x}{10}$

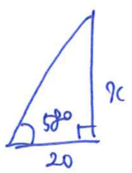
$x = 10 \times \tan 21^\circ$
$= 10 \cdot 0.3839$
$= 3.839$

∴ 木の高さは $3.839 + 1.6$
$= 5.439$

約 5.4 m

(2) 地上からの高さ 20 m の地点 A で地上の場所 B を見下ろしたら，その角は下の図のように水平面に対して 32° であった．B は，A の真下の地点 C から何 m 離れているか．1m 未満を四捨五入して求めよ．





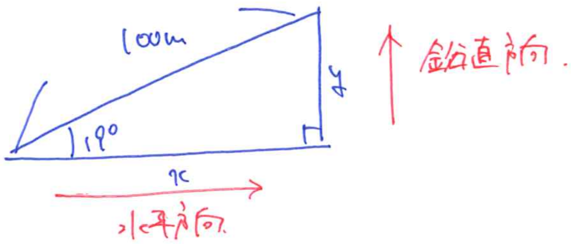
$\dfrac{x}{20} = \tan 58^\circ$

$x = 20 \times 1.6003$
$= 32.006$

∴ 約 32 m

(3) 傾斜角 19° の坂をまっすぐに 100 m 登る．このとき，以下の問いに 1m 未満を四捨五入して答えよ．

(a) 鉛直方向には何 m 上がることになるか．



$\dfrac{y}{100} = \sin 19^\circ$

∴ $y = 100 \times 0.3256$
$= 32.56$

約 33 m

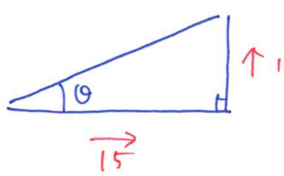
(b) 水平方向には何 m 進ことになるか．

$\cos 19^\circ = \dfrac{x}{100}$

$x = 100 \times \cos 19^\circ$
$= 100 \times 0.9455$
$= 94.55$

約 95 m

(4) 車椅子用に屋外に設置するスロープについて，その勾配は $\dfrac{1}{15}$ 以下にするという基準がある．
スロープの基準を 1° 単位で設定する場合，この基準を満たすには，傾斜角は何度以下にしなければならないか．ここで，勾配とは，水平方向に 1 進ときに鉛直方向に上がる高さを表す．



勾配 $\dfrac{1}{15}$ … 右に15進んだら上に1進む．

$\tan\theta$ の値が $\dfrac{1}{15}$ 以下になればいい．

$\dfrac{1}{15} = 0.066\cdots$

$\tan\theta$ の値が $0.066\cdots$ 以下

∴ 3° 以下

2 三角比の相互関係

2.1 三角比の相互関係

相互関係

(1) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

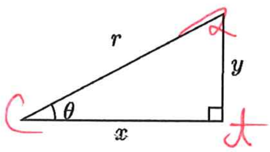
(3) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

証明しよう．

<proof>

(1) について

三角比の定義から，



$\dfrac{y}{r} = \sin\theta$

$\dfrac{x}{r} = \cos\theta$

$\dfrac{y}{x} = \tan\theta$

なので，

$$x = r\cos\theta \quad , y = r\sin\theta \qquad \cdots(*)$$

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{」(1)}$$

(2) について

上図の三角形において，三平方の定理より，

$$x^2 + y^2 = r^2$$

この式に (*) 代入して

$$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2$$

$$\therefore\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \text{」(2)}$$

(3) について

(2) の式の辺々を $\cos^2\theta$ で割ると，

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

ここで (1) より $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ なので，

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

□

注) $(\cos\theta)^2$ のことを $\cos^2\theta$ とかく．

相互関係を用いて，1つの三角比から他の三角比を求めてみよう．

(1) θ は鋭角とする．$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ．

<Ans>

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から，

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

ここで，$0° < \theta < 90°$ なので，

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad /\!/$$

また，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ から，

$$\tan\theta = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad /\!/$$

(2) θ は鋭角とする．$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ．

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta = \frac{8}{9}$$

$0° < \theta < 90°$ より $\sin\theta > 0$

$$\therefore\ \sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad /\!/$$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$\tan\theta = 2\sqrt{2} \quad /\!/$$

(3) θ は鋭角とする．$\tan\theta = 2$ のとき，$\cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ．

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$1 + 4 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{5}$$

$0° < \theta < 90°$ より $\cos\theta > 0$

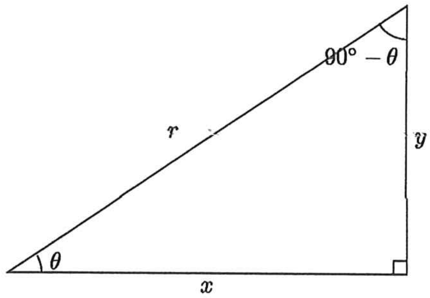
$$\therefore\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

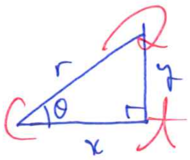
$$\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore\ \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad /\!/$$

2.2　$90° - \theta$ の三角比



上の図から,

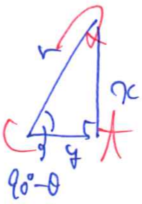


$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

また,



$\sin(90° - \theta) = \dfrac{x}{r}$

$\cos(90° - \theta) = \dfrac{y}{r}$

$\tan(90° - \theta) = \dfrac{x}{y}$

よって, $90° - \theta$ の三角比は, θ の三角比を用いて以下のように表すことができる.

$90° - \theta$ の三角比

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$\tan(90° - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$

この関係式を用いて, ある三角比を別の角の三角比で表してみよう.　たして90°

(1) $\sin 53° = \cos 27°$

(2) $\cos 86° = \sin 4°$

(3) $\tan 43° = \dfrac{1}{\tan 47°}$

本当に成り立っているのかを三角比の表で確認してみよう.

以下の ( ) に適する鋭角の角度を入れよ.

(1) $\sin 64° = \cos(26°)$

(2) $\cos 34° = \sin(56°)$

(3) $\tan 29° = \dfrac{1}{\tan(61°)}$

以下の三角比を 45° 以下の三角比で表せ.

(1) $\sin 59°$

$= \cos 31°$

(2) $\cos 78°$

$= \sin 12°$

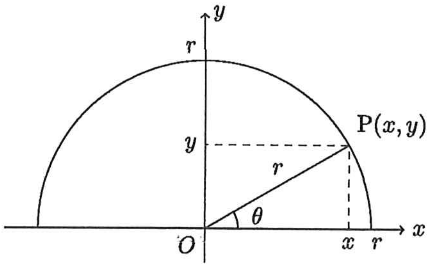
(3) $\tan 81°$

$= \dfrac{1}{\tan 9°}$

3　三角比の拡張

3.1　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ への拡張

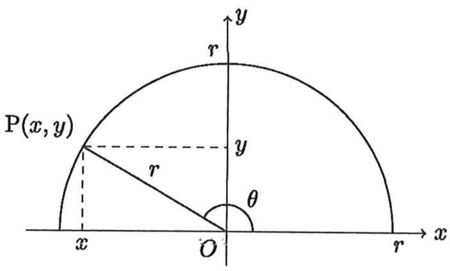
鋭角でしか考えることができなかった三角比を, 鋭角以外でも考えることのできるように拡張しよう.



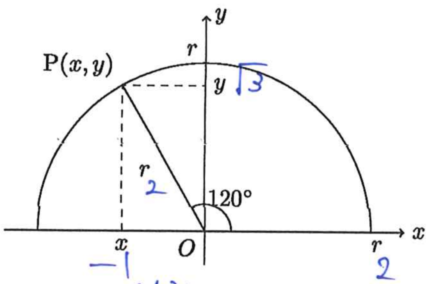
半径 r 上の円上の点を $\mathrm{P}(x, y)$ とする. x 軸の正の向きと OP のなす角を θ とし, 三角比を以下のように定義.

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

座標で定義することで, $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ での三角比を定義できる.



この定義を用いて, 120° の三角比を求めてみよう.



r=2 にしてみると…

(1) $\sin 120^\circ$

$= \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ //

(2) $\cos 120^\circ$

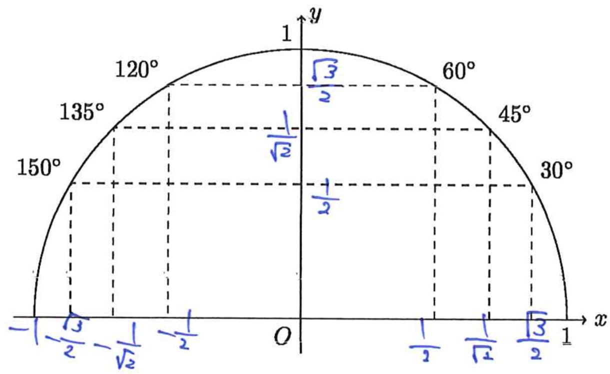
$= \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ //

(3) $\tan 120^\circ$

$= -\sqrt{3}$ //

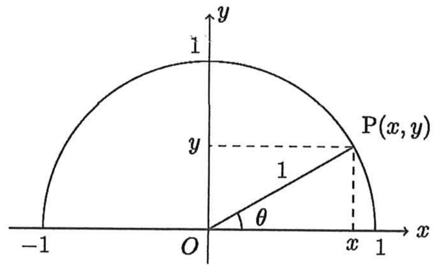
三角比の値は, 三角形の大きさ (円の半径の大きさ) に依らず決まので, $r = 1$ として考えることが多い. (これを単位円という)

単位円を用いて, 下の表を埋めてみよう.



θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

三角比についてまとめてみる.



単位円で考えると, 点 P の座標 (x, y) は

$x =$ $\cos\theta$　　, $y =$ $\sin\theta$

また, 点 P は半円上にあることから,

$0 \leqq y \leqq 1$　,　$-1 \leqq x \leqq 1$

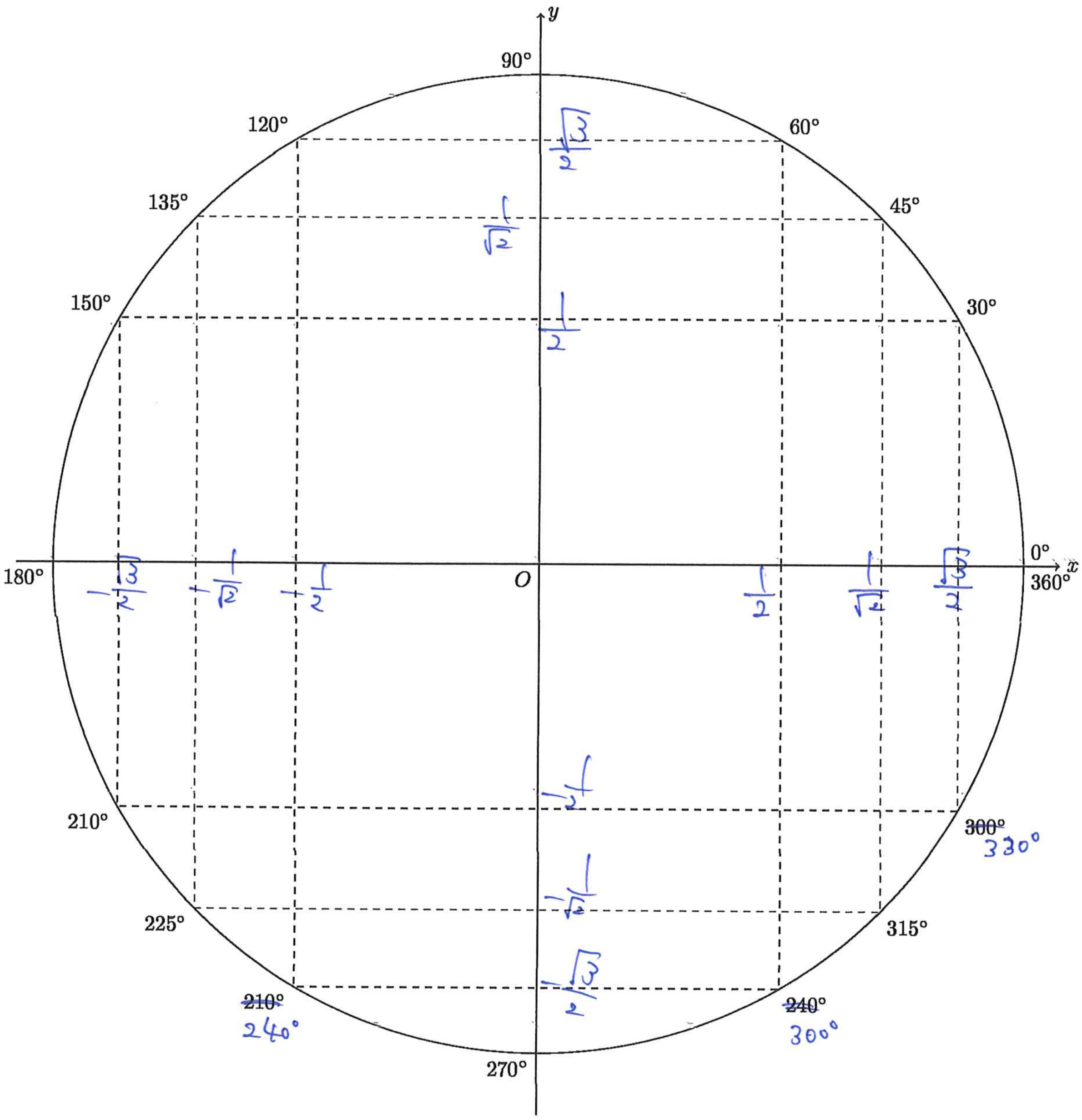
なので, $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ において,

$0 \leqq \sin\theta \leqq 1$　,　$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ なので, $\tan\theta$ は直線 OP の 傾き

3.2　更なる拡張 $(+\alpha)$

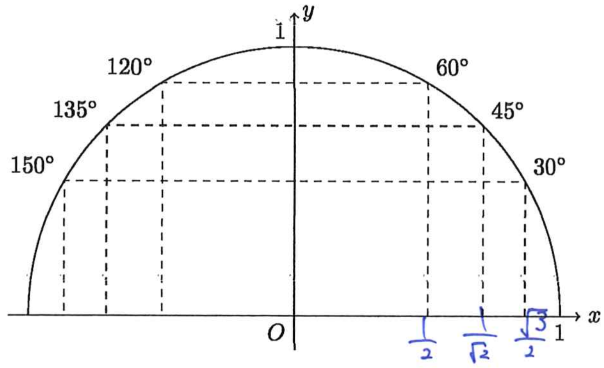
同様にして 360° まで拡張することもできる．単位円で考えてみよう．



θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

3.3　$180° - \theta$ の三角比

復習



同じ

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

90°を境に,異符号.

上の表から天下り的に性質を見つけよう.

$180° - \theta$ の三角比

$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$

$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

以下の三角比を鋭角の三角比で表せ.

(1) $\sin 124° = \sin 56°$

(2) $\cos 134° = -\cos 46°$

(3) $\tan 157° = -\tan 23°$

以下の値を, 三角比の表を用いて求めよ

(1) $\sin 159° = \sin 21°$

$\fallingdotseq 0.3584$

(2) $\cos 178° = -\cos 2°$

$= -0.9994$

(3) $\tan 151° = -\tan 29°$

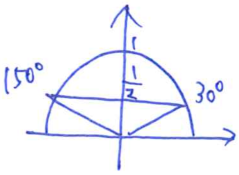
$= -0.5543$

単位円を描く!!

3.4　三角比の等式

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき, 次の等式を満たす θ の値を求めよ.

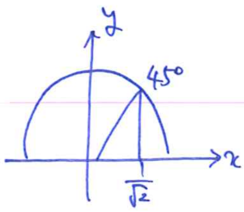
(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$



左図から,

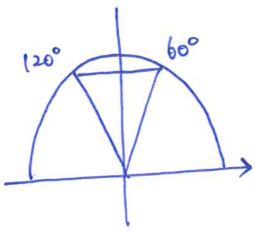
$\theta = 30°, 150°$ //

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$



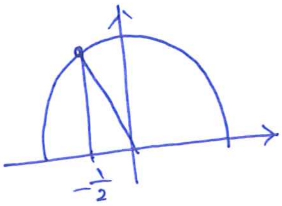
左図から, $45°$ //

(3) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



左図から, $\theta = 60°, 120°$ //

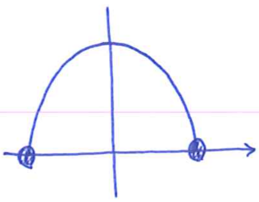
(4) $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$



左図から.

$\theta = 120°$ //

(5) $\sin\theta = 0$

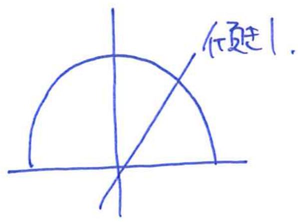


高さ0.

i.e. 左図から,

$\theta = 0°, 180°$ //

(6) $\tan\theta = 1$



左図から,

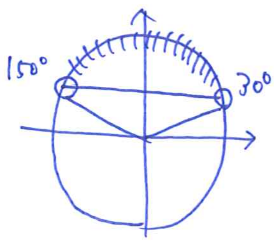
$\theta = 45°$ //

単位円で!!

3.5　三角比の不等式

$0° \leqq \theta < 360°$ のとき，次の等式を満たす θ の値の範囲を求めよ.

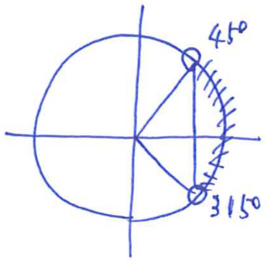
(1) $\sin\theta > \dfrac{1}{2}$



左図から

$30° < \theta < 150°$

(2) $\cos\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

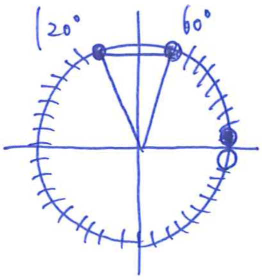


左図より

$0° \leqq \theta < 45°$,

$315° < \theta < 360°$

(3) $\sin\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

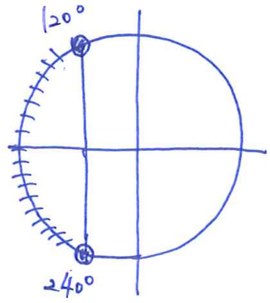


左図より

$0° \leqq \theta \leqq 60°$,

$120° \leqq \theta < 360°$

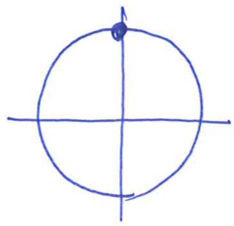
(4) $\cos\theta \leqq -\dfrac{1}{2}$



左図より

$120° \leqq \theta \leqq 240°$

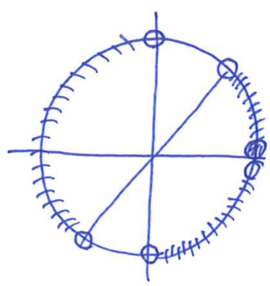
(5) $\sin\theta \geqq 1$



左図から.

$\theta = 90°$

(6) $\tan\theta < 1$　傾きは1より小



傾きは1より小

$0° \leqq \theta < 45°$,

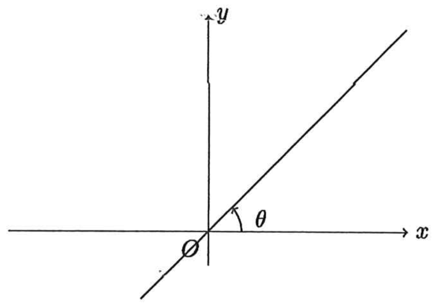
$90° < \theta < 240$,

$270° < \theta < 360°$

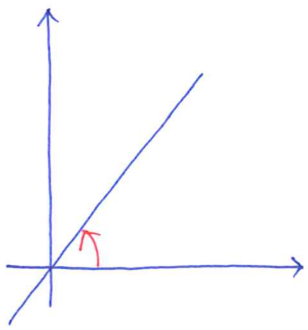
3.6　直線の傾きと $\tan\theta$

☆ $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする.

下の図のように, x 軸の正の部分から, 反時計回りに直線まで測った角度を直線と x 軸の正の向きとのなす角という.

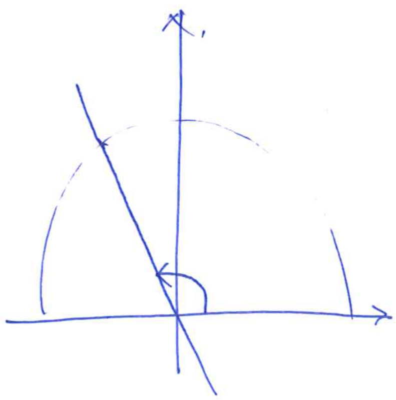


(1) 直線 $y = x$ と x 軸の正の向きとのなす角を求めよ.



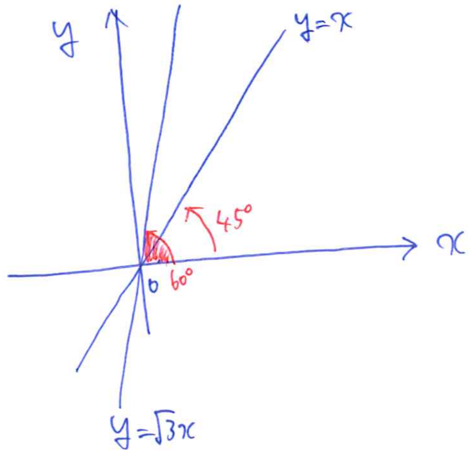
$\underline{45^\circ}$ //

(2) 直線 $y = -\sqrt{3}x$ と x 軸の正の向きとのなす角を求めよ.



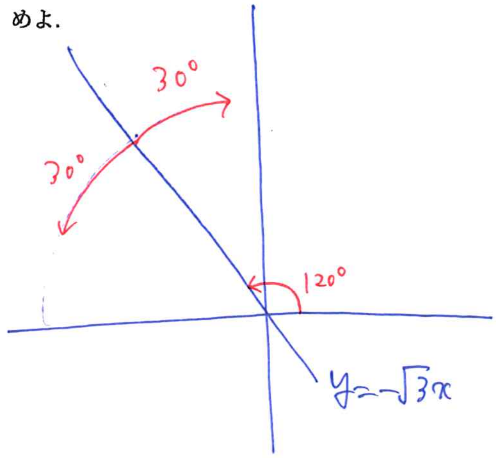
$\underline{120^\circ}$ //

(3) 直線 $y = x$ と直線 $y = \sqrt{3}x$ のなす鋭角を求めよ.



上図から,　$60^\circ - 45^\circ = \underline{15^\circ}$ //

(4) 直線 $y =$ $-\sqrt{3}x$ とのなす鋭角が 30° になる直線の方程式を求めよ.



上図から,

$\underline{x = 0,\quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x}$ //

3.7 相互関係

復習

相互関係

(1) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$

(3) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

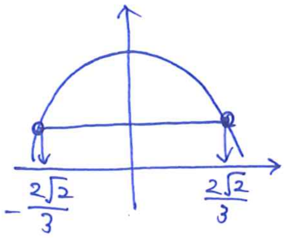
$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする． $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ のうち，1 つが次の値をとるとき, 他の 2 つの値を求めよ.

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{3}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\cos^2\theta = \dfrac{8}{9}$

$\cos\theta = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$



$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

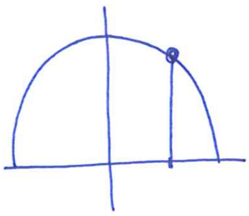
i) $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき

$\tan\theta = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

ii) $\cos\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき

$\tan\theta = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ //

(2) $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$



$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\sin^2\theta = \dfrac{16}{25}$

左図より $\sin\theta > 0$ より

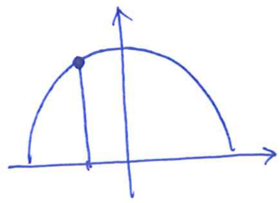
$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ //

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\tan\theta = \dfrac{4}{3}$ //

(3) $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より



$\sin^2\theta = \dfrac{8}{9}$

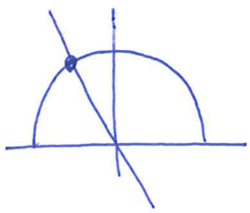
左図より $\sin\theta > 0$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ //

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\tan\theta = -2\sqrt{2}$ //

(4) $\tan\theta = -2$



$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$1 + 4 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\cos^2\theta = \dfrac{1}{5}$

図より $\cos\theta < 0$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$ //

よって, $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta$

$= -2 \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ //

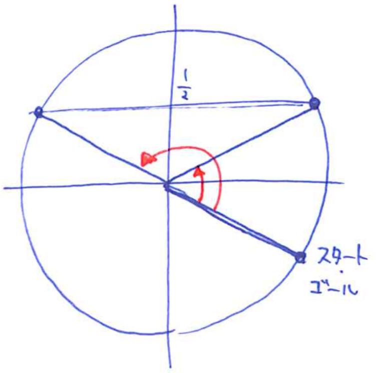
1周する.

30° 逆もどりした地点から1周する.

3.8 始点のズレた三角比の方程式

$0° \leqq \theta < 360°$ のとき, 以下の方程式, 不等式を解け.

(1) $\sin(\theta - 30°) = \frac{1}{2}$

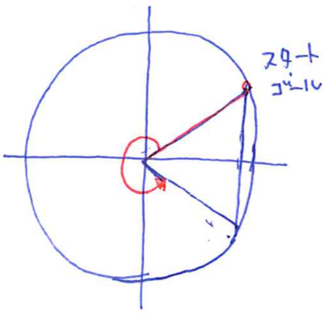


左図より

$\theta = 60°, 180°$ //

30° すすんだ地点から1周する.

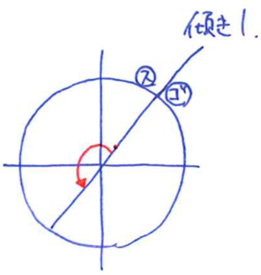
(2) $\cos(\theta + 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



左図から,

$\theta = 0°, 300°$ //

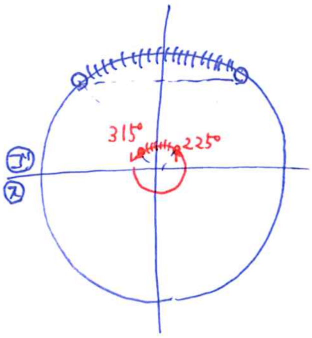
(3) $\tan(\theta + 45°) = 1$



左図から,

$\theta = 0°, 180°$ //

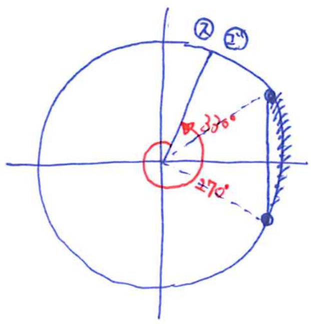
(4) $\sin(\theta - 180°) > \frac{1}{\sqrt{2}}$



左図より.

$225° < \theta < 315°$ //

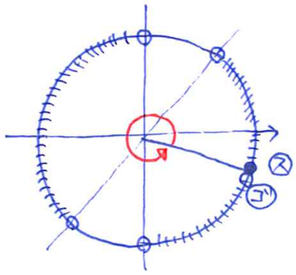
(5) $\cos(\theta + 60°) \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$



左図より

$270° \leqq \theta \leqq 330°$ //

(6) $\tan(\theta - 30°) < 1$



左図から.

$0° \leqq \theta < 75°$,

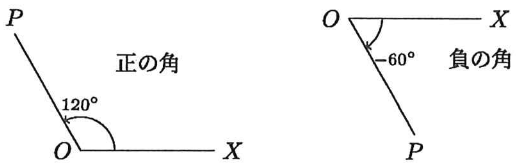
$120° < \theta < 255°$,

$300° < \theta < 360°$ //

4　角の拡張

4.1　拡張

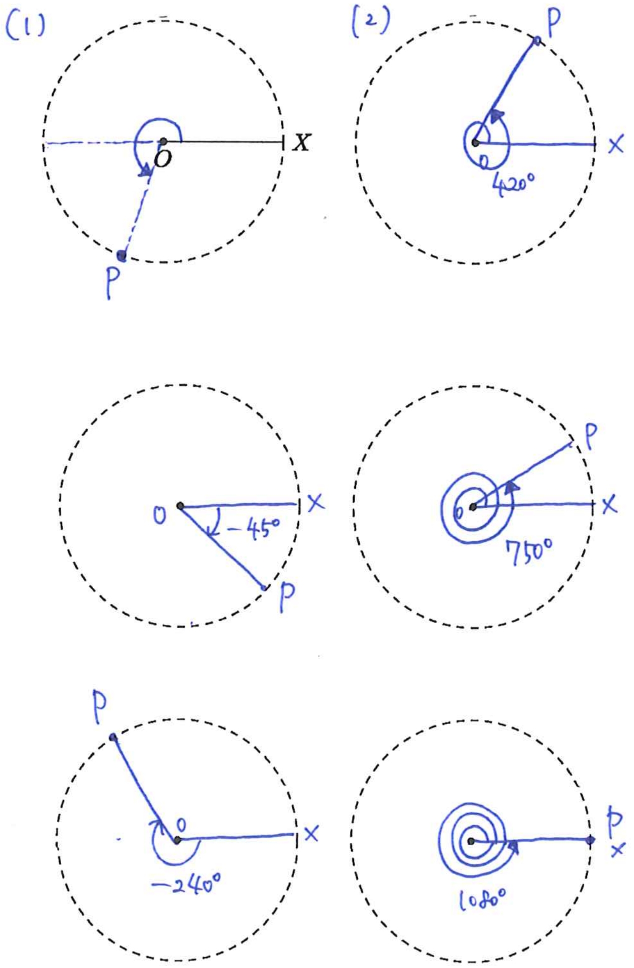
角を負の世界へ拡張しよう.
平面上で, 点 O を中心として半直線 OP を回転させる.
このとき, 半直線 OP のことを<u>動径</u>
動径の最初の位置である半直線 OX のことを<u>始線</u>



上図のように, 反時計回りに測った回転の角を「正の角」
時計回りに測った回転の角を「負の角」という.

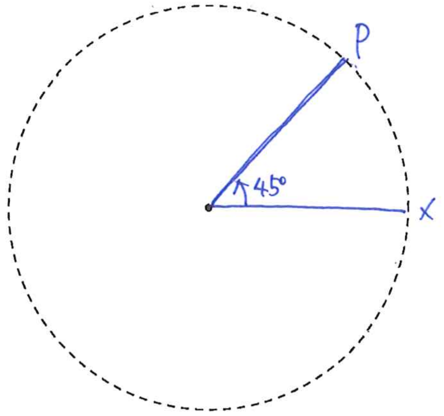
問題
次の動径を図示せよ.

(1) 260°
(2) 420° $= 360° + 60°$
(3) −45°
(4) 750° $= 360° + 360° + 30°$
(5) −240°
(6) 1080° $= 360° + 360° + 360°$



問題

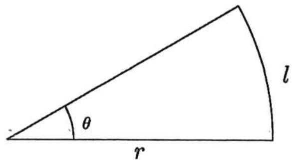
(1) 45° の動径と同じ位置にある角度を正, 負それぞれ 2 つずつあげよ.



$45° + 360° = 405°$
$45° + 360° + 360° = 765°$
$45° - 360° = -315°$
$45° - 360° - 360° = -675°$

角度 θ に対し動径の位置は, <u>360</u>° 回転するごとに一致する.

4.2 弧度法



定義 (弧度法)

半径 r, 弧長 l に対し,

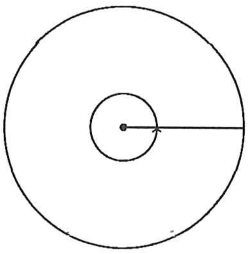
$$\theta = \frac{l}{r}\ (rad)$$

と定義する.
単位 (rad) はラジアンと読む. 省略することが多い.

ラジアンに円の大きさには関係しないので, 半径 1 で考えると便利である.

例
360° を弧度法で表す.

$\boxed{円周 \cdots 2\pi r}$



半径 1 の円の弧長 (円周) は

2π なので,

$360^\circ = 2\pi$

問題
度数法で表された角度を弧度法で表せ.

(1) 30°

$360^\circ = 2\pi$
$\times \frac{1}{12}$
$30^\circ = \frac{1}{6}\pi$ //

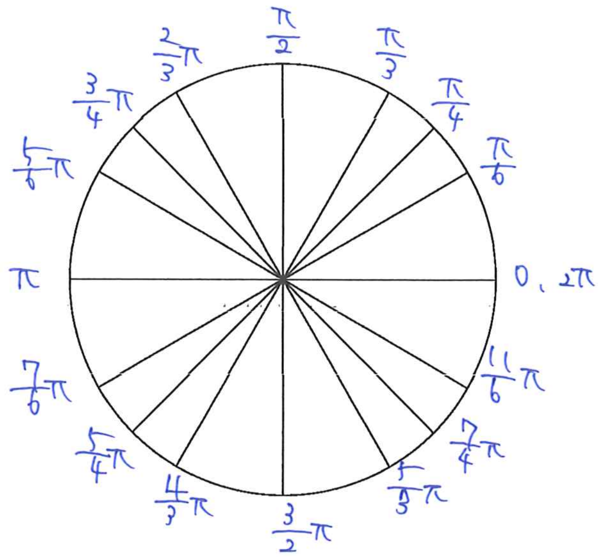
(2) 120°

$360^\circ = 2\pi$
$\times \frac{1}{3}$
$120^\circ = \frac{2}{3}\pi$ //

(3) 270°

$360^\circ = 2\pi$
$\times \frac{3}{4}$
$270^\circ = \frac{3}{2}\pi$ //

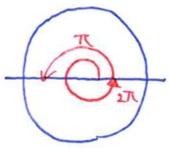
下の図に弧度法で角度を書き入れよう.



問題
次の角度を $0 \leqq \theta < 2\pi$ の弧度法で表せ.

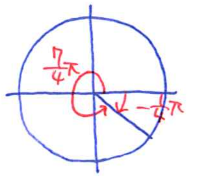
(1) 3π

$= 2\pi + \pi$



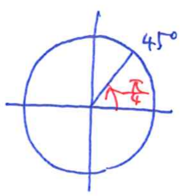
π //

(2) $-\frac{1}{4}\pi = \frac{7}{4}\pi - 2\pi$



$\frac{7}{4}\pi$ //

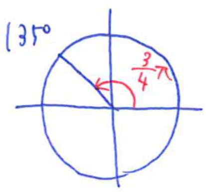
(3) 45°



$\frac{\pi}{4}$ //

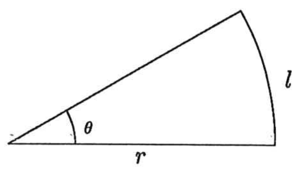
(4) 495°

$= 360^\circ + 135^\circ$



$\frac{3}{4}\pi$ //

4.3 扇形



弧度法の定義より,

$$\theta = \frac{l}{r}\ (rad)$$

なので,

弧長 $l =$ $r\theta$

次に, 円の面積 πr^2 に対して, 扇形の面積を考える.
円 1 周 2π に対し, 扇形は角度 θ 分であるので,
扇形の面積 S は

$$S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2} r^2 \theta$$

問題
以下の扇形の弧長 l と面積 S を求めよ.

(1) 半径 4, 中心角 $\frac{1}{2}\pi$

$$l = r\theta = 4 \cdot \frac{1}{2}\pi = \underline{2\pi}_{//}$$

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{2}\pi = \underline{4\pi}_{//}$$

(2) 半径 2, 中心角 $\frac{7}{6}\pi$

$$l = 2 \cdot \frac{7}{6}\pi = \underline{\frac{7}{3}\pi}_{//}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{7}{6}\pi = \underline{\frac{7}{3}\pi}_{//}$$

(3) 半径 3, 中心角 $\frac{5}{3}\pi$

$$l = 3 \cdot \frac{5}{3}\pi = \underline{5\pi}_{//}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{5}{3}\pi = \underline{\frac{15}{2}\pi}_{//}$$

6 加法定理

6.1 計算練習

「75° の三角比を求めたい．」(← 目標)

加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

(複号同順)

加法定理を使って 75° の三角比を求めてみよう．

$75° = 30° + 45°$ であるで

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°)$$
$$= \sin 30° \cdot \cos 45° + \cos 30° \cdot \sin 45°$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} /\!/$$

$$\cos 75° = \cos(30° + 45°)$$
$$= \cos 30° \cdot \cos 45° - \sin 30° \cdot \sin 45°$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} /\!/$$

$$\tan 75° = \tan(30° + 45°)$$
$$= \frac{\tan 30° + \tan 45°}{1 - \tan 30° \cdot \tan 45°}$$
$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1}$$
$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3} /\!/$$

計算練習

(1) 15° の三角比を求めよ．

$15° = 45° - 30°$ であるで

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°)$$
$$= \sin 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \sin 30°$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} /\!/$$

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°)$$
$$= \cos 45° \cdot \cos 30° + \sin 45° \cdot \sin 30°$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} /\!/$$

$$\tan 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°}$$
$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{3} /\!/$$

(2) $\frac{11}{12}\pi$ の三角比を求めよ．

$\frac{11}{12}\pi = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi$ であるで

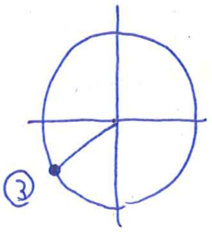
$$\sin \frac{11}{12}\pi = \sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi\right)$$
$$= \sin\frac{3}{4}\pi \cdot \cos\frac{1}{6}\pi + \cos\frac{3}{4}\pi \sin\frac{1}{6}\pi$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} /\!/$$

$$\cos \frac{11}{12}\pi = \cos\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi\right)$$
$$= \cos\frac{3}{4}\pi \cdot \cos\frac{1}{6}\pi - \sin\frac{3}{4}\pi \cdot \sin\frac{1}{6}\pi$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} /\!/$$

$$\tan \frac{11}{12}\pi = \frac{\sin\frac{11}{12}\pi}{\cos\frac{11}{12}\pi}$$
$$= -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = -(2 + \sqrt{3}) /\!/$$

(3) α の動径が第 3 象限, β の動径が第 4 象限にあり,
$\sin\alpha = -\frac{3}{5}, \cos\beta = \frac{4}{5}$ のとき, 以下の問いに答えよ.

(a) $\cos\alpha$ の値を求めよ.



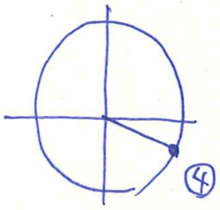
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より

$\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$

左図から, $\cos\alpha$ は負

$\therefore \cos\alpha = -\frac{4}{5}$ //

(b) $\sin\beta$ の値を求めよ.



$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ より

$\sin^2\beta = \frac{9}{25}$

左図から, $\sin\beta$ は負

$\therefore \sin\beta = -\frac{3}{5}$ //

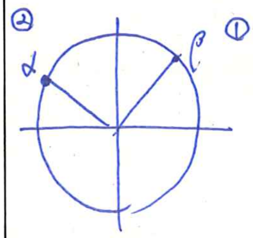
(c) $\sin(\alpha+\beta)$ の値を求めよ.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$= -\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$$
$$= 0 \quad //$$

(d) $\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ.

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$= \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$$
$$= \frac{-16}{5} + \frac{9}{5} = -\frac{7}{5} \quad //$$

(4) α の動径が第 2 象限, β の動径が第 1 象限にあり,
$\sin\alpha = \frac{2}{3}, \cos\beta = \frac{3}{5}$ のとき, $\sin(\alpha-\beta), \cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ.



$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\cos^2\alpha = \frac{5}{9}$

$\sin^2\beta = \frac{16}{25}$

よって, 左上図から, $\cos\alpha$ は負, $\sin\beta$ は正

$\therefore \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \ \sin\beta = \frac{4}{5}$

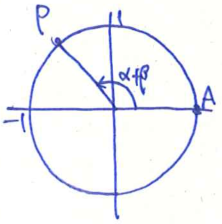
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}$$
$$= \frac{6}{15} + \frac{4\sqrt{3}}{15}$$
$$= \frac{6+4\sqrt{3}}{15} \quad //$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$= \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\frac{3}{5} - \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$$
$$= \frac{-3\sqrt{5}-8}{15} \quad //$$

6.2 **証明**

加法定理

＜証明＞



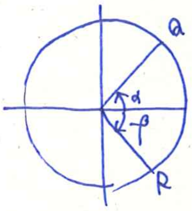
左図において。

A(1, 0)

P(cos(α+β), sin(α+β))

なので

$$AP^2 = \sin^2(\alpha+\beta) + (1-\cos(\alpha+\beta))^2$$
$$= \sin^2(\alpha+\beta) + 1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta)$$
$$= 2 - 2\cos(\alpha+\beta)$$



同様に Q(cos α, sin α)

R(cos(−β), sin(−β))

また、$\cos(-\beta) = \cos\beta$

$\sin(-\beta) = -\sin\beta$

なので

$$QR^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - (-\sin\beta))^2$$
$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + (\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta)$$
$$= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta.$$

中心角が同じなので AP = QR.

$$\therefore AP^2 = QR^2$$

$$2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$$

よって $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

この式のβを−βへおきかえて、

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad (2)$$

また、$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$ より。

(2)の式のαを$\frac{\pi}{2}-\alpha$へおきかえる。

$$(\text{左辺}) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)$$
$$= \sin(\alpha+\beta)$$

$$(\text{右辺}) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\beta$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

$$\therefore \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\beta\sin\beta$$

この式のβを−βへおきかえて、

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad (1)$$

また、$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$
$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

分母・分子をcos α cos βでわると、

$$(\text{右辺}) = \frac{\frac{\sin\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}} + \frac{\cancel{\cos\alpha}\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\frac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

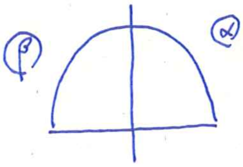
$$\therefore \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

この式のβを−βへおきかえて、

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\tan(-\beta)}$$
$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \quad (3)$$

6.3 演習

(1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}\ \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right), \cos\beta = -\frac{4}{5}\ \left(\frac{\pi}{2} < \beta < \pi\right)$ のとき, $\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha-\beta), \tan(\alpha-\beta)$ の値を求めよ.



$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$

$\sin^2\beta = \frac{9}{25}$

上図より $\cos\alpha > 0$, $\sin\beta > 0$

$\therefore \cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{3}{5}$.

・$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}$

$= 0$ //

・$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$

$= -\frac{7}{25}$ //

・$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

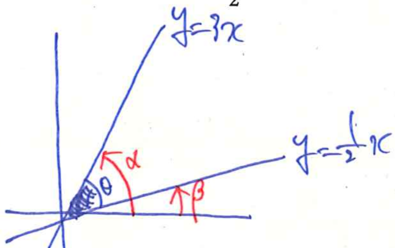
よって, $\tan\alpha = \frac{3}{4}$, $\tan\beta = -\frac{3}{4}$ より

$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}$

$= \frac{\frac{6}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{\frac{6}{4}}{\frac{7}{16}}$

$= \frac{6\cdot\cancel{16}^{4}}{7\cdot\cancel{4}} = \frac{24}{7}$ //

(2) 2 直線 $y = 3x, y = \frac{1}{2}x$ のなす鋭角を求めよ.



左図のように α, β をおく.

求める角θは

$\theta = \alpha - \beta$.

よって, $\tan\alpha = 3$, $\tan\beta = \frac{1}{2}$ より

$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta)$

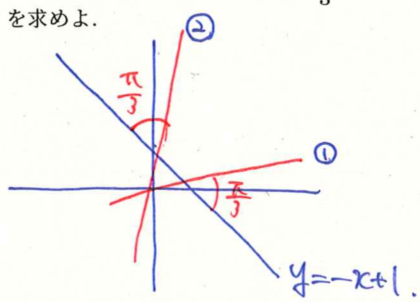
$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}} = 1$.

$\tan\theta = 1$ より, θは鋭角なので

$\theta = \frac{\pi}{4}$ //

(3) 原点を通り, 直線 $y = -x + 1$ と $\frac{1}{3}\pi$ の角をなす直線の方程式を求めよ.



①は x軸とのなす角は $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{6}\pi$.

②は, $\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{12}\pi$.

∴, 求める直線の傾きは.

① $\tan\frac{1}{12}\pi$, $= \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\cdot\tan\frac{\pi}{4}}$

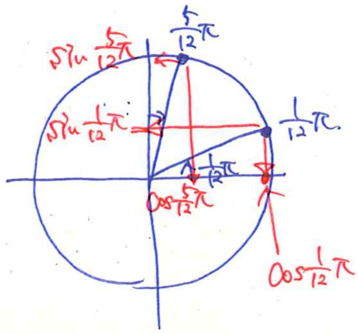
$= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$

② $\tan\frac{5}{12}\pi = \frac{\tan\frac{3}{4}\pi - \tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\frac{3}{4}\pi\cdot\tan\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{-1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$

よって求める直線は

$y = (2-\sqrt{3})x$, $y = (2+\sqrt{3})x$ //



7　加法定理の応用

7.1　復習

加法定理を思い出す．

(1) $\sin(\alpha+\beta)$

$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

(2) $\sin(\alpha-\beta)$

$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

(3) $\cos(\alpha+\beta)$

$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

(4) $\cos(\alpha-\beta)$

$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

(5) $\tan(\alpha+\beta)$

$= \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(6) $\tan(\alpha-\beta)$

$= \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

計算練習

(1) $\sin\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{4}\pi\right)$

$= \sin\frac{1}{3}\pi\cdot\cos\frac{1}{4}\pi + \cos\frac{1}{3}\pi\cdot\sin\frac{1}{4}\pi$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ //

(2) $\cos\left(\frac{1}{12}\pi\right)$　　$\frac{1}{12}\pi = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi$

$= \cos\left(\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{4}\pi\right)$

$= \cos\frac{1}{3}\pi\cdot\cos\frac{1}{4}\pi + \sin\frac{1}{3}\pi\cdot\sin\frac{1}{4}\pi$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ //

(3) $\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ //

(4) $\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right)$

$= \cos\frac{1}{12}\pi$

$= \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(5) $\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right)$

$= \sin\frac{1}{12}\pi$

$= \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(6) $\tan\left(\frac{5}{12}\pi\right)$

$= \dfrac{\sin\frac{5}{12}\pi}{\cos\frac{5}{12}\pi}$

$= \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \dfrac{\cancel{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)}{\cancel{\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)}$

$= 2+\sqrt{3}$ //

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

7.2　2 倍角

考える

$2\alpha=\alpha+\alpha$ と考えることで, 2α の三角比を考える.

(1) $\sin(\alpha+\alpha)$ を α の三角比で表そう.

$$=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot\sin\alpha$$
$$=2\sin\alpha\cos\alpha$$

(2) $\cos(\alpha+\alpha)$ を α の三角比で表そう.

$$=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin\alpha$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

(3) $\cos(\alpha+\alpha)$ を $\sin\alpha$ で表そう.

$$\boxed{\begin{aligned}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha&=1\\ \cos^2\alpha&=1-\sin^2\alpha\end{aligned}}$$

$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$=(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha$$
$$=1-2\sin^2\alpha$$

(4) $\cos(\alpha+\alpha)$ を $\cos\alpha$ で表そう.

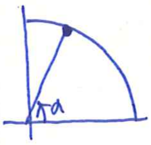
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)$$
$$=2\cos^2\alpha-1$$

(5) $\tan(\alpha+\alpha)$ を $\tan\alpha$ で表そう.

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$$
$$=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

練習問題

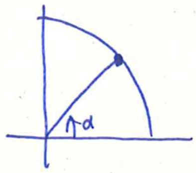
(1) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ で, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ のとき, $\sin 2\alpha$ の値を求めよ.



$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ より, 左図から,
$\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

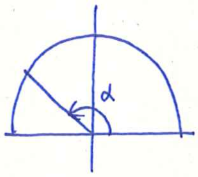
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$$

(2) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ で, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ のとき, $\cos 2\alpha$ の値を求めよ.



$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$
$$=1-2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2$$
$$=1-\frac{18}{25}=\frac{7}{25}$$

(3) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ で, $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ のとき, $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \tan 2\alpha$ の値を求めよ.



$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, 左図から.
$\sin\alpha=\frac{2}{3}$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{-\sqrt{5}}{3}=\frac{-4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$=\frac{5}{9}-\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$
$$=\frac{-\frac{4\sqrt{5}}{9}}{\frac{1}{9}}=-4\sqrt{5}$$

加法定理

$$\cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cdot\cos\theta - \sin\theta\cdot\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ で, ・$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$. ・$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.

7.3 半角

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta,\quad \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

を式変形して,

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2},\quad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

また,

$$\tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

θ を $\frac{\theta}{2}$ に置き換えて,

半角

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

練習

(1) $\cos\frac{\pi}{8}$ の値を求めよ.

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より.

$\cos\frac{1}{4}\pi = 2\cos^2\frac{1}{8}\pi - 1$.

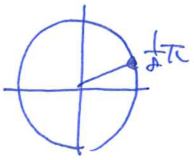
$\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\cos^2\frac{1}{8}\pi - 1$

$2\cos^2\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$.

$= \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}+2}{2}$

$\therefore \cos^2\frac{1}{8}\pi = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$



左図より

$\cos\frac{1}{8}\pi > 0$ なので,

$\cos\frac{1}{8}\pi = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ //

(2) $\sin\frac{\pi}{8}$ の値を求めよ.

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ より

$\cos\frac{1}{4}\pi = 1 - 2\sin^2\frac{1}{8}\pi$.

$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - 2\sin^2\frac{1}{8}\pi$

$2\sin^2\frac{1}{8}\pi = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \sin^2\frac{1}{8}\pi = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

左下図から, $\sin\frac{1}{8}\pi > 0$ より

$\sin\frac{1}{8}\pi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

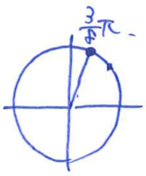
(3) $\cos\frac{3\pi}{8}$ の値を求めよ.

・(1)と同様に.

$\cos\frac{3}{4}\pi = 2\cos^2\frac{3}{8}\pi - 1$.

$2\cos^2\frac{3}{8}\pi = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos^2\frac{3}{8}\pi = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$



左図より $\cos\frac{3}{8}\pi > 0$.

$\therefore \cos\frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

(4) $\tan\frac{3\pi}{8}$ の値を求めよ.

同様にして $\sin\frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\tan\frac{3}{8}\pi = \frac{\sin\frac{3}{8}\pi}{\cos\frac{3}{8}\pi}$

$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

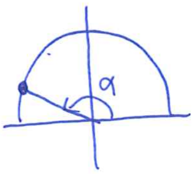
$= \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2}}$

$= \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \sqrt{2}+1$ //

練習

(1) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で, $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ のとき, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ.



$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$. より

$\cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1$.

$2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \cos\alpha + 1$.

$\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\cos\alpha + 1}{2}$

$= \dfrac{-\frac{4}{5} + 1}{2}$

$= \dfrac{\frac{1}{5}}{2}$

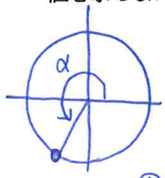
$= \dfrac{1}{10}$

左上図より,

$\cos\dfrac{\alpha}{2} < 0$.

$\therefore\ \cos\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ //

(2) $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ で, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{4}$ のとき, $\sin\dfrac{\alpha}{2}, \cos\dfrac{\alpha}{2}, \tan\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ.



$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ —①

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$.

①より $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$-\dfrac{1}{4} = 1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$-\dfrac{5}{4} = -2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{5}{8}$

左上図より $\sin\dfrac{\alpha}{2} < 0$

$\therefore\ \sin\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$

$= -\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ //

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \cos^2\dfrac{\alpha}{2} = 1$ より

$\dfrac{10}{16} + \cos^2\dfrac{\alpha}{2} = 1$

$\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{6}{16}$

左上図より $\cos\dfrac{\alpha}{2} < 0$

$\therefore\ \cos\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ //

$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ より

$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{10}}{-\sqrt{6}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

$= -\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ //

加法定理
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

8　三角関数の合成

問題

以下の方程式を解け．$(0 \leqq \theta < 2\pi)$

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$$

$$2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = 1.$$

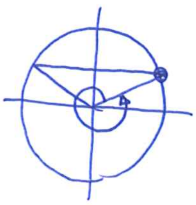
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x + \frac{1}{2}\cdot\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{1}{6}\pi\cdot\sin x + \sin\frac{1}{6}\pi\cdot\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x\cdot\cos\frac{1}{6}\pi + \cos x\cdot\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$$

加法定理

$$\sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$$



左図より

$\theta = 0,\ \frac{2}{3}\pi$.

最後の「加法定理」を用いるために，はじめに $\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{1}{2}$ の形を作った．

問題

以下の不等式を解け．$(0 \leqq \theta < 2\pi)$

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x \leqq 1$$

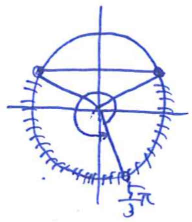
$$2\left(\frac{1}{2}\cdot\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) \leqq 1$$

$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \leqq \frac{1}{2}$$

$$\sin x\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + \cos x\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}$$

$$\sin x\cdot\cos\frac{5}{3}\pi + \cos x\cdot\sin\frac{5}{3}\pi \leqq \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{5}{3}\pi\right) \leqq \frac{1}{2}$$



左図より

$0 \leqq \theta \leqq \frac{1}{2}\pi$，

$\frac{7}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi$

<別解>．

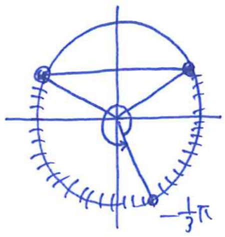
$$2\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) \leqq 1.$$

$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \leqq \frac{1}{2}$$

$$\sin x\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - \cos x\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}$$

$$\sin x\cdot\cos\frac{1}{3}\pi - \cos x\cdot\sin\frac{1}{3}\pi \leqq \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) \leqq \frac{1}{2}$$



左図より

$0 \leqq \theta \leqq \frac{1}{2}\pi$，

$\frac{7}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi$

スタート地点からのズレが少ない方が計算ミス減る？

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき, 以下の方程式を解け.

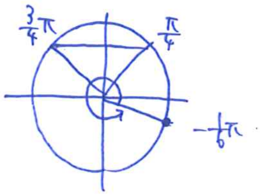
(1) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}$

$$2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin x\cdot\cos\frac{1}{6}\pi - \cos x\cdot\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



左図より

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{6} + \frac{3}{4}\pi$$

$$= \frac{5}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$$

//

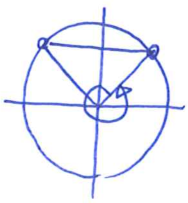
(2) $\sin x + \cos x = 1$

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin x\cdot\cos\frac{1}{4}\pi + \cos x\cdot\sin\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



左図より

$$\theta = 0,\ \frac{1}{2}\pi$$

//

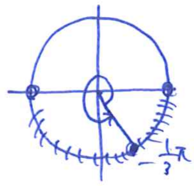
(3) $\sin x - \sqrt{3}\cos x \leqq 0$

$$2\left(\frac{1}{2}\cdot\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) \leqq 0$$

$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \leqq 0$$

$$\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3} - \cos x\sin\frac{1}{3}\pi \leqq 0$$

$$\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) \leqq 0$$



左図より

$$0 \leqq \theta \leqq \frac{1}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi \leqq \theta < 2\pi$$

//

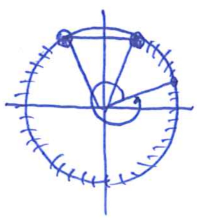
(4) $\sqrt{3}\sin x + \cos x \leqq \sqrt{3}$

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) \leqq \sqrt{3}.$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x\cdot\cos\frac{1}{6}\pi + \cos x\cdot\sin\frac{1}{6}\pi \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



左図より

$$0 \leqq \theta \leqq \frac{1}{6}\pi,\ \frac{\pi}{2} \leqq \theta < 2\pi$$

//