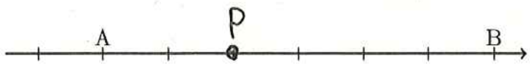
1　中学の復習

1.1　新出用語

(1) 内分

(a) AB を 1 : 2 に内分する点 P

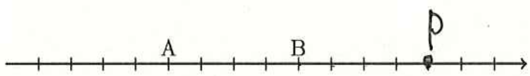


(b) AB を 2 : 1 に内分する点 Q

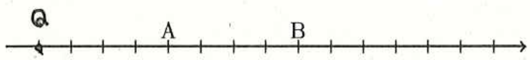
(c) AB を 2 : 1 に内分する点 R

(2) 外分

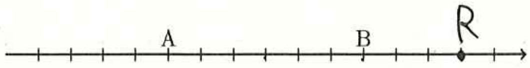
(a) AB を 2 : 1 に外分する点 P



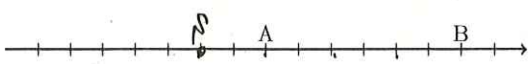
(b) AB を 1 : 2 に外分する点 Q



(c) AB を 3 : 1 に外分する点 R



(d) AB を 1 : 4 に外分する点 S



1.2　既習用語の確認

(1) 二等辺三角形とは

2組の辺が等しい三角形.

(2) 正三角形とは

3組の辺が等しい三角形.

(3) 正方形とは

すべての辺が等しく，角が90°である四角形.

(4) 長方形とは

すべての角が90°である四角形.

(5) 平行四辺形とは

対辺が平行である四角形.

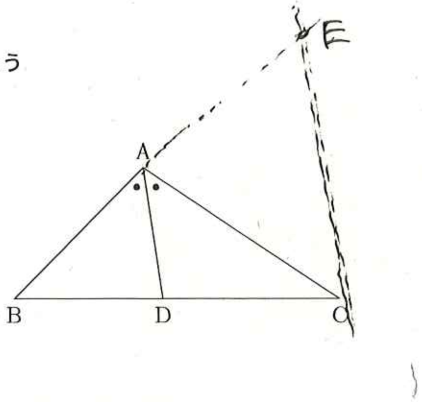
2組の

(6) 台形とは

1組の対辺が平行である四角形.

1.3 証明しよう

1.3.1 定理 1



上の図において，以下の等式が成立する．

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$$

Proof.

点Cを通り，直線ADに平行な直線と，
辺BAのA側への延長の交点をEとおく．

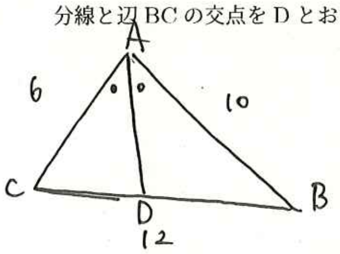
AD // CE より，
$\angle DAC = \angle ACE$，
$\angle BAD = \angle BEC$．
$\angle BAD = \angle CAD$ より，
$\angle ACE = \angle AEC$．
∴ △ACE は二等辺三角形，
i.e. AC = AE．―※1

さて，AD // CE から，
BA : AE = BD : DC．
※1から，
BA : AC = BD : DC．

□

練習問題

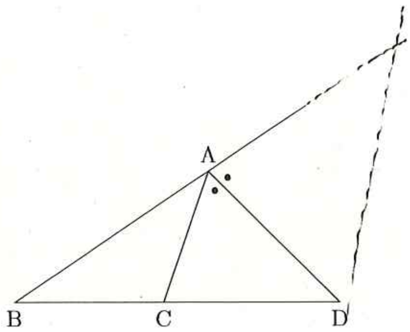
AB= 10, BC= 12, CA= 6 である △ABC において，∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とおく．線分 BD の長さを求めよ．



CD : DB = 6 : 10
= 3 : 5

$\therefore BD = 12 \times \frac{5}{8}$
$= \frac{15}{2}$

1.3.2 定理 2



上の図において，以下の等式が成立する．

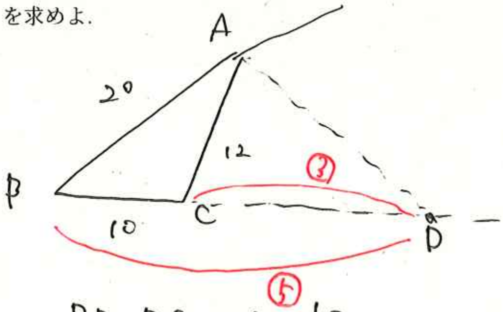
$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$$

Proof.

□

練習問題

AB= 20, BC= 10, CA= 12 である △ABC において，∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とおく．線分 BD の長さを求めよ．



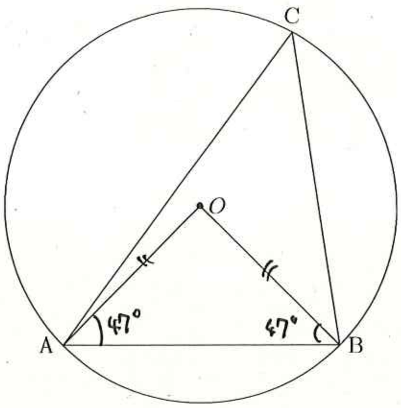
BD : DC = 20 : 12
= 5 : 3

図より CD = 15 ∴ BD = 25

1.4　円周角の定理

指定された角の大きさを求めよ.

(1) ∠OAB= 47° のとき, ∠ACB の値



$\angle AOB = 180^\circ - 2\cdot 47^\circ$

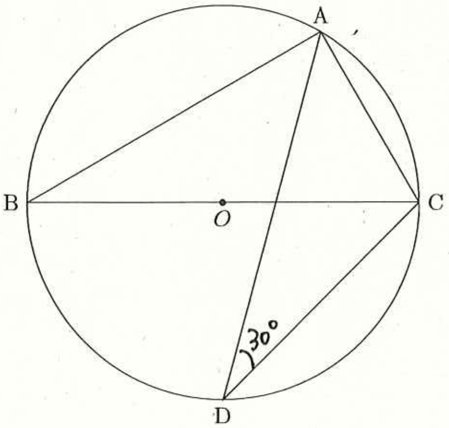
$= 180^\circ - 94^\circ$

$\therefore \angle AOB = 86^\circ$

$\angle ACB = \frac{1}{2} \times 86^\circ$

$= \underline{43^\circ}$ //

(2) ∠ADC= 30° のとき, ∠ACB の値



$\angle ABC = 30^\circ$ (円周角の定理).

BCが直径 ∴. $\angle BAC = 90^\circ$

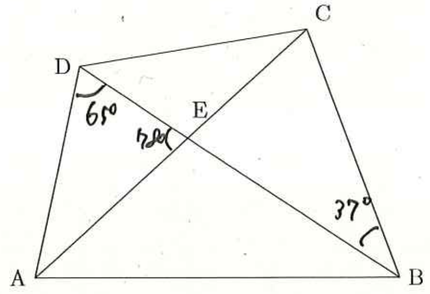
$\therefore \angle ACB = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ)$

$= \underline{60^\circ}$ //

1.5　円周角の定理の逆

以下の図において, 4 点 A, B, C, D は同一円周上にあるか判定せよ.

(1) ∠ADB= 65°, ∠AED= 78°, ∠DBC= 37°



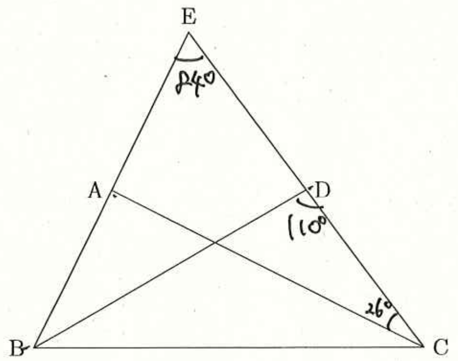
$\angle DAE = 180^\circ - (65^\circ + 78^\circ)$

$= 180^\circ - 143^\circ = 37^\circ$

$\angle DAC = \angle DBC$ より

4点 A, B, C, D は <u>同一円周上.</u> //

(2) ∠BEC= 84°, ∠BDC= 110°, ∠ACD= 26°



$\angle EAC = 180^\circ - (84^\circ + 26^\circ)$

$= 180^\circ - 110^\circ$

$= 70^\circ$.

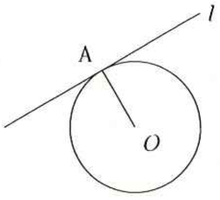
$\angle BAC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

$\therefore \angle BAC = \angle BDC$ より

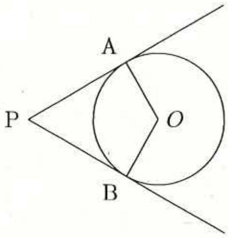
4点 A, B, C, D は <u>同一円周上.</u> //

1.6 円と直線

円と直線の関係についての復習をしよう.



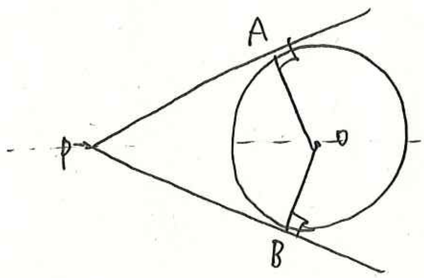
直線 l と線分 OA の関係性 $l \perp OA$



線分 PA と線分 PB の関係性 $AP = BP$

線分 PA と線分 PB の関係性について証明しよう.

Proof.



上図で，$\angle OAP = \angle OBP = 90°$,

半径なので $OA = OB$.

また，OPは共通しているので，

2つの直角三角形．$\triangle OAP$ と $\triangle OBP$ は合同．

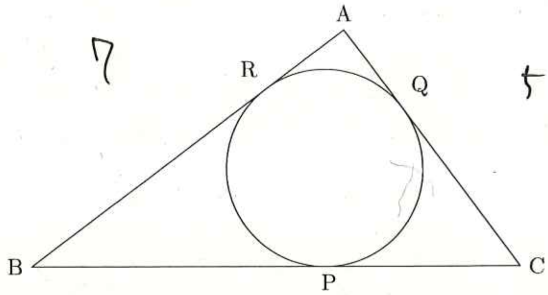
$\therefore PA = PB$

//

□

練習問題

(1) AB= 7, BC= 8, CA= 5 とする．BP の長さを求めよ．



$BP = x$ とおくと $BR = x$. —①

$PC = 8 - x$.

$PC = CQ$ より

$CQ = 8 - x$.

$QA = 5 - (8 - x)$

$= x - 3$.

$AR = QA$

$= x - 3$

$\therefore RB = 7 - (x - 3)$

$= 10 - x$. —②

①, ②より

$x = 10 - x$

$x = 5$

//

1.7 三角形の存在

3 辺の長さが以下のような三角形は存在するか答えよ.
また, 存在する場合に, その三角形が特殊 (直角・二等辺・正など) であれば, それも答えよ.

(1) $1, 2, 2$

存在する.

二等辺三角形.

(2) $3, 4, 5$

存在する

直角三角形

(3) $4, 6, 10$

存在しない

(4) $\sqrt{5}, \sqrt{3}, \sqrt{2}$

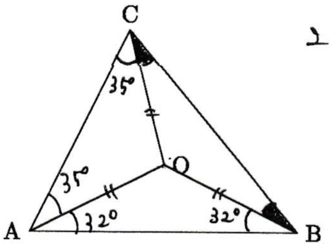
存在する.

直角三角形

2.5 練習問題

指定された角, 辺の大きさを求めよ.

(1) O を △ABC の外心とする. ∠OAB= 32°, ∠OAC= 35° のとき, ∠OBC の値.

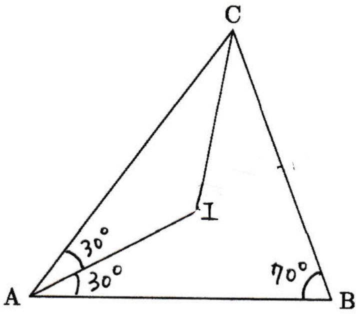


$\angle x = 180° - (70° + 64°)$

$= 46°$

$x = 23°$

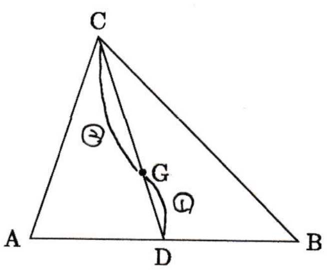
(2) I を △ABC の内心とする. ∠ABC= 70°, ∠IAB= 30° のとき, ∠ICB の値.



$\angle ACB = 50°$

$\therefore \angle ACI = 25°$

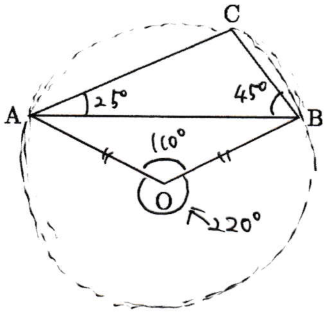
(3) G を △ABC の重心とする. CD= 6 のとき, GD の値.



CG : GD = 2 : 1

GD = 2

(4) O を △ABC の外心とする. ∠CAB= 25°, ∠CBA= 45° のとき, ∠OAB の値.

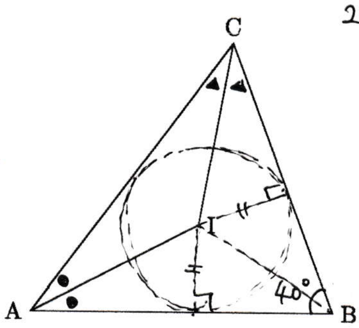


$\angle ACB = 110°$

△AOBは二等辺△なので,

$\angle OAB = 35°$

(5) I を △ABC の内心とする. ∠ABC= 40° のとき, ∠AIC の値.



$2● + 2▲ = 180° - 40°$

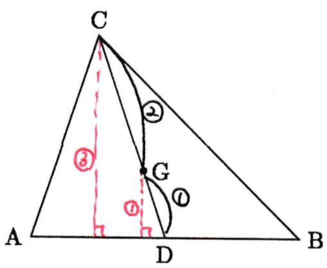
$= 140°$

$● + ▲ = 70°$

$\therefore \angle AIC = 180° - 70°$

$= 110°$

(6) G を △ABC の重心とする. △ABC : △GAB.

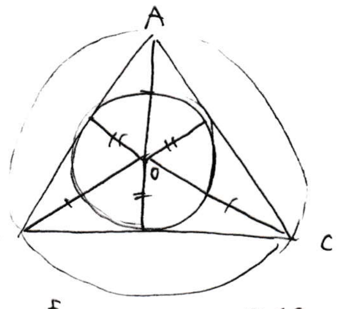


△ABC : △GAB = 3 : 1

2.6　練習問題 2

各問いに答えよ．

(1) △ABC の内心と外心が一致するとき，△ABC はどのような三角形か説明せよ．



図のように点Oから各辺への垂線は等しく，

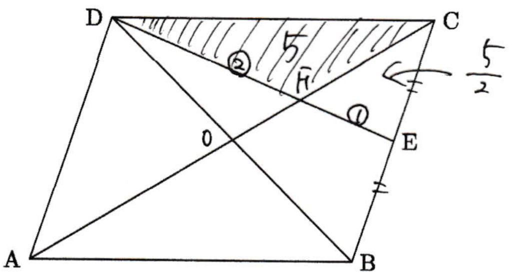
各頂点への辺も等しい．

∴ 6コの直角△は合同．

∴ $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

正三角形 //

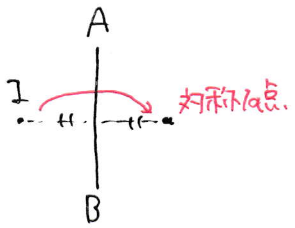
(2) 平行四辺形 ABCD について，辺 BC の中点を E，辺 DE と AC の交点を F，辺 AC と DB の交点を O とする．△DFC の面積が 5 のとき，△AOD の面積を求めよ．



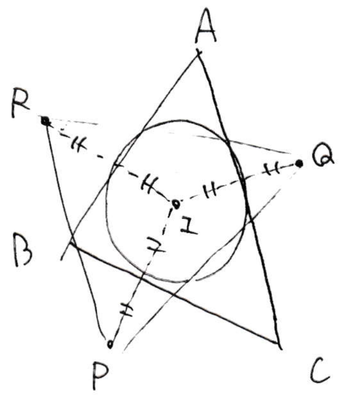
$\triangle DEC = \frac{15}{2}$

$\therefore \triangle DBC = 15$

$\triangle AOD = \frac{15}{2}$ //



(3) △ABC の内心を I とし，3 辺 BC, CA, AB に関して I と対称な点をそれぞれ P, Q, R とする．このとき，I は △PQR についてどのような点であるか．



Iから各辺への垂線の長さは等しく，

対称な点をとっていることから，

$RI = QI = PI$．

∴ Iは △PQR の外心 //

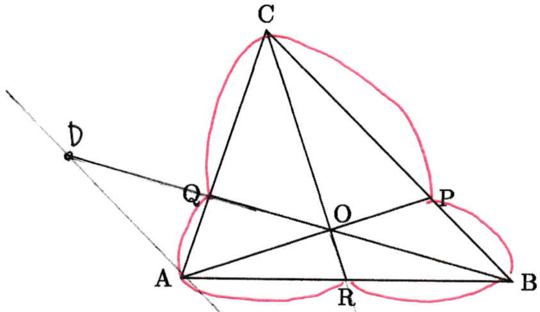
3 チェバメネ

3.1 チェバの定理

チェバの定理

△ABC の辺上にもその延長線上にもない点 O があり，頂点 A, C, C と O を結ぶ直線が向かい合う辺またはその延長線と，それぞれ点 P, Q, R で交わるとき，以下が成立.

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$



Proof. △ABC の頂点 A を通り，辺 BC に平行な直線を引く.

この直線と直線 BQ, CR との交点をそれぞれ D, E とする.

ED // BC から,

△ADQ∽△CBQ→ $CQ : QA = CB : \underline{AD}$ $\therefore \dfrac{QA}{CQ}=\dfrac{AD}{BC}$

△BCR∽△AER →$AR : RB = AE : \underline{CB}$ $\therefore \dfrac{RB}{AR}=\dfrac{CB}{AE}$

また, BP:DA=PO: $\underline{OA}$, PC:AE=PO: $\underline{OA}$ であるから,
△BPO∽△DAO　△PCO∽△AEO

$BP : DA = PC : \underline{AE}$ $\therefore \dfrac{PC}{BP}=\dfrac{AE}{DA}$

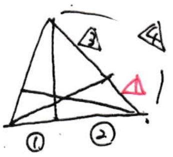
よって,

$$\frac{RB}{AR}\cdot\frac{PC}{BP}\cdot\frac{QA}{CQ}=\frac{\cancel{CB}}{\cancel{AE}}\cdot\frac{\cancel{AE}}{\cancel{DA}}\cdot\frac{\cancel{AD}}{\cancel{BC}}=1$$

□

例題

上の図で, AR:RB= 1 : 2, BC:PC= 4 : 3 のとき, CQ:QA を求めよ.



左図より チェバの定理.

$$\frac{2}{1}\times\frac{3}{1}\times\frac{QA}{CQ}=1.$$

$$\frac{QA}{CQ}=\frac{1}{6}$$

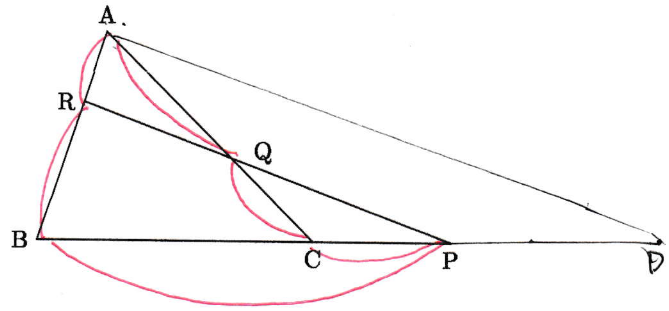
∴ CQ : QA = 6 : 1 //

3.2 メネラウスの定理

メネラウスの定理

△ABC の辺 BC, CA, AB またはその延長線が，三角形の頂点を通らない直線 l と，それぞれ点 P, Q, R で交わるとき，以下が成立.

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$



Proof. △ABC の頂点 A を通り，PR に平行な直線をひく．この直線と，直線 BC の交点を D とする.

RP // AD から,

$CQ : QA = CP : \underline{PD}$ $\therefore \dfrac{QA}{CQ}=\dfrac{PD}{CP}$

$AR : RB = DP : \underline{PB}$ $\therefore \dfrac{RB}{AR}=\dfrac{PB}{DP}$

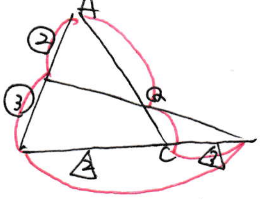
よって,

$$\frac{RB}{AR}\cdot\frac{PC}{BP}\cdot\frac{QA}{CQ}=\frac{\cancel{PB}}{\cancel{DP}}\cdot\frac{\cancel{PC}}{\cancel{BP}}\cdot\frac{\cancel{PD}}{\cancel{CP}}=1$$

□

例題

上の図で, AR : RB= 2 : 3, BC : PC= 2 : 3 のとき, CA : AQ, PR : RQ を求めよ.



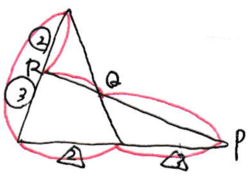
メネラウスの定理.

$$\frac{3}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{QA}{CQ}=1.$$

$$\frac{QA}{CQ}=\frac{10}{9}$$

∴ CQ : QA = 9 : 10

よって CA : AQ = 19 : 10 //



メネラウスの定理.

$$\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{QR}{PQ}=1.$$

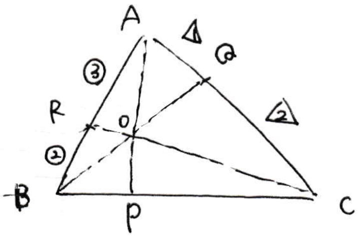
∴ PQ : QR = 15 : 4

∴ PR : RQ = 19 : 4 //

3.3 練習問題

(1) △ABC の辺 AB を 3 : 2 に内分する点を R, 辺 AC を 1 : 2 に内分する点を Q とする．線分 BQ と CR の交点を O, 直線 AO と辺 BC の交点を P とする．以下の問いに答えよ．

(a) BP : PC を求めよ．



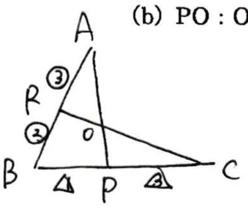
チェバの定理より．

$$\frac{2}{3}\times\frac{PC}{BP}\times\frac{1}{2}=1.$$

$$\frac{PC}{BP}=\frac{3}{1}$$

∴ BP : PC = 1 : 3 //

(b) PO : OA を求めよ．



メネラウスの定理．

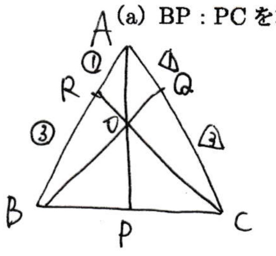
$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{{}_2\cancel{4}}\times\frac{OA}{OP}=1.$$

$$\frac{OA}{OP}=\frac{2}{1}$$

∴ OP : OA = 1 : 2 //

(2) △ABC の辺 AB, AC を 1 : 3 に内分する点をそれぞれ R, Q とする．線分 BQ と CR の交点を O とし，直線 AO と辺 BC の交点を P とする．以下の問いに答えよ．

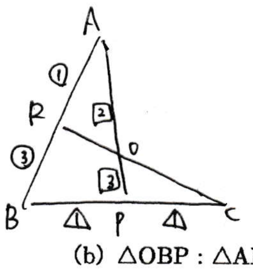
(a) BP : PC を求めよ．



チェバの定理

$$\frac{\cancel{3}}{1}\times\frac{PC}{BP}\times\frac{1}{\cancel{3}}=1.$$

BP : PC = 1 : 1 //



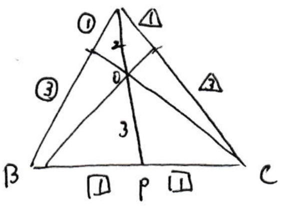
(b) △OBP : △ABC を求めよ．

メネラウスの定理．

$$\frac{3}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{OA}{OP}=1.$$

$$\frac{OA}{OP}=\frac{2}{3}$$

∴ OP : OA = 3 : 2．



△OBC は △ABC の $\frac{3}{5}$ 倍．

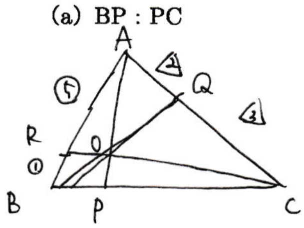
△OBP は △OBC の $\frac{1}{2}$ 倍

∴ △OBP は △ABC の $\frac{3}{10}$ 倍

よって △OBP : △ABC = 3 : 10 //

(3) △ABC の辺 AB, AC 上に点 R, Q があり，AR : RB= 5 : 1, AQ : QC = 2 : 3 である．線分 BQ と CR の交点を O, 線分 AO と辺 BC の交点を P とするとき，以下の比を求めよ．

(a) BP : PC

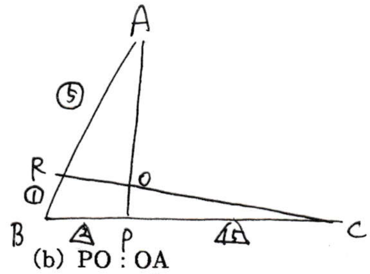


チェバの定理．

$$\frac{1}{5}\times\frac{PC}{BP}\times\frac{2}{3}=1.$$

$$\frac{PC}{BP}=\frac{15}{2}$$

∴ BP : PC = 2 : 15 //



(b) PO : OA

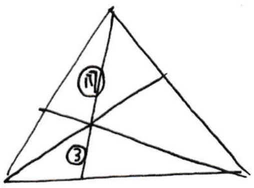
メネラウスの定理．

$$\frac{1}{5}\times\frac{15}{17}\times\frac{OA}{PO}=1.$$

$$\frac{OA}{PO}=\frac{17}{3}$$

∴ PO : OA = 3 : 17 //

(c) △OBC : △ABC



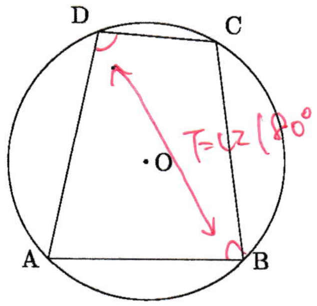
△OBC : △ABC = 3 : 20 //

4　内接多角形

4.1　内接四角形

円に内接する四角形の性質

円に内接する四角形の対角の和は 180° である.



Proof.
四角形 ABCD が円 O に内接し,

$$\angle BAD = \alpha,\quad \angle BCD = \beta$$

とする. 円周角の定理から,

角 A の中心角は 2α, 角 C の中心角は 2β

である. よって,

$$2\alpha + 2\beta = 360°$$

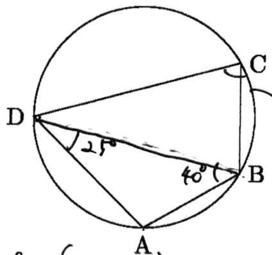
ゆえに

$$\alpha + \beta = 180°$$

□

例

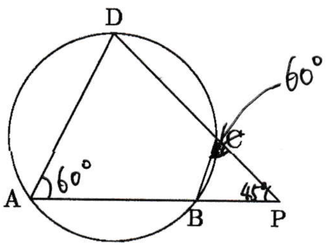
(1) ∠ADB= 25°, ∠ABD= 40° のとき, ∠BCD の値を求めよ.



180°−115°
= 65°

∠A = 180° − (40°+25°) = 115°.

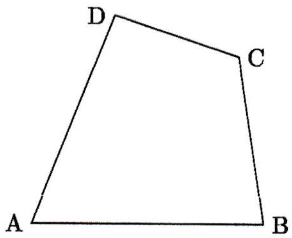
(2) ∠DAP= 60°, ∠APD= 45° のとき, ∠CBP の値を求めよ.



∠CBP = 180° − (60°+45°)
= 75°

四角形の円への内接条件

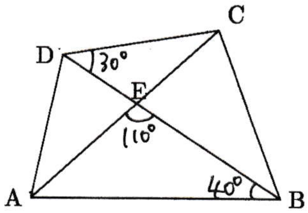
対角の和が 180° である四角形は円に内接する.



例

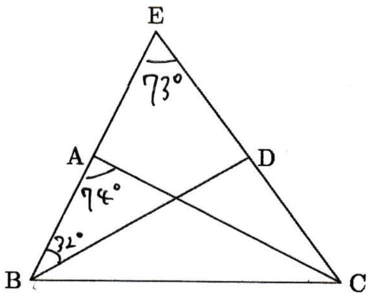
以下の図において, 4 点 A, B, C, D は同一円周上にあるか判定せよ.

(1) ∠ABE= 40°, ∠AEB= 110°, ∠CDE= 30°



∠DEC = 110°(対角).
∴ ∠DCE = 180° − (30°+110°) = 40°. ∴ 円周角が等しく, 4点ABCDは同一円上.

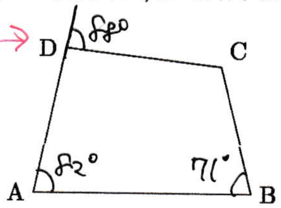
(2) ∠BEC= 73°, ∠CAE= 74°, ∠DBE= 32°



∠EDB = 180° − (73°+32°) = 75°.
∴ ∠BDC = 180° − 75° = 105° ∴ 同一円周上にない.

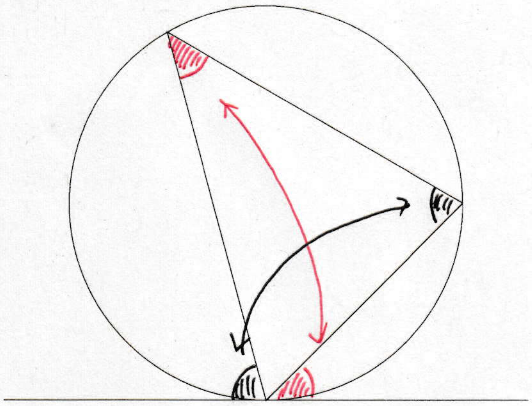
(3) A の内角 82°, B の内角 71°, D の外角 88°

外角



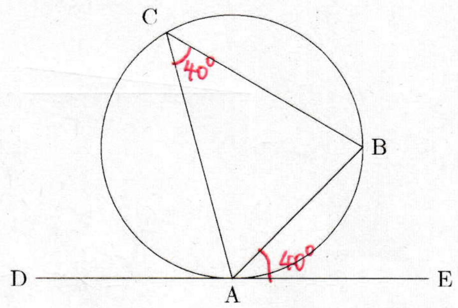
∠ADC = 92° より.
∠ADC + ∠ABC = 163° なので
同一円上にない

5　接弦定理



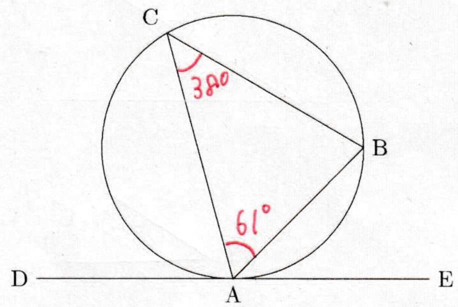
(1) 以下の問いに答えよ.

(a) ∠ACB= 40° のときの ∠BAE の値.



∠BAE = 40°

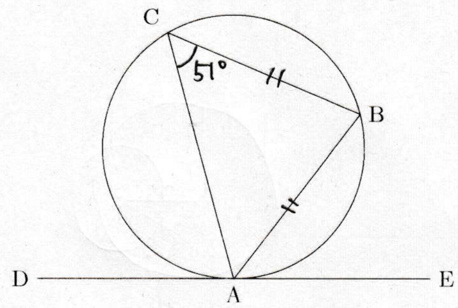
(b) ∠ACB= 38°, ∠CAB= 61° のときの ∠CAD の値.



$\angle ABC = 180° - (38° + 61°)$
$= 81°$

∴ ∠CAD = 81°

(c) AB=CB, ∠ACB= 51° のときの ∠~~BAE~~ CAD の値.



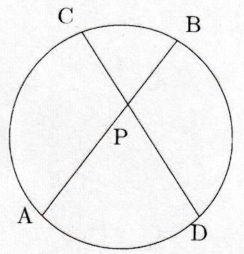
二等辺△なので $\angle ABC = 180° - 51° \times 2$
$= 78°$

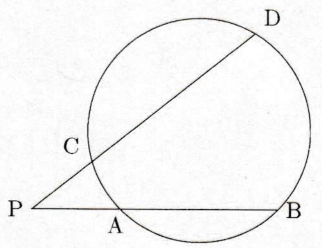
∴ ∠CAD = 78°

6　法べきの定理

6.1　方べきの定理 ver1

Proof.





1) 左図

円周角の定理から,

$$\angle \mathrm{PAC} = \angle \mathrm{PDB}$$
$$\angle \mathrm{PCA} = \angle \mathrm{PBD}$$

が成立する.

2) 右図

内接する四角形の性質から,

$$\angle \mathrm{PAC} = \angle \mathrm{PDB}$$
$$\angle \mathrm{PCA} = \angle \mathrm{PBD}$$

が成立する.

このことから, どちらの図においても, 3つの角が等しい。

なので, △PAC と △PDB は相似である.

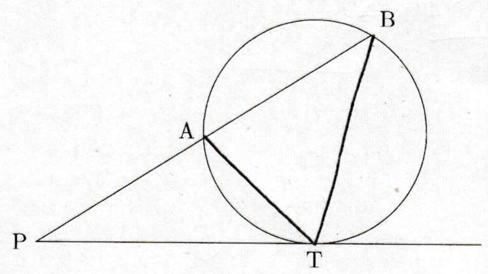
よって, PA : PD = PC : PB

したがって, PA·PB = PC·PD

□

6.2　方べきの定理 ver2

Proof.



AT と BT を線分で結ぶと, △PAT と △PTB において, T が円と直線の接点なので,

$$\angle \mathrm{ATP} = \angle \mathrm{PBT}$$

さて, 角 P は共通なので,

「3つの角がすべて等しい」により,

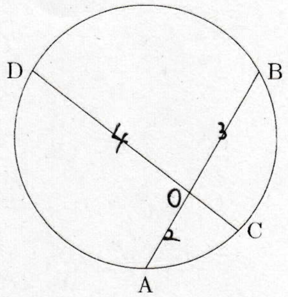
△PAT と △PTB は相似である.

よって, よって, PA : PT = PT : PB

したがって, PA·PB = PT^2

□

(1) 辺 AB と辺 CD の交点を O とする．AO= 2, BO= 3, DO= 4 のとき, CO の長さ．

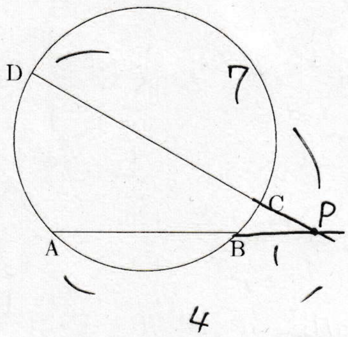


方べきの定理

$2 \cdot 3 = 4 \cdot OC$

$OC = \frac{3}{2}$ //

(2) 辺 AB の延長と辺 CD の延長の交点を P とする．AP= 4, BP= 1, DP= 7 のとき, CP の長さ．

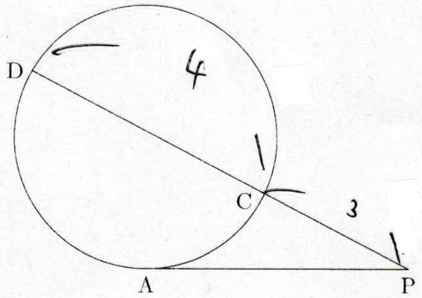


方べきの定理より

$1 \cdot 4 = PC \cdot 7$

$PC = \frac{4}{7}$ //

(3) CP= 3, DC= 4 のとき, AP の長さ．

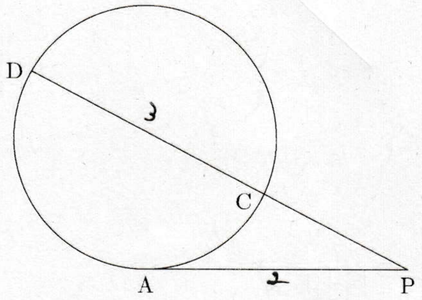


方べきの定理より

$AP^2 = 3 \cdot 7$

$\therefore AP = \sqrt{21}$ //

(4) CD= 3, AP= 2 のとき, CP の長さ．



方べきの定理より

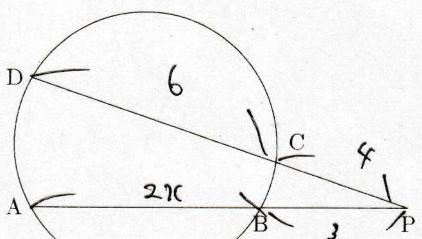
$2 \times 2 = CP \cdot (3 + CP)$

$CP^2 + 3CP - 4 = 0$

$(CP + 4)(CP - 1) = 0$　　CP>0より

$CP = 1$ //

(5) AB= $2x$, BP= 3, CD= 6, CP= 4 のとき, x の値．



方べきの定理．

$4 \times 10 = 3 \times (3 + 2x)$

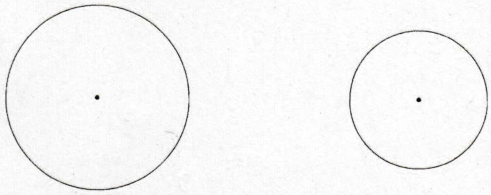
$40 = 9 + 6x$

$31 = 6x$

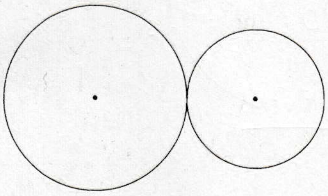
$x = \frac{31}{6}$ //

7　2つの円の位置関係

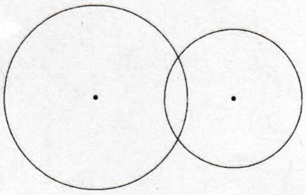
(1)



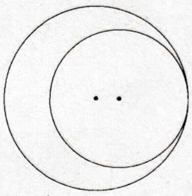
(2)



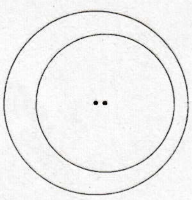
(3)



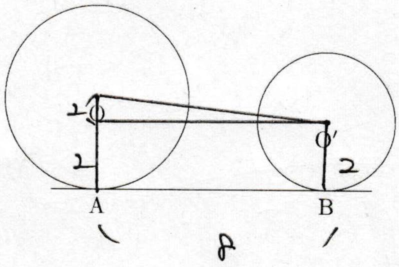
(4)



(5)



(1) 円 O の半径を 4, 円 O' の半径を 2 とする．図中において, AB の距離を 8 とする．OO' の距離を求めよ．



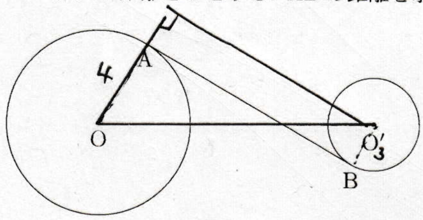
三平方の定理

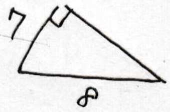
$(OO')^2 = 4 + 64$

$OO' = \sqrt{68}$

$= 2\sqrt{17}$

(2) 円 O の半径を 4, 円 O' の半径を 3 とする．図中において, OO' の距離を 8 とする．AB の距離を求めよ．



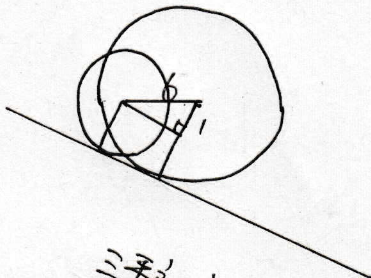


$AB^2 = 8^2 - 7^2$

$= 64 - 49$

$= 15$　　$\therefore\ AB = \sqrt{15}$

(3) 円 O の半径を 4, 円 O' の半径を 5 とする．OO' の距離を 6 とする．AB の距離を求めよ．



三平方の定理

$AB^2 = 36 - 1$

$= 35$

$\therefore\ AB = \sqrt{35}$