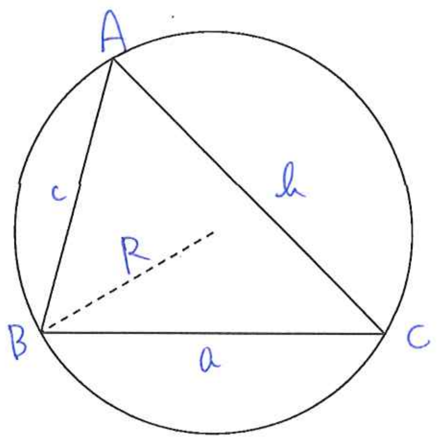
1　正弦定理 (計算)



正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

練習

△ABC において, 以下の問いに答えよ.

(1) $a = 5, A = 45^\circ$ のとき, 外接円の半径 R を求めよ.

正弦定理から,

$$\frac{5}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$\frac{5}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2R$$

$$R = \frac{5}{\sqrt{2}}$$ //

(2) $b = \sqrt{3}, B = 120^\circ$ のとき, 外接円の半径 R を求めよ.

正弦定理から,

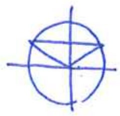
$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 2R$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$R = 1$$ //

(3) $c = 10, R = 10$ のとき, C を求めよ.

正弦定理から,



$$\frac{10}{\sin C} = 2 \cdot 10$$

$\sin C = \frac{1}{2}$　∴ $C = 30^\circ, 150^\circ$ //

(4) $b = \sqrt{6}, A = 45^\circ, B = 60^\circ$ のとき, a を求めよ.

正弦定理から,

$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$a = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$$ //

(5) $c = \sqrt{2}, B = 30^\circ, C = 45^\circ$ のとき, ~~c~~ b を求めよ.

正弦定理から,

$$\frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$$

$$b = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1$$ //

(6) $A = 135^\circ, B = 15^\circ, c = 2$ のとき, a の値を求めよ.

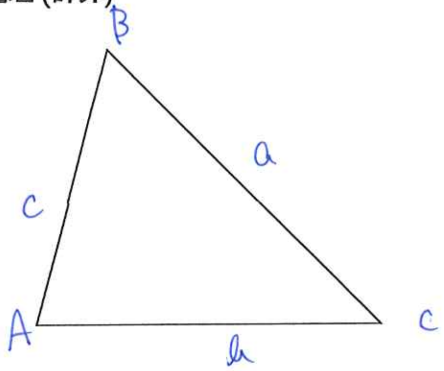
$A + B + C = 180^\circ$ なので,
$C = 30^\circ$

正弦定理より.

$$\frac{a}{\sin 135^\circ} = \frac{2}{\sin 30^\circ}$$

$$a = 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$ //

2　余弦定理 (計算)



余弦定理

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

練習

△ABC において, 以下の問いに答えよ.

(1) $b = \sqrt{3}, c = 2, A = 150^\circ$ のとき, a を求めよ.

余弦定理より.

$a^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 150^\circ$

$= 3 + 4 - 2 \cdot \cancel{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)$

$= 1$

$a > 0$ より

$a = 1$ //

(2) $a = 3, b = 5, C = 120^\circ$ のとき, c を求めよ.

余弦定理より.

$c^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ$

$= 9 + 25 - \cancel{2} \cdot 3 \cdot 5 \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)$

$= 9 + 25 - 15 = 19.$

$c > 0$ より

$c = \sqrt{19}$ //

(3) $a = 3, b = 2, c = \sqrt{7}$ のとき, C を求めよ.

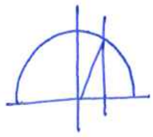
余弦定理より.

$(\sqrt{7})^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos C$

$7 = 9 + 4 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos C$

$-\cancel{6} = -\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot \cos C$

$\cos C = \frac{1}{2}$



左図より $C = 60^\circ$ //

(4) ~~A~~ a $= \sqrt{7}, b = 1, c = 2\sqrt{3}$ のとき, A を求めよ.

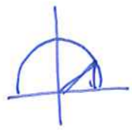
余弦定理より.

$(\sqrt{7})^2 = 1^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos A$

$7 = 1 + 12 - 2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos A$

$-\cancel{6}^{3} = -2 \cdot \cancel{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos A$

$\cos A = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



左図から. $A = 30^\circ$ //

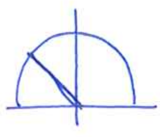
(5) $a = 1, b = \sqrt{5}, c = \sqrt{2}$ のとき, B を求めよ.

余弦定理より.

$(\sqrt{5})^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos B$

$5 = 1 + 2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cos B$

$\cos B = \frac{-1}{\sqrt{2}}$



左図から. $B = 135^\circ$ //

3　正弦定理・余弦定理の証明

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

< 証明 >

余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

< 証明 >

3.1 角の判定

3 辺の長さから, ある角度の鋭角・直角・鈍角を判定しよう.

余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

を変形して,

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

辺の長さが正なので,

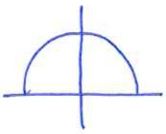
$$2bc > 0$$

よって,

$$b^2 + c^2 - a^2$$

の符号が, $\cos A$ が符号になる.

さて,



$\cos A > 0$ のとき, A は 鋭 角

$\cos A = 0$ のとき, A は 直 角

$\cos A < 0$ のとき, A は 鈍 角

i.e.

$b^2+c^2-a^2$ が

$$\begin{cases} \text{正} \to A\text{は鋭角} \\ 0 \to A\text{は直角} \\ \text{負} \to A\text{は鈍角}. \end{cases}$$

練習

△ABC の 3 辺が以下のとき, A の角の種類を判定せよ.

(1) $a = 9, b = 3\sqrt{2}, c = 7$

$$\begin{aligned} & b^2+c^2-a^2 \\ &= 18+49-81 \\ &= 67-81 < 0 \end{aligned}$$

∴ Aは鈍角 //

(2) $a = \sqrt{7}, b = \sqrt{6}, c = 2$

$$\begin{aligned} & b^2+c^2-a^2 \\ &= 6+4-7 > 0 \end{aligned}$$

∴ Aは鋭角 //

4 正弦定理・余弦定理の活用

4.1 復習

以下のような △ABC において, 指定たものを求めよ.

(1) $a=2\sqrt{3}, b=7, C=30^\circ$ のとき, c

余弦定理より.

$$c^2=(2\sqrt{3})^2+7^2-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 7\cdot \cos 30^\circ$$
$$=12+49-\cancel{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 7\cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$
$$=61-42=19$$

$\therefore\ c=\sqrt{19}$ //　（$c>0$ より）.

(2) $a=\sqrt{10}, A=135^\circ, B=30^\circ$ のとき, b

正弦定理より.

$$\frac{\sqrt{10}}{\sin 135^\circ}=\frac{b}{\sin 30^\circ}$$

$$b=\sqrt{10}\cdot\frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{5}\ //$$

(3) $a=2, b=2\sqrt{2}, c=\sqrt{5}-1$ のとき, B および外接円の半径 R

余弦定理より.

$$(2\sqrt{2})^2=2^2+(\sqrt{5}-1)^2-2\cdot 2\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\cos B.$$
$$8=4+6-2\sqrt{5}-4(\sqrt{5}-1)\cos B$$
$$2\sqrt{5}-2=4(\sqrt{5}-1)\cos B.$$

$\therefore\ \cos B=\frac{1}{2}$

i.e. $B=60^\circ$ //

正弦定理より

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}=2R$$

$$\cancel{2}R=\cancel{2}\sqrt{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{2\sqrt{6}}{3}\ //$$

4.2 問題

(1) △ABC において, $a=2, b=\sqrt{3}+1, C=60^\circ$ のとき, 残りの辺の長さと角の大きさを求めよ.

余弦定理より.

$$c^2=2^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\cdot\cancel{2}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\cancel{\cos 60^\circ}$$
$$=4+4+2\sqrt{3}-2(\sqrt{3}+1).=6$$

$c>0$ より　$c=\sqrt{6}$ //

正弦定理より

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{2}{\sin A}=\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore\ \sin A=2\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Aの候補は, 45°, 135° であるが, $C=60^\circ$ であることと,
三角形の内角の和が 180° であることから, 135° は不適

$\therefore\ A=45^\circ$ //

$$B=180^\circ-(A+C)$$
$$=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ\ //$$

(2) △ABC において, $a=\sqrt{2}, b=\sqrt{3}+1, C=45^\circ$ のとき, 残りの辺の長さと角の大きさを求めよ.

余弦定理より.

$$c^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\cancel{\cos 45^\circ}$$
$$=2+4+2\sqrt{3}-2(\sqrt{3}+1)=4.$$

$c>0$ より　$c=2.$ //

正弦定理より.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin A}=\frac{2}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore\ \sin A=\cancel{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cancel{\sin 45^\circ}=\frac{1}{2}$$

$a<c$ より　$A=30^\circ$ //

$A+B+C=180^\circ$ より

$$B=180^\circ-75^\circ=105^\circ\ //$$

4.3 最大角の大きさ

Question. 三角形 ABC の辺が $a=3, b=6, c=7$ のとき，最大角は ∠A, ∠B, ∠C のうちどれか.

$\longrightarrow$ ∠C

つまり，最大の辺に向かい合う角が，その三角形の最大の内角.

<u>問題</u>

△ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 13 : 8 : 7$ が成立するとき，最大角の大きさを求めよ.

正弦定理より.

$a : b : c = 13 : 8 : 7$ である。

実数 $k>0$ を用いて.

$a = 13k$, $b = 8k$, $c = 7k$ とおくと.

最大角は A である。 $(\because\ a > b > c)$

余弦定理より.

$$(13k)^2 = (8k)^2 + (7k)^2 - 2\cdot 8k \cdot 7k \cdot \cos A$$

$$(169-64-49)\cancel{k^2} = -2\cdot 8\cancel{k}\cdot 7\cancel{k}\cdot \cos A$$

$$\cancel{56} = -2\cdot \cancel{8}\cdot \cancel{7}\cos A$$

$$\cos A = -\frac{1}{2}$$

∴ 最大角は 120° //

<u>練習</u>

△ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ が成立するとき，最大角の大きさを求めよ.

正弦定理より.

$a : b : c = 3 : 5 : 7$.

実数 $k>0$ を用いて,

$a = 3k$, $b = 5k$, $c = 7k$ とおくと.

最大角は C である。 $(\because\ a < b < c)$

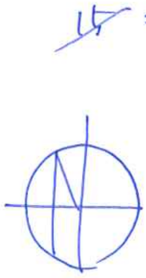
余弦定理より.

$$(7k)^2 = (3k)^2 + (5k)^2 - 2\cdot 3k\cdot 5k\cdot \cos C$$

$$(49-9-25)\cancel{k^2} = -2\cdot 3\cancel{k}\cdot 5\cancel{k}\cdot \cos C$$

$$\cancel{15} = -2\cdot \cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdot \cos C$$

$$\cos C = -\frac{1}{2}$$



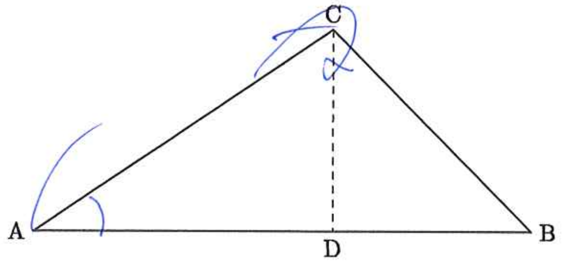
∴ 最大角は 120° //

5 多角形への応用

5.1 三角形の面積

△ABC の面積 S を求めてみよう.

(1) 鋭角三角形の場合



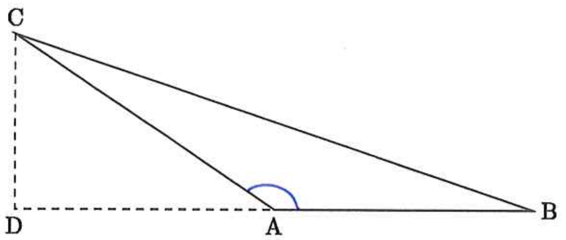
上図において, CD を ∠A の三角比と AC を用いて

CD= $AC\sin A$

と表せるので, △ABC の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC\sin A$$

(2) 鈍角三角形の場合



上図において, CD を ∠A の三角比と AC を用いて

CD= $AC\sin A$

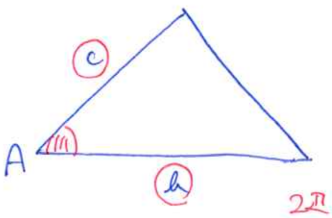
と表せるので, △ABC の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC\sin A$$

以上をまとめると,

三角形の面積

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$$



2辺と間の角のsinθ

練習

以下のとき, 三角形 ABC の面積を求めよ.

(1) $a = 3, b = 4, C = 60°$

$$S = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot \sin 60°$$
$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot 3\cdot \cancel{4}\cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 3\sqrt{3}$$

(2) $a = \sqrt{3}, c = 2, B = 150°$

$$S = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot \sin 150°$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) $a = 3, b = 3, c = 3$

正三角形なので、角はすべて60°

$$\therefore S = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot \sin 60°$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4}\sqrt{3}$$

(4) $a = 5, b = 6, c = 7$

(ヒント: $\sin\theta$ が知りたい. でもすぐわかるのは $\cos\theta$...)

余弦定理より.

$$7^2 = 5^2 + 6^2 - 2\cdot 5\cdot 6\cdot \cos C$$
$$49 = 25 + 36 - 2\cdot 5\cdot 6\cdot \cos C$$
$$\cos C = \frac{-\cancel{12}}{\cancel{2}\cdot 5\cdot\cancel{6}} = -\frac{1}{5}$$

$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ より　$\cos C = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$$\therefore S = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}$$
$$= 6\sqrt{6}$$

基本
三角形に分割して考える。

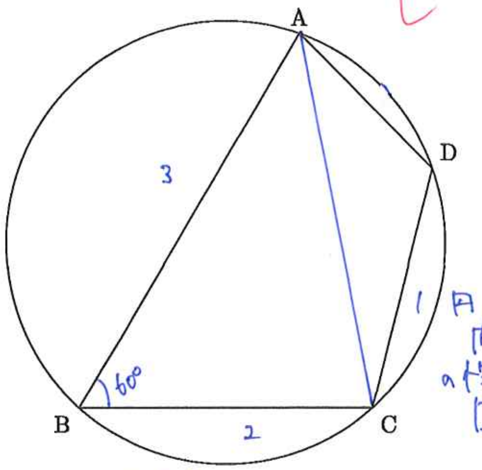
思考回路.
図から、
四角形の面積を求めるには、
△ABC＋△ACD で OK → ADが知りたい!!

5.2 多角形の面積

(1) 円に内接する四角形 ABCD において,

$$AB = 3, BC = 2, CD = 1, \angle B = 60^\circ$$

のときの四角形 ABCD の面積を求めよ.
(求める流れ : AC → AD → 面積)



円の内接四角形の性質より
D＝120°

△ABCで余弦定理より.

$$AC^2 = 9+4-2\cdot2\cdot3\cdot\cos60^\circ$$
$$= 9+4-2\cdot\cancel{2}\cdot3\cdot\frac{1}{\cancel{2}}$$
$$= 9+4-6 = 7$$
$$\therefore AC = \sqrt{7}$$

△ACDで余弦定理より.

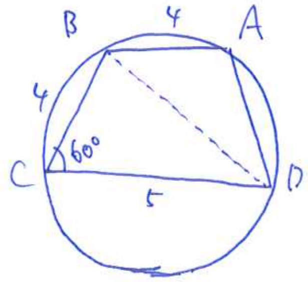
$$7 = 1 + AD^2 - 2\cdot1\cdot AD\cdot\cos120^\circ$$
$$7 = 1 + AD^2 - 2\cdot1\cdot AD\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$AD^2 + AD - 6 = 0$$
$$(AD+3)(AD-2) = 0$$
$AD>0$より $AD=2$.

$$\therefore S = \triangle ABC + \triangle ACD$$
$$= \frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\sin60^\circ + \frac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\sin120^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\cancel{2}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} + \frac{1}{2}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \underline{2\sqrt{3}}$$

(2) 円に内接する四角形 ABCD において,

$$AB = 4, BC = 4, CD = 5, \angle C = 60^\circ$$

のときの四角形 ABCD の面積を求めよ.



円の内接四角形なので ∠A＝120°.

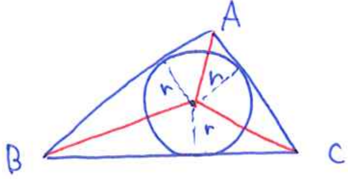
△BCDで余弦定理から.

$$BD^2 = 4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cdot\cos60^\circ$$
$$= 16+25-20 = 21.$$

△ABDで余弦定理.

$$BD^2 = 16 + AD^2 - 2\cdot4\cdot AD\cdot\cos120^\circ$$
$$21 = 16 + AD^2 + 4AD$$
$$AD^2 + 4AD - 5 = 0$$
$$(AD+5)(AD-1) = 0$$
$AD>0$より $AD=1$.

$$\therefore S = \triangle BCD + \triangle ABD$$
$$= \frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\sin60^\circ + \frac{1}{2}\cdot4\cdot1\cdot\sin120^\circ$$
$$= 5\sqrt{3} + \sqrt{3} = \underline{6\sqrt{3}}$$



← 図で
イメージ!!

5.3 内接円と三角形

△ABC の 3 辺の長さを a, b, c とし, 内接円の半径を r とする. このとき, △ABC の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

と表すことができる.

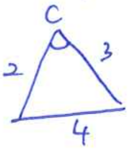
この式を使った問題を解いてみる.

問題

(1) △ABC において, $a = 2, b = 3, c = 4$ のとき, 内接円の半径 r を求めよ.

$S = \frac{1}{2}r(2+3+4) = \frac{9}{2}r$ である.

さて, △ABC において, 余弦定理から.



$$16 = 4+9-2\cdot 2\cdot 3\cdot \cos C$$
$$3 = -2\cdot 2\cdot 3\cdot \cos C$$
$$\cos C = -\frac{1}{4}$$

$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ より $\sin C > 0$ なので

$$\sin C = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$\therefore\ S = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$ である

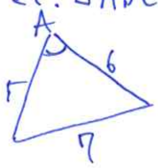
よって. $\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{2}}r = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{\cancel{4}_{2}}$

$$= \frac{\sqrt{15}}{6}$$

(2) △ABC において, $a = 7, b = 6, c = 5$ のとき, 内接円の半径 r を求めよ.

$S = \frac{1}{2}\cdot r\cdot(7+6+5) = 9r$ である.

ここで. △ABC において余弦定理から.



$$49 = 25+36-2\cdot 5\cdot 6\cdot \cos A$$
$$-\cancel{12} = -\cancel{2}\cdot 5\cdot\cancel{6}\cdot\cos A$$
$$\cos A = \frac{1}{5}$$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ で. $\sin A > 0$ なので

$$\sin A = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\therefore\ S = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}$$
$$= 6\sqrt{6}.$$

よって.

$$9r = 6\sqrt{6}$$
$$r = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

5.4 ヘロンの公式 (紹介)

入試で公式の証明が出る年があったりなかったり.

> **ヘロンの公式**
>
> △ABC の 3 辺の長さを a, b, c とする. 面積 S は以下の式で表すことができる.
>
> $$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
>
> ただし, $s = \frac{a+b+c}{2}$

これを知っていると, 面積が簡単に求められる.

問題

△ABC において, $a = 2, b = 3, c = 4$ のとき, 面積 S を求めよ.

$$\frac{a+b+c}{2} = \frac{2+3+4}{2} = \frac{9}{2}.$$

$$\therefore\ S = \sqrt{\frac{9}{2}\left(\frac{9}{2}-2\right)\left(\frac{9}{2}-3\right)\left(\frac{9}{2}-4\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{15}$$

Proof.

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A$$

← $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

$$= \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A}$$

← 余弦定理.

$$= \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2}bc\sqrt{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}\times\frac{1}{2bc}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}$$

← 2乗−2乗の因数分解.

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(2bc-b^2-c^2+a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2)}$$

ここで,

$$2bc-b^2-c^2+a^2 = -(b^2-2bc+c^2)+a^2$$
$$= -(b-c)^2+a^2$$
$$= a^2-(b-c)^2$$
$$= (a-b+c)(a+b-c)$$
$$2bc+b^2+c^2-a^2 = (a+b+c)(-a+b+c)$$

$\therefore\ a+b+c = 2s$ とおくと

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)}$$
$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

□

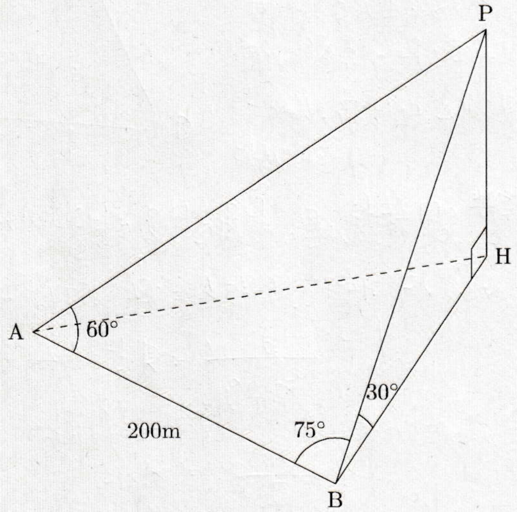
6 空間への応用

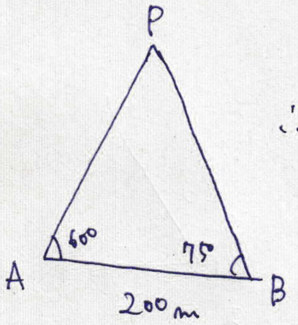
6.1 空間図形

200m 離れた山のふもとの 2 地点 A と B から, 山の山頂 P を見ると,

$$\angle \mathrm{PAB} = 60^\circ,\ \angle \mathrm{PBA} = 75^\circ$$

であった. また, B から P を見上げた角度は 30° であった. 図において, P と B の標高差 PH を求めよ.





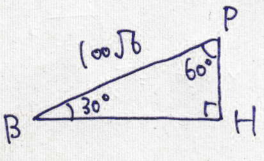
左図で, $\angle APB = 45^\circ$

∴ △APBで正弦定理より

$$\frac{200}{\sin 45^\circ} = \frac{PB}{\sin 60^\circ}$$

$$PB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 200 \cdot \sqrt{2}$$

$$= 100\sqrt{6}$$



よって, 左図で

△PBHは $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形

$$\therefore PH = 100\sqrt{6} \times \frac{1}{2}$$

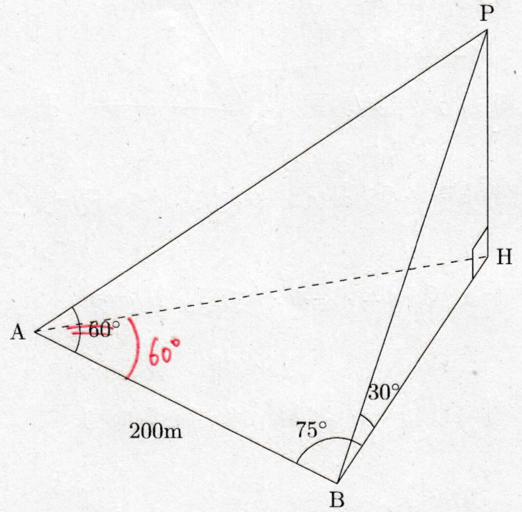
$$= 50\sqrt{6}$$

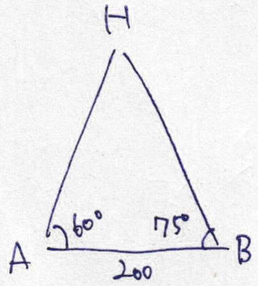
よって $PH = 50\sqrt{6}$ (m)

300m 離れた山のふもとの 2 地点 A と B から, 山の山頂 P を見ると,

$$\cancel{\angle \mathrm{PAB}}\ \angle \mathrm{HAB} = 60^\circ,\ \angle \mathrm{HBA} = 75^\circ$$

であった. また, B から P を見上げた角度は 30° であった. 図において, P と B の標高差 PH を求めよ.



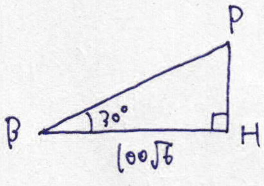


左図で, $\angle AHB = 45^\circ$.

∴ △HABで正弦定理より.

$$\frac{200}{\sin 45^\circ} = \frac{HB}{\sin 60^\circ}$$

$$HB = 100\sqrt{6}.$$



よって, △PBHは $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形.

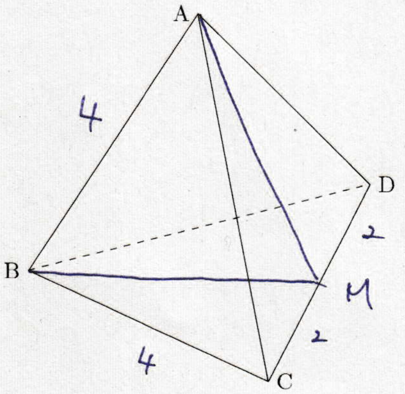
$$\therefore PH = 100\sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

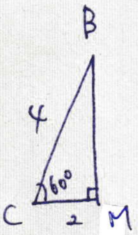
$$= 100\sqrt{2}.$$

よって $PH = 100\sqrt{2}$ (m)

6.2 問題演習

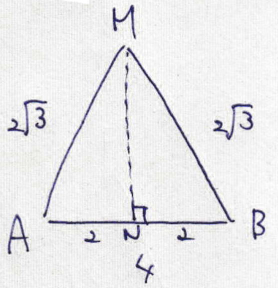
(1) 1 辺の長さが 4 である正四面体 ABCD において, 辺 CD の中点を M とする. △ABM の面積を求めよ.





左図で、$BM = 2\sqrt{3}$.

同様に $AM = 2\sqrt{3}$.



ABの中点をNとする。

△ANMで三平方の定理.

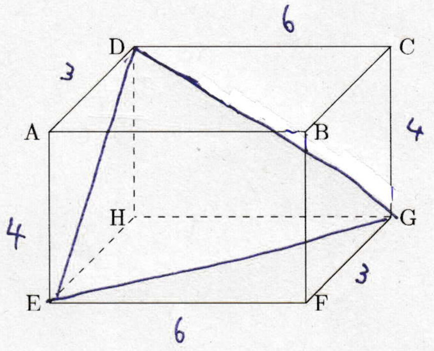
$MN = 2\sqrt{2}$

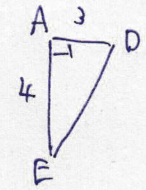
∴ △ABMの面積は

$$S = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

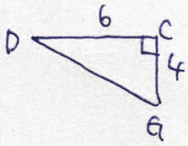
直方体ABCD−EFGHにおいて.

(2) AB= 6, AD= 3, AE= 4 である. △DEG の面積 S を求めよ.





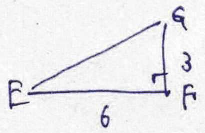
左図で $DE = 5$



左図で

$DG = \sqrt{6^2+4^2}$

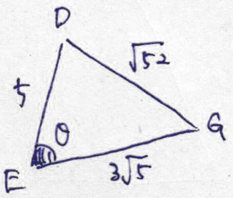
$= \sqrt{52}$



左図で

$EG = \sqrt{36+9}$

$= 3\sqrt{5}$



∠DEG = θとする.

余弦定理で

$52 = 25+45-2\cdot 5\cdot 3\sqrt{5}\cdot\cos\theta$

$-\cancel{18}^{\,3} = -\cancel{2}\cdot 5\cdot \cancel{3}\sqrt{5}\cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{3}{5\sqrt{5}}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$ より　$\sin\theta>0$ なので

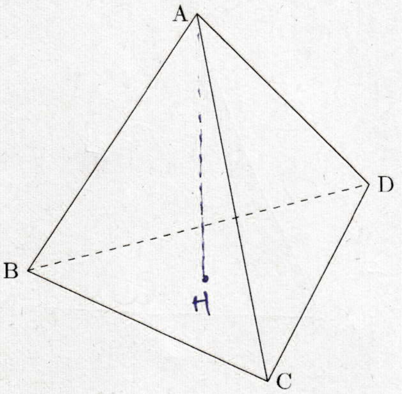
$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{125-9}}{5\sqrt{5}}$

$= \dfrac{2\sqrt{29}}{5\sqrt{5}}$

$$\therefore S = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{5}\cdot 3\cancel{\sqrt{5}}\cdot\frac{\cancel{2}\sqrt{29}}{\cancel{5}\cancel{\sqrt{5}}}$$

$$= 3\sqrt{29}$$

(3) 1 辺の長さが 4 である正四面体 ABCD において，頂点 A から △BCD に垂線をおろす．



(a) 点 H は △BCD の外心であることを示せ．

頂点Aから△BCDへ垂線を下ろす。

AB = AC = ADより.

△ABH ≡ △ACH ≡ △ADH.

∴ BH = CH = DH.

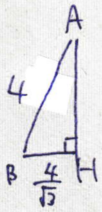
外接円の性質から，Hは外心である ■

(b) AH の長さを求めよ．

△BDCで正弦定理より。　BH = Rとすると

$$2R = \frac{4}{\sin 60^\circ}$$

$$R = \frac{4}{\sqrt{3}}$$



△ABHで三平方の定理.

$$AH = 4\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$ //

(c) 正四面体 ABCD の体積 V を求めよ．

$$V = \frac{1}{3} \times \triangle BCD \times AH$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{\cancel{2}} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cancel{\sin 60^\circ}\right) \times 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{64}{3}\sqrt{2}$$ //

(4) 1 辺の長さが 6 である正四面体の体積 V を求めよ．

相似比 4:6 = 2:3 なので,

体積比は $2^3 : 3^3 = 8 : 27$.

$$\therefore V = \frac{\cancel{64}^{8}}{\cancel{3}}\sqrt{2} \times \frac{\cancel{27}^{9}}{\cancel{8}}$$

$$= 72\sqrt{2}$$ //