1　数 I の復習 1 日目

1.1　問題 1

生徒 10 人の 2 回の結果が, 以下のようになった.

生徒	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
テスト 1 (得点)	1	1	2	4	7	8	8	9	10	10
テスト 2 (得点)	2	4	3	5	4	5	6	7	6	8

(1) それぞれの平均値を求めよ.

(2) それぞれの分散, 標準偏差を求めよ.

(3) テスト 1 とテスト 2 の相関係数を求めよ.

1.2　確率変数と確率分布

例題

2 個のサイコロを投げて, 出た目の和を X とする.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
P												

上の表を確率分布という.

(1) $P(10 \leqq X)$ を求めよ.

(2) X の期待値 $E(X)$ を求めよ.

(3) $Y = 2X + 1$ とする. $E(Y)$ を求めよ.

$aX + b$ の期待値

X : 確率変数, a, b : 定数 とする.

$$E(aX + b) = aE(x) + b$$

2　数 I の復習 1 日目

2.1　確率変数の分散

復習
10 点満点のテストにおいて, A, B, C, D さんがそれぞれ 3, 6, 7, 4 点を取った. 平均値, 分散, 標準偏差をそれぞれ求めよ.

確率変数の分散と標準偏差

X	X_1	X_2	$\cdots$	X_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

- $E((X-m)^2) =$

- $\sigma(X) =$

- (分散) $=$ (　　　　　　) $-$ (　　　　　　)^2

練習問題

サイコロ 1 個を投げて出た目を X とする. 以下を求めよ.

(1) $E(X)$

(2) $V(X)$

(3) $\sigma(X)$

(4) 確率変数 $Y = 2X + 3$ の期待値, 分散, 標準偏差をそれぞれ求めよ.

3　数 I の復習 3 日目 (思考)

3.1　同時分布

大小 2 個のサイコロに対し, 大のサイコロの目を X, 小のサイコロの目を Y とする.

(1) $X=1, Y=3$ となる確率を求めよ.

(2) $1 \leqq X \leqq 3, Y=3$ となる確率を求めよ.

(3) $2 \leqq X \leqq 5, Y \leqq 3$ となる確率を求めよ.

(4) X の期待値を求めよ.

(5) $X+Y$ の期待値を求めよ.

(6) $3X+2Y$ の期待値を求めよ.

(7) 中のサイコロを追加し, 出た目を Z とする. $X+Y+Z$ の期待値を求めよ.

(8) X を 100 の位, Y を 10 の位, Z を 1 の位とする得点の期待値を求めよ.

3.2　独立

問題

1 と書かれたカードが 4 枚, 2 と書かれたカードが 3 枚入った袋からカードを 2 回続けて取り出す. 1 回目のカードの値を X, 2 回目のカードの値を Y とするとき, 以下の確率を求めよ.

(1) 取り出した玉を元に戻さない場合,

　(a) $P(X = 1)$

　(b) $P(Y = 2)$

　(c) $P(X = 1, Y = 2)$

(2) 取り出した玉を元に戻す場合,

　(a) $P(X = 1)$

　(b) $P(Y = 2)$

　(c) $P(X = 1, Y = 2)$

独立とは

2 つの確率変数 X, Y が互いに独立とは,

問題

1 と書かれたカードが 4 枚, 2 と書かれたカードが 3 枚入った袋からカードを 2 回続けて取り出す. 1 回目のカードの値を X, 2 回目のカードの値を Y とするとき, 以下の期待値を求めよ.

(1) 取り出した玉を元に戻さない場合,

(a) $E(X)$

(b) $E(Y)$

(c) $E(X+Y)$

(d) $E(XY)$

(2) 取り出した玉を元に戻す場合,

(a) $E(X)$

(b) $E(Y)$

(c) $E(X+Y)$

(d) $E(XY)$

独立な確率変数の積の期待値

2 つの確率変数 X, Y が互いに独立であるとき,

問題

大小 2 個のサイコロを投げて出る目をそれぞれ X, Y とする.

(1) $V(X), V(Y)$ をそれぞれ求めよ.

(2) $V(X+Y)$ を求めよ.

独立な確率変数の和の分散

2 つの確率変数 X, Y が互いに独立であるとき,

3.2.1 証明

確率変数の和の期待値

2 つの確率変数 X, Y について,

独立な確率変数の積の期待値

2 つの確率変数 X, Y が互いに独立であるとき,

独立な確率変数の和の分散

2 つの確率変数 X, Y が互いに独立であるとき,

3.2.2　練習

大中小 3 個のサイコロを投げるとき, 以下の値を求めよ.

(1) 出る目の和の期待値

(2) 出る目の積の期待値

(3) 出る目の和の分散

4　二項分布

4.1　復習

問題 1

コイン投げを 5 回繰り返し行い, 表の出る回数を X とおく.

(1) 確率分布を求めよ.

(2) $P(X = 2)$ を求めよ.

(3) $P(1 \leqq X \leqq 3)$ を求めよ.

(4) $E(X)$ を求めよ.

(5) $V(X)$ を求めよ.

問題 2

サイコロを 5 回繰り返し投げ, 3 の倍数の出る回数を X とおく.

(1) 確率分布を求めよ.

(2) $P(X=2)$ を求めよ.

(3) $P(1 \leqq X \leqq 3)$ を求めよ.

(4) $E(X)$ を求めよ.

(5) $V(X)$ を求めよ.

4.2 一般化

1 回の試行で事象 A の起こる確率を p とおく．この試行を n 回行うとき，事象 A の起こる回数を X とするときの確率分布を書け．

二項分布の性質

練習問題

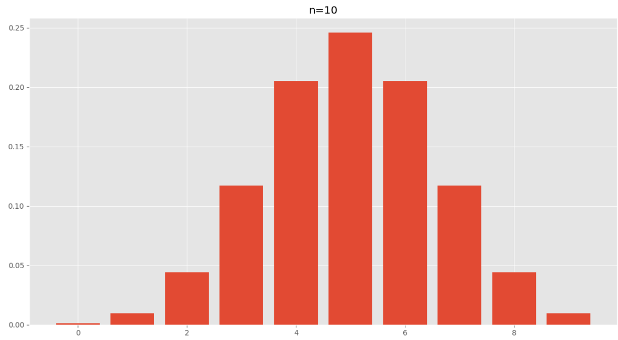
(1) 1 個のサイコロを 100 回投げたとき，3 の倍数の出る回数 X の期待値，分散，標準偏差を求めよ．

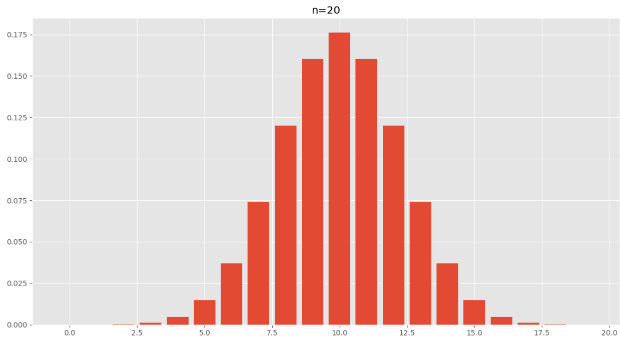
(2) 3% の確率で当たるくじ引きを引いて戻す操作を 500 回繰り返す．当たりの出る回数 X の期待値，分散，標準偏差を求めよ．

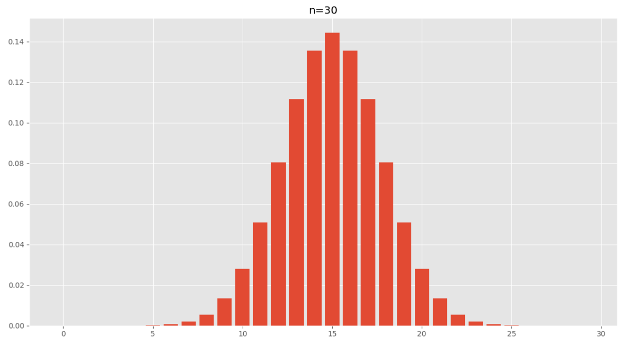
5　正規分布

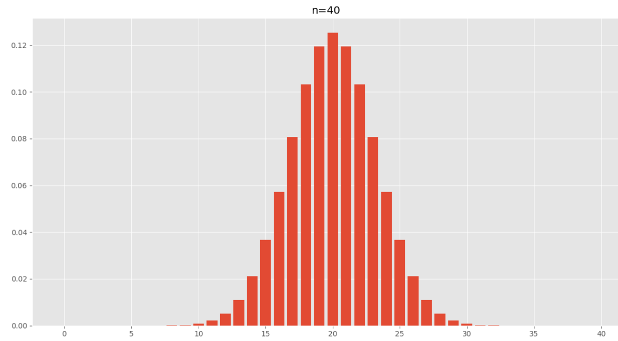
詳しくは大学で学ぶ.

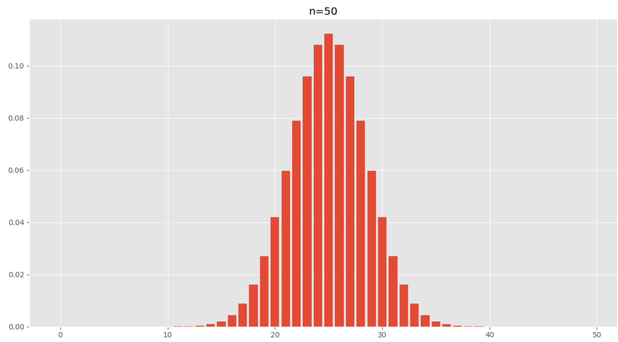
5.1　二項分布のグラフ





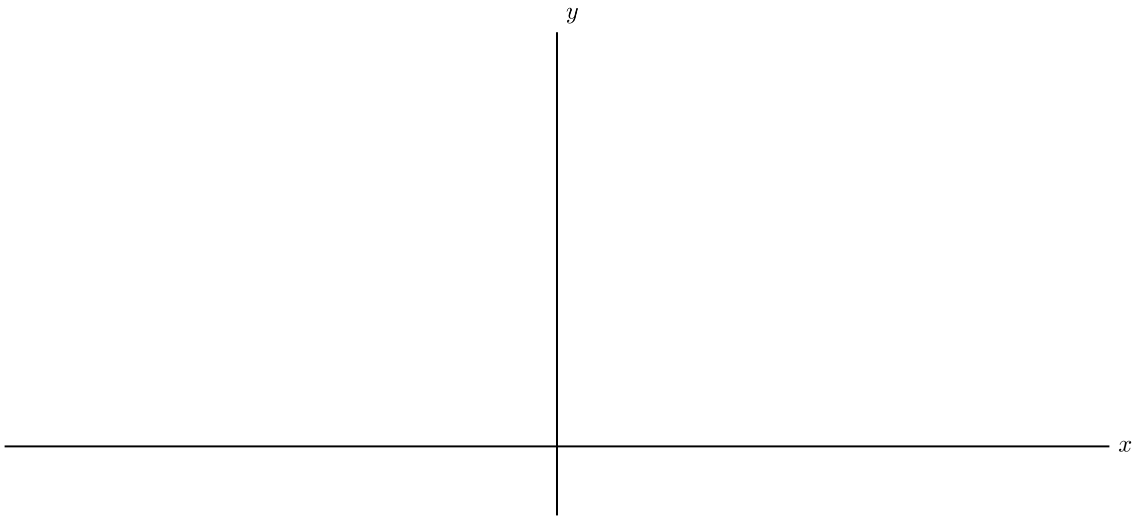






5.2　正規分布

二項分布の n を大きくしていくと, 連続関数に近づく.



この関数は次のような形でかける.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

このとき, X は______________________________に従うという.

正規分布

確率変数 X が正規分布 $N(m,\sigma^2)$ に従うとき,

5.3 正規分布の変数変更

(1) 確率変数 $aX+b$ のとき.

(2) 確率変数 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ のとき.

標準正規分布

確率変数 X が正規分布 $N(m,\sigma^2)$ に従うとき,

$$Z=$$

とおくと, 確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う.

<u>例題</u>
確率変数 X が正規分布 $N(2, 3^2)$ に従うとき,

$$m =$$

$$\sigma =$$

なので,

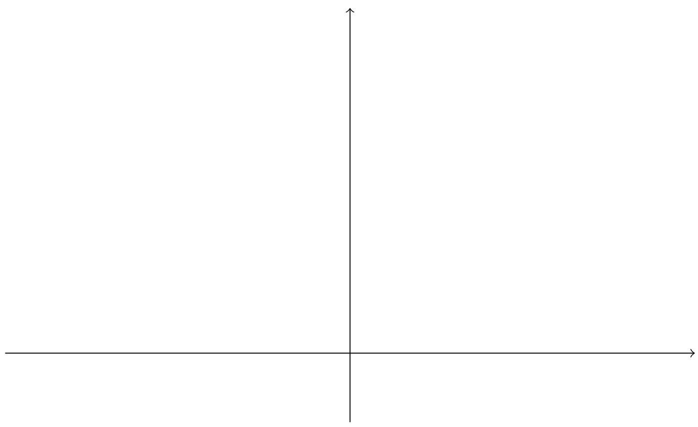
$$Z =$$

とおけば, 確率変数 Z は標準正規分布に従う.

<u>練習問題</u>
正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う確率分布 X について, $Z = \dfrac{X-1}{4}$ が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき, m, σ の値を求めよ.

5.4 標準正規分布の表

標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z に対し, 確率 $P(0 \leqq Z \leqq u) = p(u)$ とする.



このとき, 以下が成立.

- $P(-u \leqq Z \leqq 0) = P(0 \leqq Z \leqq u)$

- $P(Z \leqq 0) = P(Z \geqq 0) = 0.5$

また, $p(u)$ の値に対応する正規分布表から,

$$P(0 \leqq Z \leqq 0.42) = p(0.42) = 0.1628$$

である.

u	.00	.01	.02	$\cdots$
$\vdots$				
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	$\cdots$
$\vdots$				

練習問題

確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき, 以下の確率を求めよ.

(1) $P(-1 \leqq Z \leqq 1)$

(2) $P(-1.24 \leqq Z \leqq -0.1)$

(3) $P(-2 \leqq Z \leqq 1.23)$

(4) $P(Z \leqq 0.98)$

問題

確率変数 X が正規分布 $N(2, 4^2)$ に従うとき, 確率 $P(2 \leqq X \leqq 10)$ を求めよ.

練習問題

確率変数 X が正規分布 $N(3, 2^2)$ に従うとき以下の確率を求めよ.

(1) $P(3 \leqq X \leqq 5)$

(2) $P(2 \leqq X \leqq 9)$

(3) $P(X \leqq 4)$

練習問題
確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき以下の確率を求めよ.

(1) $P(0 \leqq X \leqq m+\sigma)$

(2) $P(0 \leqq X \leqq m+1.96\sigma)$

(3) $P(0 \leqq X \leqq m+2\sigma)$

(4) $P(0 \leqq X \leqq m+3\sigma)$

このことから, 正規分布についてわかること.

問題
あるテストの平均点は 56 点, 標準偏差は 15 点であり, A さんはこのテストで 80 点を取った. 80 点以上取った生徒は約何 % いるか. 小数第 2 位を四捨五入して答えよ. ただし, テストの点数分布を正規分布とみなすこととする.

(1) 同じテストで 90 点以上取った生徒は約何 % いるか.

(2) 同じテストで 20 点以下取った生徒は約何 % いるか.

(3) 上位 5% に入るには, 何点以上取る必要があるか.

5.5　二項分布の正規分布への近似

二項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数 X は, n が十分に大きいとき, 近似的に正規分布 $N(np, np(p-1))$ に従う.

例題

1 個のサイコロを 850 回投げて, 1 の目が出る回数を X とおく. $100 \leqq X \leqq 200$ となる確率を求めたい.

(1) X はどのような分布に従うか.

(2) X の期待値と分散を求めよ.

(3) X を近似的に正規分布に従うとして, 確率 $P(100 \leqq X \leqq 200)$ を求めよ.

練習

1 個のサイコロを 360 回投げて, 1 の目が出る回数を X とおく. $60 \leqq X \leqq 100$ となる確率を例題と同じように求めよ.

6 事例から学ぶ統計学

6.1 母集団分布

問題 1

数字の 1 の札が 10 枚, 数字の 2 の札が 20 枚, 数字の 3 の札が 30 枚ある. この 60 枚の札を母集団とし, 札の数字を変量とする. 母集団から 1 枚の札を抽出し, 札に書かれた数字を X とする.

(1) 母集団分布を求めよ.

(2) 母平均, 母標準分散を求めよ.

問題 2

数字の 1 と 5 の札が 2 枚ずつ, 数字の 2 と 4 の札が 6 枚ずつ, 数字の 3 の札が 24 枚ある. この 40 枚の札を母集団とし, 札の数字を変量とする. 母集団から 1 枚の札を抽出し, 札に書かれた数字を X とする.

(1) 母集団分布を求めよ.

(2) 母平均, 母標準分散を求めよ.

6.2　標本平均

問題 1

全国であるテストを行ったところ, 平均点 50 点, 母標準偏差 20 点であった. この母集団から 100 人を無作為に抽出するとき, その標本平均 $\overline{X}$ が 54 より大きくなる確率を求めよ.

問題 2

母平均 100, 母標準偏差 50 の母集団から, 大きさ 400 の無作為標本を抽出をするとき, その標本平均 $\overline{X}$ が 96 以上 104 以下の値をとる確率を求めよ.

6.3 標本比率

問題

不良品が全体の 10% 含まれる大量の製品の山から大きさ 100 の無作為標本を抽出する.

(1) 不良品の個数 X はどのような分布に従うか.

(2) 不良品の標本比率 R は近似的にどのような正規分布に従うとみなすことができるか.

(3) $0.07 \leqq R \leqq 0.13$ となる確率を求めよ.

6.4　大数の法則

問題

1 枚の硬貨を n 回投げるとき, 表の出る回数を X とする. また, 表の出る相対度数を R とする.
以下の場合について, 確率 $P\left(\left|R-\dfrac{1}{2}\right| \leqq 0.05\right)$ の値を求めよ.

(1) $n = 100$

(2) $n = 400$

(3) $n = 900$

6.5　推定

確認
母平均 m, 母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出する.
このときの標本平均 $\overline{X}$ は n が大きいとき, 近似的に

正規分布

に従う. このときの信頼度 95% の信頼区間を求めると, 以下のようになる.

注) 標本の大きさ n が十分に大きいとき, 母標準偏差 σ の代わりに標本の標準偏差を用いてもいい.

問題 1
大量に生産されたある製品の中から, 400 個を無作為抽出して重さを量ったところ, 平均値 98.8g, 標準偏差 2.0g であった. この製品の重さの平均値を, 信頼度 95% で推定せよ. ただし, 小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ.

問題 2

大量に生産されたある製品の中から, 100 個を無作為抽出して長さを測ったところ, 平均値 103.4cm, 標準偏差 1.5cm であった. この製品の長さの平均値を, 信頼区間 95% で推定せよ. ただし, 小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ.

問題 3

問題 2 と同じ条件下で, 信頼区間 99% で推定せよ. ただし, 小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ. また, 正規分布表において, $p(2.58) = 0.495$ とする.

6.6　母比率の推定

ある特性の比率が p である母集団から無作為抽出された大きさ n の無作為標本について, 特性 A の標本比率 R はどのような分布に従うだろうか.

問題

(1) ある世論調査で, 有権者から無作為抽出した 400 人について A 政党の支持者を調べたら 144 人いた. A 政党の支持者の母比率を信頼度 95% で推定せよ. ただし, 小数第 4 位を四捨五入して小数第 3 位まで求めよ.

(2) 大量に生産されたある製品の中から無作為抽出した 2400 個について検査したところ, 96 個が不良品であった. 不良品の母比率 p を信頼度 95% で推定せよ. ただし, 小数第 4 位を四捨五入して小数第 3 位まで求めよ.

7　事例から学ぶ仮説検定

7.1　仮説検定とは

ボールペン A と B のどちらがいいと評価されているかを調査した. 無作為に抽出した 100 人にアンケートを実施した結果, 61 人が B がいいと答えた.
この結果から, 「B の方がいいと評価される」と判断していいか.

問題

2 つのケーキ A, B のモニター調査を行った. 400 人に試食してもらい, 215 人の人が B の方が美味しいと回答した. このとき, ケーキ B の方が美味しいと評価されると判断してよいか. 有意水準 5% で検定せよ.

7.2　検定と棄却域

問題 1

ある 1 個のサイコロを 180 回投げたところ, 1 の目が 42 回出た. このサイコロは 1 の目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ ではないと判断してよいか. 有意水準 5% で検定せよ.

問題 2

ある硬貨を 400 回投げたところ, 表が 184 回出た. この硬貨は, 表と裏の出やすさに偏りがあると判断してよいか. 有意水準 5% で検定せよ.

問題 3

ある県で, ある年の出生児から 100 人を抽出したところ, 57 人が男子であった. 男子の出生率は女子の出生率よりも高いと判断してよいか. 有意水準 5% で検定せよ.

問題 4

ある種子の発芽率は, 従来 60% であったが, それを発芽しやすいように品種改良した新しい種子から無作為に 150 個抽出して種をまいたところ, 101 個が発芽した. 品種改良によって発芽率が上がったを判断してよいか, 有意水準 5% で検定せよ.