

1 極限の復習

1.1 数列

復習です.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{2n - 100}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 10}{3 + 4n + 5n^2}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n - \sqrt{n^2 + n}}$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-2} - \sqrt{n})$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 2^n)$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n}{2^n - 5^n}$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 2^{n+1} + 5^{n+1}}{5^n + 3^n + 2^n}$$

$$(10) a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + 1 \text{ で定められる数列 } a_n \text{ の極限を求めよ.}$$

$$(11) \text{ 数列 } a_n = 3 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + 1 \right), b_n = 3 \text{ があり, もう一つの数列 } c_n \text{ が, 任意の自然数 } n \text{ で } b_n < c_n < a_n \text{ を満たしているとする. 数列 } c_n \text{ の極限を求めよ.}$$

(12) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ の収束, 発散を調べ, 収束する場合はその和を求めよ.

(13) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}$ の収束, 発散を調べ, 収束する場合はその和を求めよ.

2 関数の極限

2.1 そもそも極限とは

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ の意味を説明せよ.

2.2 練習問題

次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1)(x - 1)$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{x - 5}$

(3) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1 - 2x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x$

(5) $\lim_{x \rightarrow 4} \log_2 x$

2.3 さまざまな極限

次の問いに答えよ.

(1) 極限 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ を求めよ.

(2) $y = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ のグラフを描き, 上の問題の意味を説明せよ.

2.4 練習

極限を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+x} \right)$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

(4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-3}{(x+2)^2}$

2.5 片側極限

問題

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{|x|}$$

の極限について考える。(0 に近づける)

2.6 練習

極限を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x}$$

3 色々な関数の極限

3.1 指数対数

考え方は同じ.

3.2 練習

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^x$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (0.3)^x$

(3) $\lim_{x \rightarrow +0} \log_2 x$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 x$

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-x}$

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{3x+1}{9x-9}$

3.3 三角関数

3.4 グラフで考える

(1) $x \rightarrow \infty$ での $\sin x, \cos x$ の極限はどうなるか.

(2) $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ での $\tan x$ の極限はどうなるか.

3.5 色々な問題

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan \frac{1}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

3.6 $\frac{\sin x}{x}$ の極限

3.7 練習

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

4 関数の連続性

4.1 思考

(1) 定義域内すべての x で連続なグラフをいくつか描いてみよ.

(2) 不連続な点をもつグラフをいくつか描いてみよ.

4.2 連続について

4.3 不連続について

4.4 中間値の定理

閉区間で連続な関数は、以下の性質を持つ。

閉区間で連続な関数は、その区間で最大値および最小値を持つ。

また、以下も成立。

中間値の定理



このことから、次も成立する。

補題



4.5 練習

(1) 方程式 $x - \cos x = 0$ は、 $0 < x < \pi$ の範囲に少なくとも1つの実数解を持つことを示せ。

(2) 方程式 $2^x - 3x = 0$ は、 $3 < x < 4$ の範囲に少なくとも1つの実数解を持つことを示せ。