数学 II　学習ノート

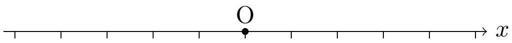
図形と方程式 (点と直線)

1 年＿＿＿組　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　復習

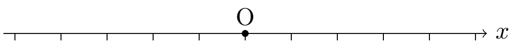
1.1　2 点間の距離を求めよう

(1) 2 点 $A(3), B(5)$ 間の距離 AB



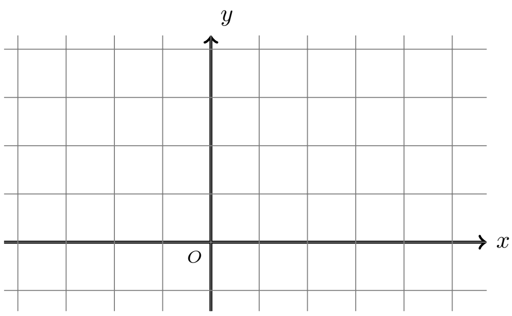
よって, AB=________

(2) 2 点 $A(-3), B(4)$ 間の距離 AB



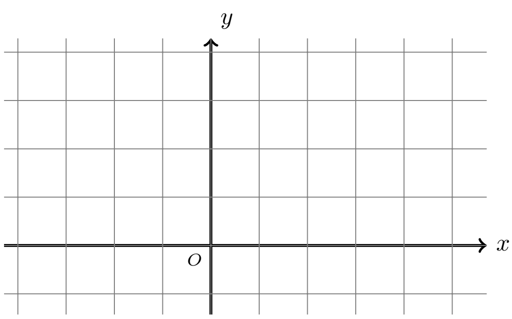
よって, AB=________

(3) 2 点 $A(3,4), B(2,1)$ 間の距離 AB



よって, AB=________

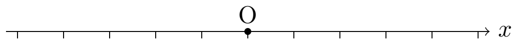
(4) 2 点 $A(3,2), B(-1,-1)$ 間の距離 AB



よって, AB=________

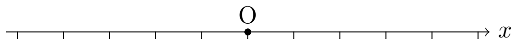
1.2　次を満たすような点の座標を求めよう.

(1) $A(4), B(0)$ において, AB を 3 : 1 に内分するような点 P



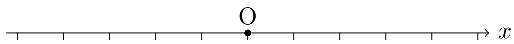
よって, 点 P の座標は__________

(2) $A(1), B(-2)$ において, AB を 2 : 1 に外分するような点 Q



よって, 点 Q の座標は__________

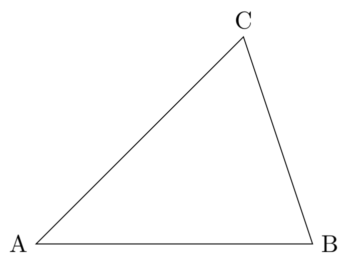
(3) $A(1), B(-2)$ において, AB を 1 : 2 に外分するような点 R



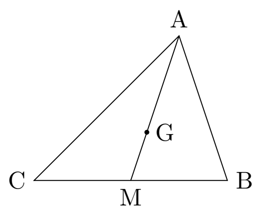
よって, 点 R の座標は__________

1.3　重心

(1) 下の三角形 ABC の重心 G を見つけよ.

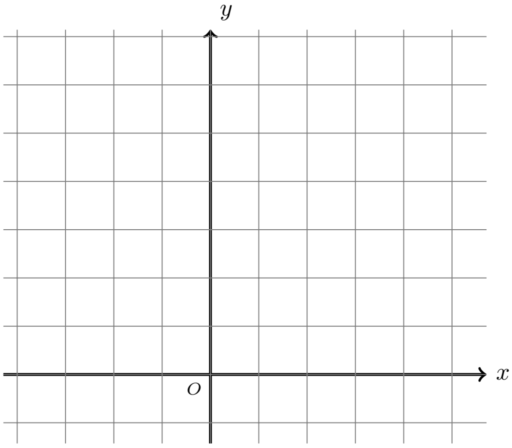


(2) G を重心とする. AG : GM = ______ : ______

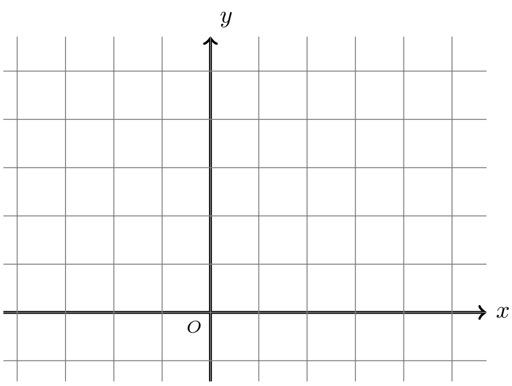


1.4　直線の方程式を求めよう

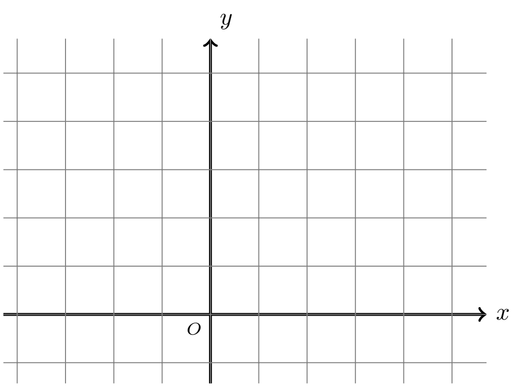
(1) 方程式 $y = 2x + 1$ の表す図形を下図に描け.



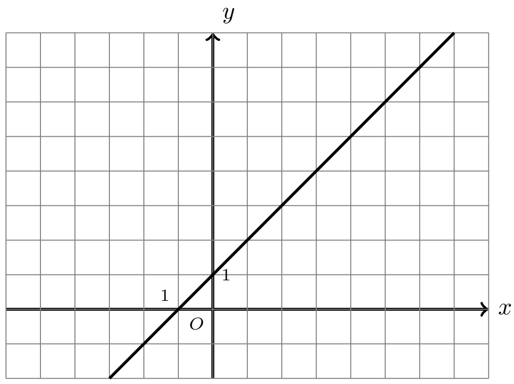
(2) 方程式 $2x + y - 4 = 0$ の表す図形を下図に描け.



(3) 方程式 $y - 2 = 0$ の表す図形と $x + 3 = 0$ の表す図形を下図に描け.

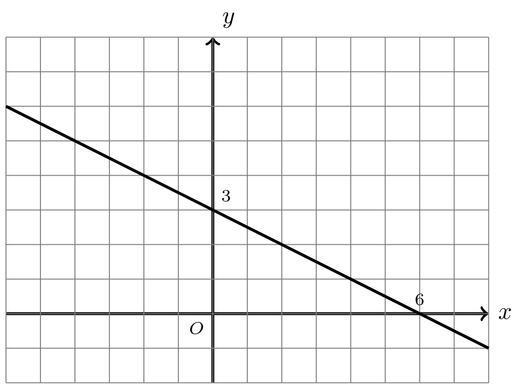


(4) 下の直線の方程式を求めよ.



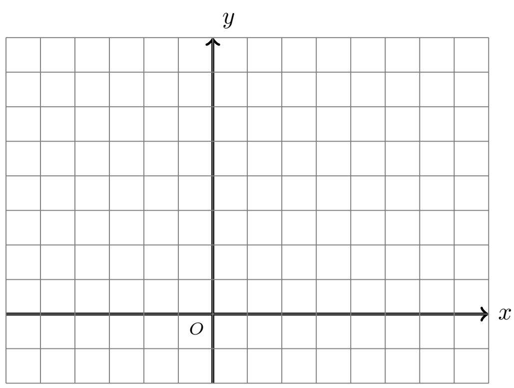
求める直線の方程式は________________

(5) 下の直線の方程式を求めよ.



求める直線の方程式は________________

(6) 2 点 $(-3, 0), (0, 1)$ を通る直線を下図に描き, その方程式を求めよ.



求める直線の方程式は________________

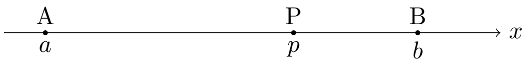
2　内分・外分

目標

点 P の座標を a, b, m, n を用いて表したい.

2.1　内分の一般化をしよう

AB を $m : n$ に内分する点を P とする.



AP で 2 点 A, P の間の長さを表すとする.
p, a, b を用いて, AP, BP を表すと,

$$\mathrm{AP} = \underline{\qquad\qquad}, \mathrm{BP} = \underline{\qquad\qquad}$$

と書ける. AP:BP$= m : n$ なので,

$$\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = m : n$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$\therefore p =$ 　　　　　　　と表される.

特に, AB を $1 : 1$ に内分する点 P(p) は,

$$p =$$

と書ける.

線分の内分点

2 点 A(a), B(b) を結ぶ線分 AB を $m : n$ に内分する点を P とする.

内分点 P の座標は $\underline{\qquad\qquad\qquad}$

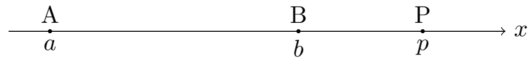
特に, 線分 AB の中点の座標は $\underline{\qquad\qquad\qquad}$

例題. 2 点 A(-3), B(3) を結ぶ線分 AB を $2 : 1$ に内分する点 P の座標を求めよ.

例題. 2 点 A(-4), B(2) を結ぶ線分 AB の中点 M の座標を求めよ.

2.2　外分の一般化をしよう

AB を $m : n$ に外分する点を P とする. ($m > n$ のパターン)



AP で 2 点 A, P の間の長さを表すとする.

$$\mathrm{AP} = \underline{\qquad\qquad}, \mathrm{BP} = \underline{\qquad\qquad}$$

と書ける. AP:BP$= m : n$ なので,

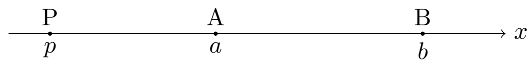
$$\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = m : n$$

$$\underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\therefore p =$$

次に, AB を $m : n$ に外分する点を P とする. ($m < n$ のパターン)



$$\therefore p =$$

線分の外分点

2 点 A(a), B(b) を結ぶ線分 AB を $m : n$ に外分する点を P とする.

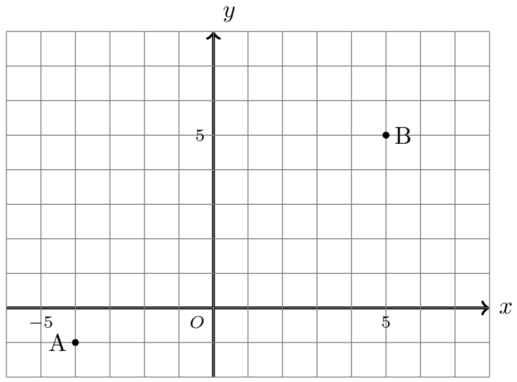
内分点 P の座標は $\underline{\qquad\qquad}$

例題. 2 点 A(-1), B(3) を結ぶ線分 AB を $2 : 1$ に外分する点 P の座標を求めよ.

例題. 2 点 A(-1), B(3) を結ぶ線分 AB を $1 : 2$ に外分する点 P の座標を求めよ.

2.3　平面で考えてみる (内分)

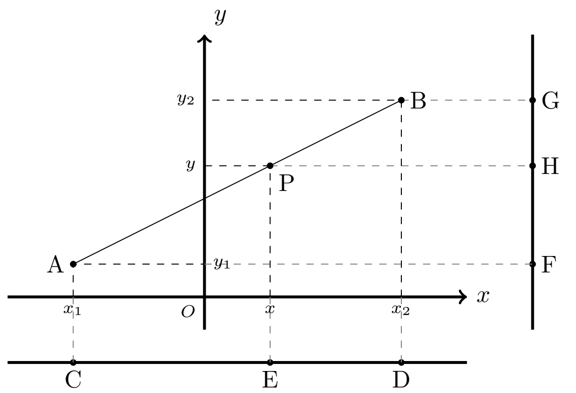
線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P の座標を求めよ.



点 P の座標は (　　　,　　　)

2.4　一般化しよう

点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, 点 $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ を結ぶ線分 AB を $m : n$ に内分する点 P の座標を求めよう.



x 座標について, AP : PB = $m : n$ なので,

$$\mathrm{CE} : \mathrm{ED} = \quad : \quad$$

つまり, 点 E は線分 CD を　　:　　に内分する点である. つまり,

$$x =$$

同様に

$$y =$$

よって, 以下のようになる.

線分の内分点

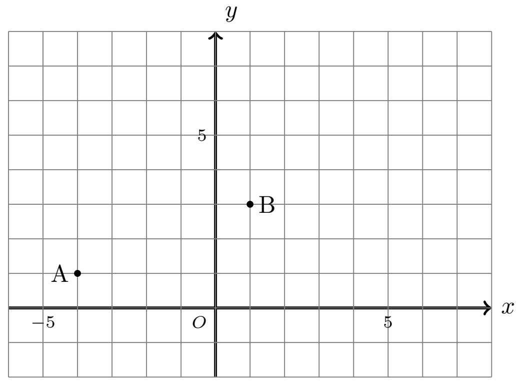
2 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ を結ぶ線分 AB を $m : n$ に内分する点を P とする.

内分点 P の座標は (　　　　,　　　　)

例題. 2 点 $\mathrm{A}(1, 3)$, $\mathrm{B}(4, 9)$ を結ぶ線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P の座標を求めよ.

2.5　平面で考えてみる (外分)

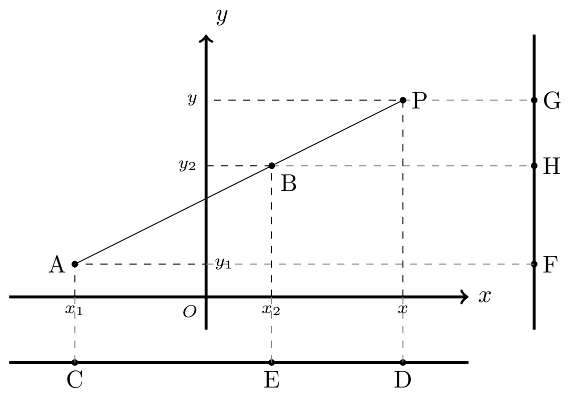
線分 AB を 2 : 1 に外分する点 P の座標を求めよ.



点 P の座標は (　　　,　　　)

2.6　一般化しよう

点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, 点 $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ を結ぶ線分 AB を $m : n$ に外分する点 P の座標を求めよう.



x 座標について, AP : PB = $m : n$ なので,

$$\mathrm{CD} : \mathrm{ED} = \quad : \quad$$

つまり, 点 D は線分 CE を　　:　　に外分する点である. つまり,

$$x =$$

同様に

$$y =$$

よって, 以下のようになる.

線分の外分点

2 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ を結ぶ線分 AB を $m : n$ に外分する点を P とする.

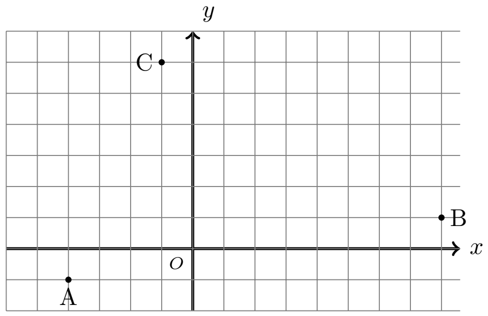
内分点 P の座標は (　　　　,　　　　)

例題. 2 点 $\mathrm{A}(1, 3)$, $\mathrm{B}(4, 9)$ を結ぶ線分 AB を 2 : 1 に外分する点 P の座標を求めよ.

2.7　重心

　これまで学んだ内分・外分を用いて, 重心の座標を求めよう.

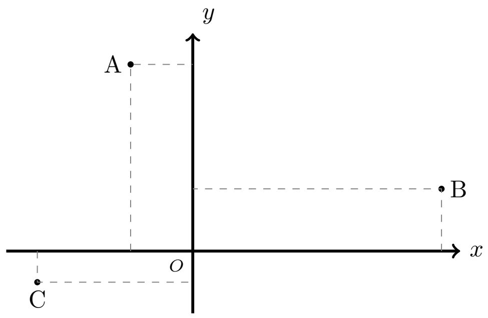
3 点 A$(-4,-1)$, B$(8,1)$, C$(-1,6)$ を結んでできる三角形 ABC の重心 G の座標を求めよ.



重心 G の座標は (　　　,　　　)

2.8　重心の座標を一般化しよう

　3 点 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) を結んでできる三角形 ABC の重心 G の座標 (x, y, z) を求めよう.



線分 BC の中点を M とすると, M(　　　　　,　　　　　) と表せる.

また, AG : GM=　　　:　　　なので,

点 G の座標は次の通り.

三角形の重心の座標

3 点 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) を結んでできる三角形 ABC の重心 G の座標は,

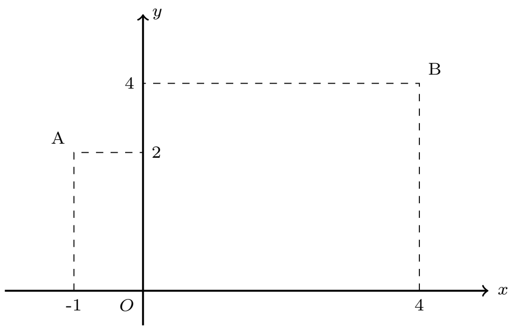
(　　　　　　　　　,　　　　　　　　　)

例題. 3 点 A(1, 5), B(-1, -2), C(3, 3) を結んでできる三角形 ABC の重心の座標を求めよ.

3 思考問題

3.1 等距離問題

(1) 2 点 $\mathrm{A}(-1, 2)$, $\mathrm{B}(4, 3)$ から等距離にあるような x 軸上の点 P の座標を求めよう.



アイデア

点 P の座標を $(x, 0)$ として, AP の長さと BP の長さを表してみよう. そこからは三平方の定理で $\cdots$

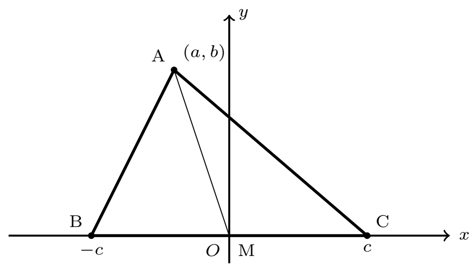
(2) 2 点 $\mathrm{A}(-4, 2)$, $\mathrm{B}(1, -1)$ から等距離にあるような x 軸上の点 P の座標を求めよう.

3.2 証明問題

(1) $\triangle$ABC において, 辺 BC の中点を M とする. 以下の等式を示せ.

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$$

< 証明 >



図のように, 辺 BC を x 軸上におき, その中点 M が原点に来るようにする.
すると,

$$\mathrm{A}(a, b),\ \mathrm{B}(-c, 0),\ \mathrm{C}(c, 0)$$

と表せる. さて,

(左辺) $=$

(右辺) $=$

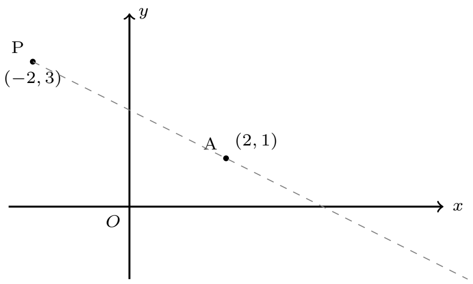
よって, $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$ が成立.

(2) $\triangle$ABC において, 辺 BC を $1 : 2$ に内分する点を D とする. 以下の等式を示せ.

$$2\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 3(\mathrm{AD}^2 + 2\mathrm{BD}^2)$$

3.3　点に関する対称点

(1) 点 A$(2, 1)$ に関して, 点 P$(-2, 3)$ と対称な点 Q の座標を求めよ.



点 Q の座標を (x, y) とおく.
線分_________の中点が______であることから,

$$\frac{\qquad\qquad}{2} = 2, \quad \frac{\qquad\qquad}{2} = 1$$

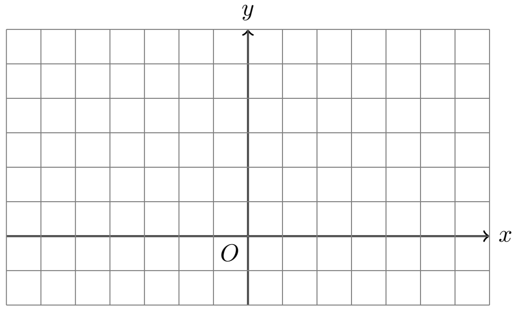
これを解くと, $x =$ _________, $y =$ _________.
よって, 点 Q の座標は $(6, -1)$.

(2) 点 A$(-3, 2)$ に関して, 点 P$(0, -4)$ と対称な点 Q の座標を求めよ.

4　直線の方程式

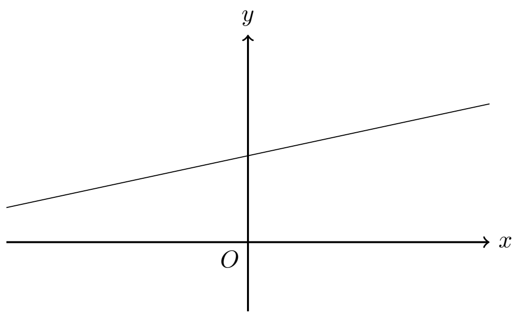
4.1　傾きと通る 1 点がわかっている

点 $(2, 2)$ を通り, 傾き $\dfrac{1}{2}$ の直線の方程式を求めよ.



4.2　一般化しよう

(x_1, y_1) を通る傾き m の直線の方程式を求めよう.



傾き m の直線を

$$y = mx + n$$

とおく. この直線は (x_1, y_1) を通るので,

$$y_1 = mx_1 + n$$

2 式から n を消去して, 以下が得られる.

直線の方程式

点 (x_1, y_1) を通り, 傾き m の直線の方程式は,

$$y - \underline{\qquad} = \underline{\qquad}(x - \underline{\qquad})$$

例. 点 $(2, -4)$ を通り, 傾きが 3 の直線の方程式を求めよ.

4.3　2 点を通る直線

(1) 2 点 $(3, 2), (5, 6)$ を通る直線の方程式を求めよう.
この直線の傾きは＿＿＿＿＿＿なので,

求める直線の方程式は＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

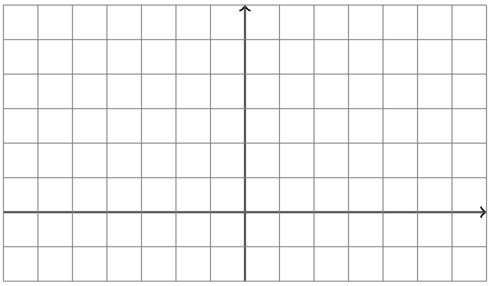
(2) 2 点 $(-1, 4), (2, -2)$ を通る直線の方程式を求めよ.

(3) 2 点 $(1, 2), (3, -4)$ を通る直線の方程式を求めよ.

(4) 2 点 $(2, -1), (1, -1)$ を通る直線の方程式を求めよ.

4.4　2 直線の関係 (平行)

$y = 2x + 1$ を描き, この直線と平行な直線を 1 本引こう.



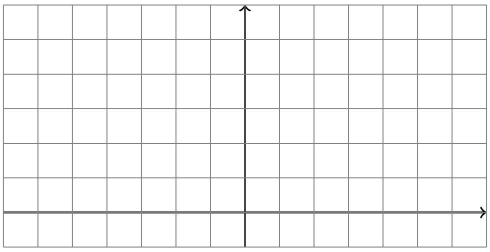
引いた直線の式を求めよ.

さて, 2 つの式がどのようなときに, 平行になるだろうか.

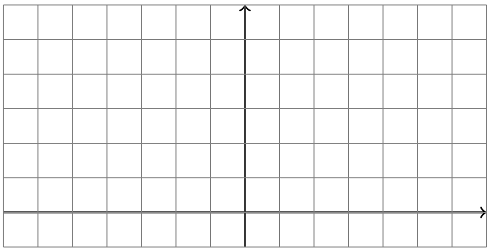
________________________________とき.

4.5　2 直線の関係 (垂直)

$y = 2x$ と垂直な直線を引き, 方程式を求めよ.



$y = x + 2$ と垂直な直線を引き, 方程式を求めよ.



気づくこと....

垂直

$y = m_1x + n_1$ と $y = m_2x + n_2$ が垂直

$$\iff m_1 \times m_2 =$$

4.6　練習問題

(1) $y = 2x$ に平行な直線と垂直な直線の方程式を 1 つずつ答えよ.

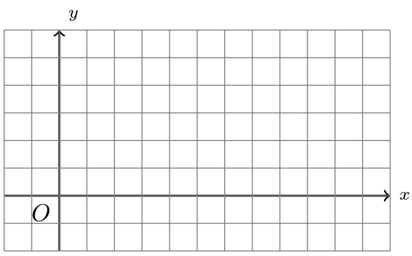
(2) $3x + 4y + 3 = 0$ に平行な直線と垂直な直線の方程式を 1 つずつ答えよ.

(3) 点 $\mathrm{A}(2, 1)$ を通り, 直線 $2x + 3y + 4 = 0$ に平行な直線と垂直な直線をそれぞれ求めよ.

5　点と直線の距離 (通称: 点直)

5.1　直線に対し対称な点

直線 l :$2x-y-3=0$ に関して, 点 A$(1,4)$ と対称な点を B とする. 下グラフに図を書き入れ, B を求めよう.



点 B の座標を (p,q) とする.

直線 l の傾きは ______, 直線 AB の傾きは __________.

AB $\perp l$ なので, $\underline{\hspace{8em}}=-1$
式変形して. $p+2q-9=0\quad\cdots(1)$

また, 線分 AB の中点 M$(\underline{\hspace{4em},\hspace{4em}})$ は, 直線 l 上にあるので,

$$2\cdot\underline{\hspace{5em}}-\underline{\hspace{5em}}-3=0$$

すなはち, $2p-q-8=0\quad\cdots(2)$

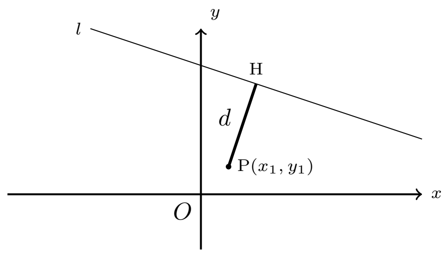
$(1),(2)$ を連立して $p=\underline{\hspace{4em}}, q=\underline{\hspace{4em}}$

よって, 点 B の座標は $(\underline{\hspace{4em},\hspace{4em}})$

練習. 直線 l :$x-2y+10=0$ に関して, 点 A$(2,1)$ と対称な点 B の座標を求めよ.

5.2　点直

点 P から直線 l に降ろした垂線を PH とする. この PH の長さが点 P(x_1,y_1) と直線 l の距離である.



点と直線の距離

点 (x_1,y_1) と直線 $l: ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

< 証明 >($a\neq 0, b\neq 0$ のとき. 一方が 0 でも同様)
H の座標を (x_2,y_2) とおく. 点 P と点 H の距離 d は

$$d=PH=\underline{\hspace{10em}}\qquad\cdots(1)$$

ここで, 直線 l の傾きは________, 直線 PH の傾きは____________
であり, 2 直線は垂直なので,

$$\left(-\underline{\hspace{3em}}\right)\cdot\underline{\hspace{5em}}=$$

変形して, $\dfrac{x_2-x_1}{a}=\dfrac{y_2-y_1}{b}$ となり, これを k とおくと,

$$x_2-x_1=\qquad\qquad,\quad y_2-y_1=\qquad\qquad\cdots(2)$$

これを (1) に代入.

$$d=\sqrt{(\qquad)^2+(\qquad)^2}=\sqrt{(\qquad)k^2}\quad\cdots(3)$$

また, (2) から, $x_2=x_1+ak,\quad y_2=y_1+bk\quad\cdots(4)$
ここで, 点 H(x_2,y_2) は直線 l 上にあるから,

$$ax_2+by_2+c=0$$

これに (4) を代入し, $a(x_1+ak)+b(y_1+bk)+c=0$
よって,

$$k=-\underline{\hspace{8em}}$$

これを (3) に代入.

$$d=\sqrt{(a^2+b^2)\cdot\frac{(ax_1+by_1+c)^2}{(a^2+b^2)}}$$
$$=\sqrt{\frac{(ax_1+by_1+c)^2}{a^2+b^2}}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

練習. 点 $(1,2)$ と直線 $3x-4y-1=0$ の距離を求めよ.

5.3　2 直線の交点を通る直線

2 直線の交点を通る直線について考える.
2 直線 $x+2y-4=0,\quad x-y-1=0$ は 1 点で交わり, その交点を A とする.
定数 k を用いて,

$$k(x+2y-4)+(x-y-1)=0 \quad \cdots(1)$$

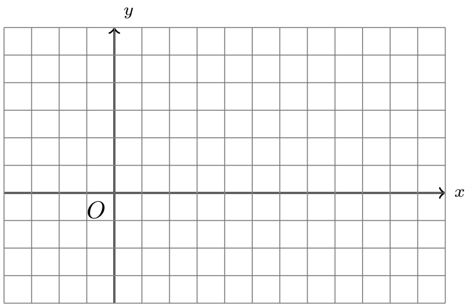
について考える. (1) は k についての恒等式と考えると,

$$x+2y-4=0, \text{かつ} \quad x-y-1=0$$

つまり ,(1) は 2 直線 $x+2y-4=0,\quad x-y-1=0$ の交点を通る図形を表す.
また, (1) を式変形すると,

$$(k+1)x+(2k-1)y-4k-1=0$$

となり, 直線を表すことがわかる.
よって, (1) は 2 直線 $x+2y-4=0,\quad x-y-1=0$ の交点を通る直線を表す.
ただし, $x+2y-4=0$ は表せない.



上の図に, 2 直線 $x+2y-4=0,\quad x-y-1=0$ を描き入れ, (1) の式の k に好きな数字を入れた直線を数本描こう.

練習問題.

(1) 2 直線 $x+2y-4=0,\quad x-y-1=0$ の交点と, 点 (0, 3) を通る直線の方程式を求めよう.
< $Ans.$ >
2 直線 $x+2y-4=0,\quad x-y-1=0$ の交点を通る直線は $k(x+2y-4)+(x-y-1)=0$ と書ける. これが $(0,3)$ を通るので, 代入して,

$$k(0+2\cdot 3-4)+(0-3-1)=0$$

よって, $k=2$. ゆえに, 求める直線は $2(x+2y-4)+(x-y-1)=0$
整理して, $x+y-3=0$

(2) 2 直線 $2x-y+1=0,\quad x+y-4=0$ の交点と, 点 (-2, 1) を通る直線の方程式を求めよ.

6 練習問題

6.1 基本問題 (点に関する問題)

(1) 2 点 $\mathrm{A}(-1,2)$, $\mathrm{B}(5,-4)$ を $1:2$ に内分する点 P の座標を求めよ.

(2) 2 点 $\mathrm{A}(-1,2)$, $\mathrm{B}(2,-1)$ を $1:2$ に外分する点 P の座標を求めよ.

(3) 3 点 $\mathrm{A}(-2,3)$, $\mathrm{B}(4,-1)$, $\mathrm{C}(1,-5)$ を結んでできる三角形 ABC の重心を求めよ.

(4) 2 点 $\mathrm{A}(-1,4)$, $\mathrm{B}(3,2)$ から等距離にあるような x 軸上の点 P の座標を求めよ.

(5) 3 点 $\mathrm{A}(-2,-1)$, $\mathrm{B}(1,3)$, $\mathrm{C}(3,-1)$ を頂点とするような三角形 ABC は, どのような三角形か.

(6) 点 $\mathrm{A}(1,2)$ に関して点 $\mathrm{P}(-2,-4)$ と対称な点 Q の座標を求めよ.

6.2　基本問題 (直線に関する問題)

(1) 傾き 3 で, 点 $(-2,4)$ を通る直線の方程式を求めよ.

(2) 2 点 $(-1,1)$, $(3,-2)$ を通る直線の方程式を求めよ.

(3) 点 $(2,3)$ を通り, $y=3x+5$ と平行な直線と垂直な直線の方程式をそれぞれ求めよ.

(4) $2y+x-4=0$ に関して, 点 $\mathrm{A}(4,10)$ と対称な点 B の座標を求めよ.

(5) $y=2x+2$ と点 $(6,-1)$ の距離を求めよ.

(6) $y-2x-1=0$ と $y+x-4=0$ の交点と, 点 $(-1,1)$ を通る直線の方程式を求めよ.

6.3 問題

(1) 3 点 $\mathrm{A}(a,b)$, $\mathrm{B}(-\sqrt{3},0)$, $\mathrm{C}(\sqrt{3},2)$ を頂点とする三角形が正三角形になるように a,b の値を求めよ.

(2) 3 点 $\mathrm{A}(6,-2)$, $\mathrm{B}(4,2)$, $\mathrm{C}(0,-4)$ を頂点とする平行四辺形の残りの頂点 D の座標を求めよ.

(3) 3 点 $\mathrm{A}(3,-1)$, $\mathrm{B}(5,3)$, $\mathrm{C}(7,0)$ について, 以下の問いに答えよ.

(a) 直線 BC の方程式を求めよ.

(b) 線分 BC の長さを求めよ.

(c) 点 A と直線 BC の距離を求めよ.

(d) 三角形 ABC の面積を求めよ.

6.4 発展問題

(1) A$(4, 1)$, B$(6, 3)$ とする．直線 $y - 2x - 1 = 0$ 上に点 P をとり，AP+PB を最小にする点 P の座標を求めよ．

(2) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x - 1$ がある．直線と放物線の距離が最小となるような放物線上の点の座標と，その距離の最小値を求めよ．

6.5　挑戦 1

1 個のサイコロを 3 回投げ, 出た目を順に a, b, c とする. 座標平面上に 3 点 A$(a, 1)$, B$(-b, 0)$, C$(c, 0)$ を定め, それらを頂点とする △ABC を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) △ABC の面積の値が整数になる確率を求めよ.

(2) △ABC が直角三角形になる確率を求めよ.

(3) △ABC が二等辺三角形になる確率を求めよ.

6.6　挑戦 2

(1) △ABC の面積の値が整数になる確率を求めよ.

(2) △ABC が直角三角形になる確率を求めよ.

(3) △ABC が二等辺三角形になる確率を求めよ.

数学 II　学習ノート

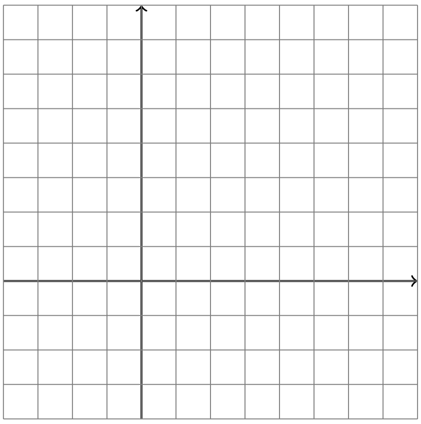
図形と方程式 (円)

2 年______組　氏名____

1 円の方程式

1.1 円の方程式

中心 $(1, 2)$ 半径 4 の円の方程式を求めよう.



まずは, 絵を描こう.
点 $\mathrm{P}(x, y)$ を円の上の点とする.
中心 $\mathrm{A}(1, 2)$ と P を結ぶ線分を斜辺とする直角三角形を考える.
三平方の定理が常に成立するので,

$$(\qquad\qquad)^2 + (\qquad\qquad)^2 = r^2$$

これが円の方程式そのもの.

円の方程式

中心 (a, b), 半径 r の円の方程式は,

$$=$$

つまり, 中心と半径さえ分かれば, 円の方程式が求まる.

(1) 中心 $(1, 3)$ 半径 3 の円の方程式を求めよ.

(2) 中心 $(-2, 2)$ 半径 $\sqrt{3}$ の円の方程式を求めよ.

(3) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$ はどのような図形か.

(4) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = -2$ を満たす図形は存在するか.

1.2 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ について

$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 18 = 0$ はどのような図形だろうか.

アイデア

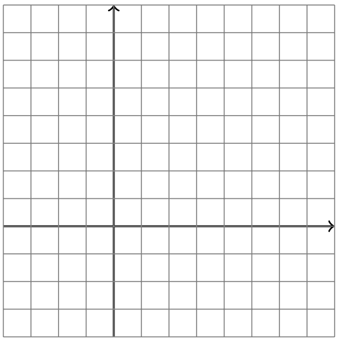
$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 18 = 0$ を $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ の形に変形してみよう.

$< Ans. >$

(1) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ はどのような図形だろうか.

1.3　3 点通る円

　3 点 $\mathrm{A}(-1,7)$, $\mathrm{B}(2,-2)$, $\mathrm{C}(6,0)$ を通る円を下図に描き入れ, 方程式を求めよう.



$< Ans >$
求める円の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ とおく.
3 点 $\mathrm{A}(-1,7)$, $\mathrm{B}(2,-2)$, $\mathrm{C}(6,0)$ を通るので,

よって,
求める円の方程式は______________________________であり,

中心__________________半径____________

1.4　練習

(1) 3 点 $\mathrm{A}(1,1)$, $\mathrm{B}(2,1)$, $\mathrm{C}(-1,0)$ を通る円の方程式を求めよう.

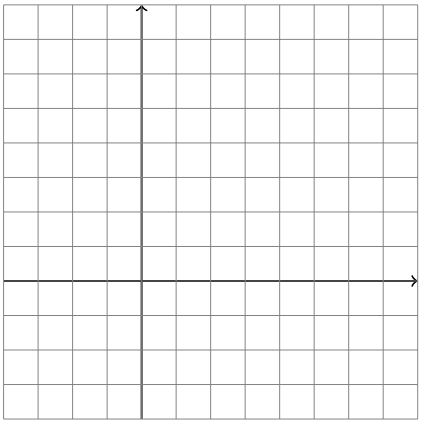
(2) 方程式 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$ はどのような図形を表すか.

(3) 2 点 $\mathrm{A}(3,4)$, $\mathrm{B}(-1,2)$ を結ぶ線分 AB が直径になるような円の方程式を求めよ.

2　円と直線

2.1　復習

$y = x + 1$ と $y = 2x - 3$ の交点を求めよ.



$\begin{cases} y = \quad x + 1 \\ y = \quad 2x - 3 \end{cases}$ を解くと,

$$(x, y) = (\qquad , \qquad)$$

このことから,

連立方程式を解くとは

連立方程式を解く $\Longleftrightarrow$ 共通部分を求める

2.2　円と直線

円 $x^2 + y^2 = 5$ と直線 $y = x - 1$ の共有点の座標を求めよ.

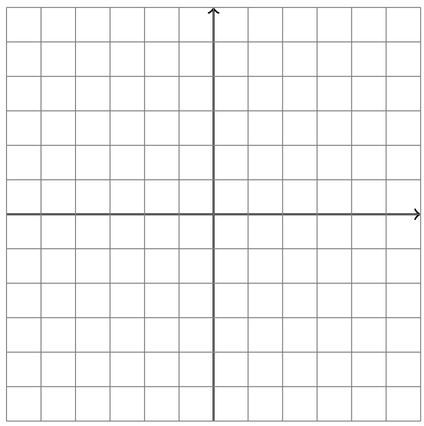
円 $x^2 + y^2 = 5$ と直線 $y = 2x + 5$ の共有点の座標を求めよ.

2.3　直線が動く

円 $x^2 + y^2 = 5$ と直線 $y = 2x + m$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 円と直線が共有点を持つとき, 定数 m の範囲を求めよ.

(2) 円と直線が接するとき, 定数 m の値と接点の座標を求めよ.



2.4 円の半径が動く

半径 r の円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $3x+y-10=0$ について考えよう.

(1) 円と直線が接するとき, 半径 r と, 中心と直線の距離 d の関係はどうなるだろうか.

(2) 円と直線が共有点を 2 個持つとき, 半径 r と, 中心と直線の距離 d の関係はどうなるだろうか.

(3) 円と直線が共有点を持たないとき, 半径 r と, 中心と直線の距離 d の関係はどうなるだろうか.

(4) 円と直線が接するとき, 半径 r の値を求めよ.

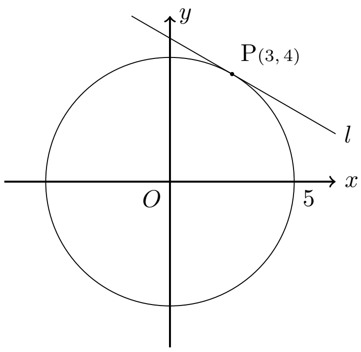
(5) 円と直線が共有点を持たないとき, 半径 r の値の範囲を求めよ.

3　円の接線

3.1　円上の点を通る接線

問題

(1) 円 $x^2+y^2=5^2$ 上の点 $(3,4)$ における接線 l の方程式を求めよ.



直線 OP の傾きは ________

OP$\perp l$ なので, 直線 l の傾きは ________ である.

直線 l は点 (______, ______) を通るので,

直線 l の方程式は ________________________________

整理すると, ________________________________

(2) 円 $x^2+y^2=4$ 上の点 $(1,\sqrt{3})$ における接線の方程式を求めよ.

(3) 円 $x^2+y^2=4$ 上の点 $(0,-2)$ における接線の方程式を求めよ.

(4) 円 $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ 上の点 $(5,-1)$ における接線の方程式を求めよ.

3.2　円の外部の点からの接線

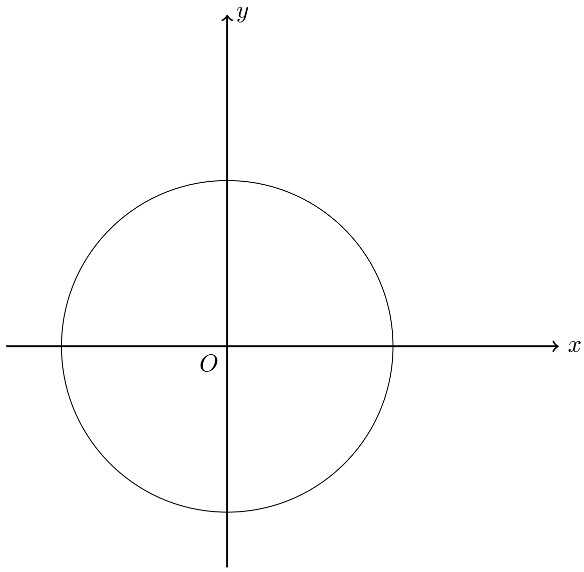
ポイント

接点を求めて方程式へ.

問題

点 $(3,1)$ から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線 l の方程式と, 接点の座標を求めよ.

$<$ まず, 図を描こう $>$



$<Ans.>$ 接点を $\mathrm{P}(x_1,y_1)$ とおく.

接点 P は円上にあるので,

$$\underline{\hspace{6cm}=5} \quad \cdots(1)$$

直線 OP の傾きは ________ であり,

OP$\perp l$ なので, 直線 l の傾きは ________ である.

なので, P における接線の方程式は

$$\underline{\hspace{6cm}=5} \quad \cdots(2)$$

(2) の直線は点 $(3,1)$ を通るので,

$$\underline{\hspace{6cm}=5} \quad \cdots(3)$$

(1), (3) を連立して解くと,

$(x_1,y_1)=$ (________, ________), (________, ________)

よって, 接線の方程式と接点は,

接線 ______________________ のとき　接点 (______, ______)

接線 ______________________ のとき　接点 (______, ______)

3.3　練習問題

(1) 点 $(1,2)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ.

(2) 点 $(3,1)$ から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ.

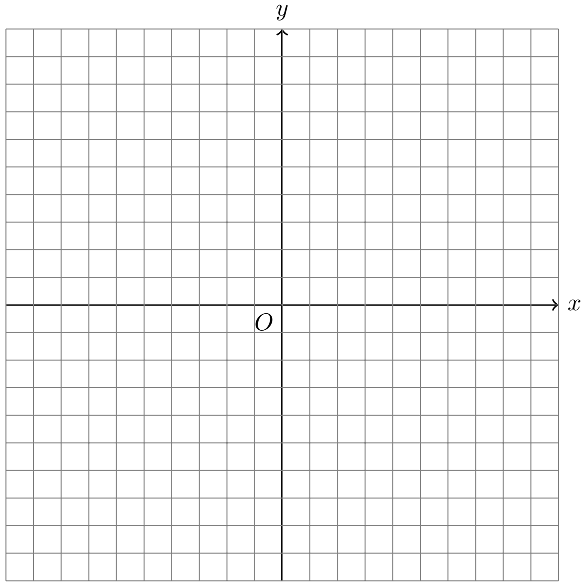
(3) 円 $x^2+y^2=4$ の接線が, $x+y+1=0$ と平行であるとき, その接線の方程式と接点の座標を求めよ.

(4) 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=x+k$ の共有点の個数が 2 個であるとき, k の値の範囲を求めよ.

4　2 つの円

4.1　位置関係

円 $(x-4)^2+(y-3)^2=9$ を描こう.



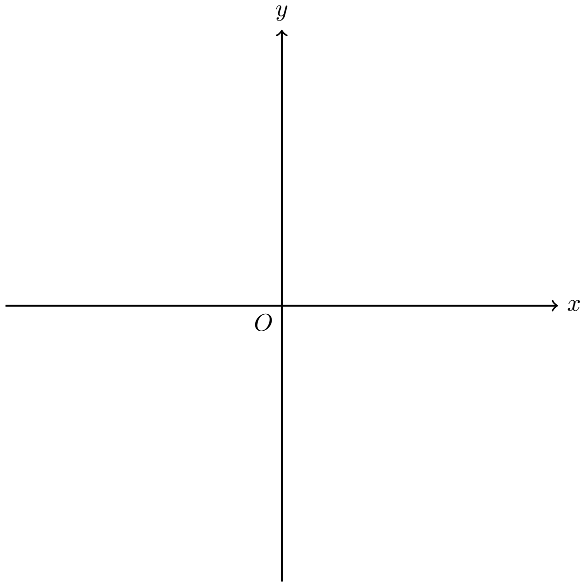
上の図に, 以下の円のグラフを描き, 位置関係を調べよう.

(1) $x^2+y^2=4$

(2) $x^2+y^2=36$

(3) $x^2+y^2=100$

(4) 中心が点 $(6,3)$ である円 C と, 円 $x^2+y^2=20$ が外接するように図を描き, 方程式を求めよ.



(5) 中心が点 $(-3,4)$ である円 C と, 円 $x^2+y^2=1$ が内接する. 円 C の方程式を求めよ.

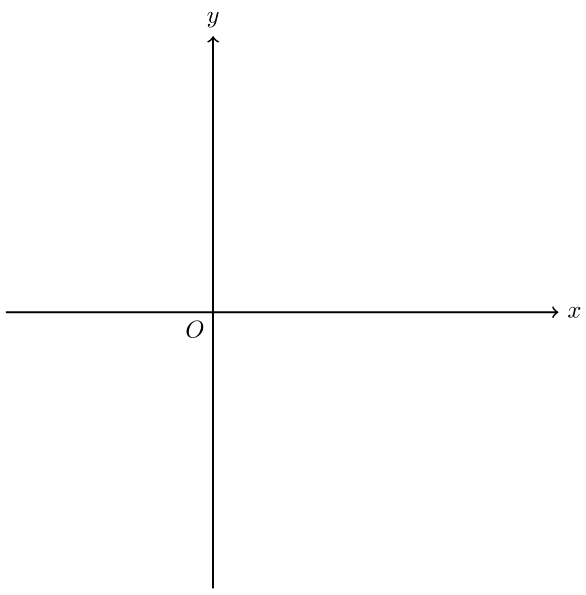
4.2　2 つの円の共有点

アイデア

まずは, 2 つの円の方程式から x^2, y^2 を消去して, x, y の 1 次方程式を作る.
その式を, 片方に代入して, x, y の値を求める.

(1) 円 $x^2+y^2=5$ と円 $x^2+y^2-6x-2y+5=0$ の共有点の座標を求めよ.

図も描いて, 求めた値が正しそうか確認しよう.



(2) 円 $x^2+y^2=10$ と円 $x^2+y^2-2x-y-5=0$ の共有点の座標を求めよ.

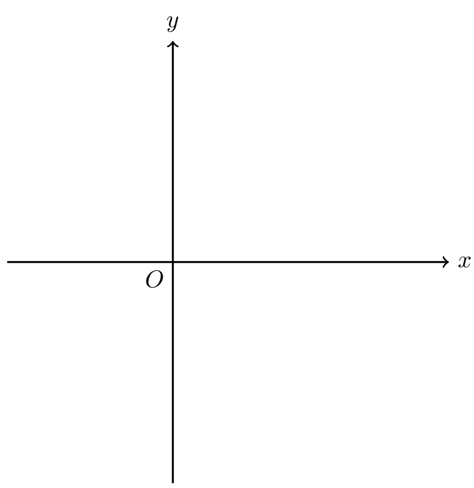
4.3　2 つの円の交点を通る直線

(1) 円 $x^2+y^2=4$ と円 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$ の共有点の座標を求めよ.

(2) 円 $x^2+y^2=4$ と円 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$ の共有点を通る直線の方程式を求めよ.

(3) 円 $x^2+y^2=4$ と円 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$ の共有点と, 点 $(0,0)$ を通る円の方程式を求めよ.

図も描いて, 求めた式が正しそうか確認しよう.



4.4　2 つの円の交点を通る直線 (発展)

2 つの円 $x^2+y^2=4$ と $x^2+y^2+4x-2y+4=0$ の共有点を通る図形の方程式を,

のようにかける.

(1) 円 $x^2+y^2=4$ と円 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$ の共有点を通る直線の方程式を求めよ.

(2) 円 $x^2+y^2=4$ と円 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$ の共有点と, 点 $(0,0)$ を通る円の方程式を求めよ.

5 練習問題

5.1 基本問題

(1) 円 $x^2+y^2+2x+4y=0$ について, 中心と半径を求めよ.

(2) (1) で求めた円と同じ中心を持ち, $(1,-2)$ を通る円の方程式を求めよ.

(3) 3 点 A$(-2,1)$, B$(1,4)$, A$(0,5)$ を頂点とする △ABC の外接円の半径と, 外心の座標を求めよ.

(4) 点 $(2,1)$ を中心とし, 直線 $x+2y+1=0$ に内接する円の方程式を求めよ.

(5) 中心が $y=x+1$ 上にあり, x 軸に接し, 点 $(3,2)$ を通る円の方程式を求めよ.

(6) 直線 $y=x-2$ と, 円 $x^2+y^2=10$ の共有点の座標を求めよ.

(7) 直線 $y=x-2$ と, 円 $x^2+y^2=10$ の共有点間の距離を求めよ.

(8) 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $x+3y+c=0$ が, 異なる 2 点で交わるように c の値の範囲を求めよ.

(9) 円 $(x+1)^2+(y-3)^2=r^2$ が, 円 $(x-2)^2+(y+1)^2=49$ の内部にあるように, r の値の範囲を求めよ.

5.2 普通の問題

(1) 点 A$(4, 6)$ と, 円 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ 上の点 P を考える.

(a) 2 点間 A, P の距離の最小値と, そのときの P の座標を求めよ.

(b) 2 点間 A, P の距離の最大値と, そのときの P の座標を求めよ.

(2) a を実数とする. $x^2+y^2+4ax-2ay+10a-10=0$ について, 以下の問いに答えよ.

(a) 中心と半径を求めよ.

(b) a の値が変化するとき, 半径の最小値とそのときの円の中心の座標を求めよ.

(c) この円は, a の値に関わらず, 定点を通る. その定点の座標を求めよ.

5.3　挑戦問題 2

(1) 2 つの円 $x^2 + y^2 = 4$ と $(x-4)^2 + y^2 = 1$ の双方に接する直線の方程式を全て求めよ.

数学 II　学習ノート

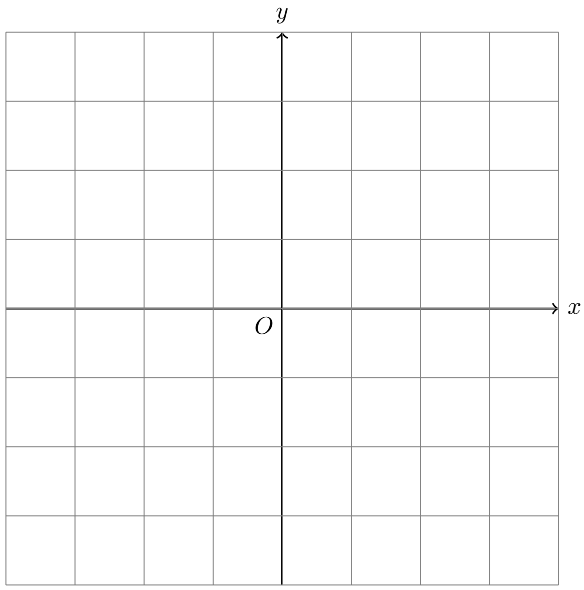
図形と方程式 (軌跡と領域)

2 年_____組　氏名____

1　軌跡と方程式

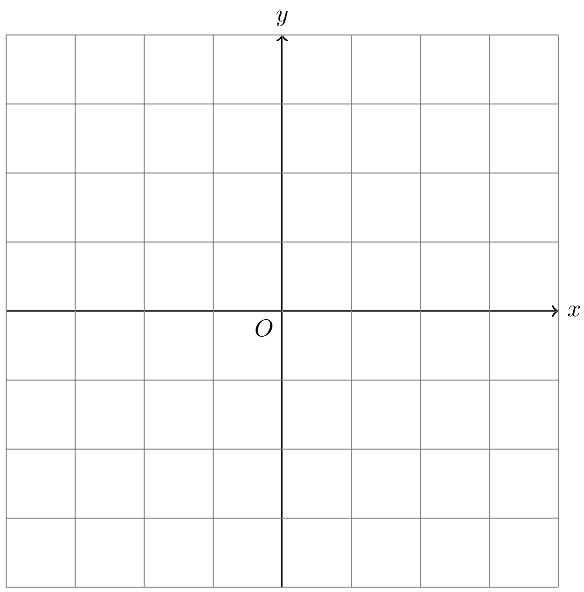
1.1　軌跡って...?

$y = x$ を満たす点の集まりを描こう.



できた曲線の方程式は________________________________.

$OP = 3$ を満たす点 P の集まりを描こう.



できた曲線の方程式は________________________________.

これらのことから, 曲線はある条件を満たす ______ の集まり.

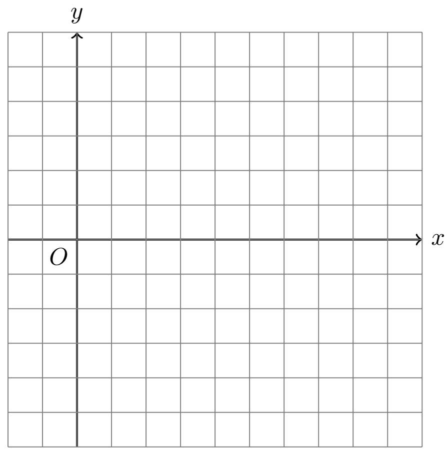
軌跡

与えられた条件を満たす______全体の集合を, その条件を満たす点の軌跡という.

1.2　座標平面上の点の軌跡

2 点 A$(0, 2)$, B$(4, 0)$ に対し, AP=BP を満たす点 P の軌跡を求めよ.

(1) まず図を描こう.



(2) 予想しよう.

(3) 予想が正しいことを計算で確かめよう.
点 P の座標を (x, y) とおく.

条件より AP=BP

すなはち, AP^2 =BP^2 を満たす.

$$\therefore x^2 + (\qquad\qquad)^2 = (\qquad\qquad)^2 + y^2$$

整理すると,

____

よって, AP=BP を満たす点 P は

直線________________________

上にある.
逆に, この直線上にある点が全て AP=BP を満たすことを示す.

点 P は直線________________________から,

AP^2 =

BP^2 =

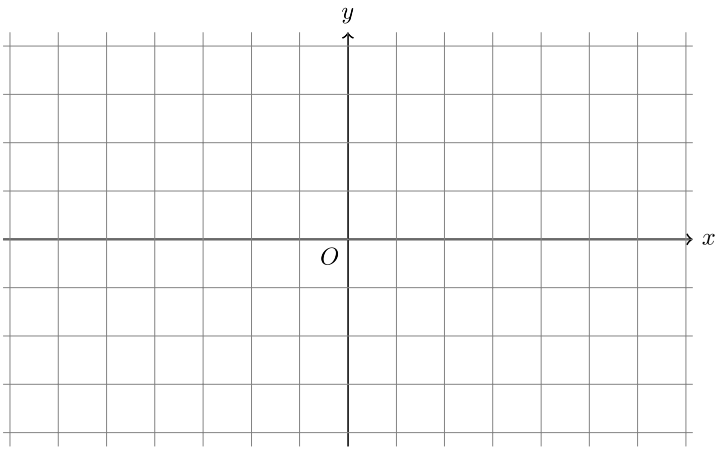
よって AP=BP.

以上から, 点 P の軌跡は, 直線________________________

1.3 アポロニウスの______

2 点 O$(0,0)$, A$(3,0)$ からの距離の比が $1:2$ である点 P の軌跡を求めよ.

(1) まず, 図を描こう.



(2) 予想しよう.

(3) 予想が正しいことを計算で確かめよう.
点 P の座標を (x, y) とおく.

条件より, OP:PA= ______:______

*i.e.*______AP = ______OP

すなはち ______AP^2 = ______OP^2

ここで,

$\mathrm{AP}^2 =$

$\mathrm{OP}^2 =$

なので,

________________________ = ________________________

整理してまとめると,

____

よって, 点 P は____________________________________上にある.

逆に, この______上のすべての点 P(x, y) は条件を満たす.

よって, 求める軌跡は

____

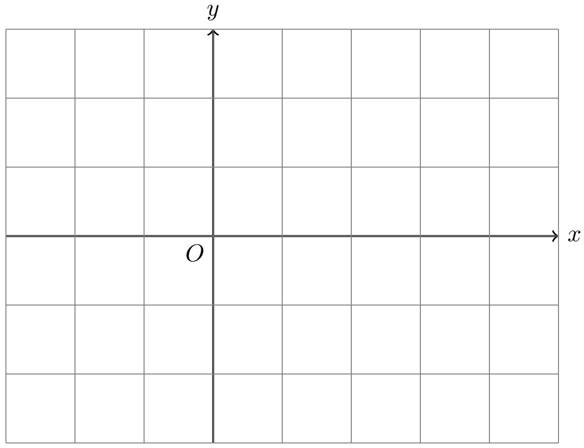
問題

2 点 A$(-3,0)$, B$(2,0)$ からの距離の比が $3:2$ である点 P の軌跡を求めよ.

1.4　連動して動く点の軌跡

点 Q が円 $x^2+y^2=4$ 上を描くとき, 点 A$(4,0)$ と点 Q を結ぶ線分 AQ の中点 P の軌跡を求めよ.

(1) 図を描こう.



(2) 予想しよう.

(3) 予想が正しいことを計算で確かめよう.
点 P の座標を (x,y), 点 Q の軌跡を (s,t) とする.

点 Q(s, t) は円 $x^2+y^2=4$ 上にあるので, 代入して

$$\underline{\hspace{8cm}}\cdots(a)$$

また, 点 P は線分 AQ の中点なので,

$$x=\underline{\hspace{2.5cm}},\quad y=\underline{\hspace{2.5cm}}$$

整理して,

$$s=\underline{\hspace{2.5cm}},\quad t=\underline{\hspace{2.5cm}}$$

これを (a) に代入して整理すると

$$\underline{\hspace{8cm}}$$

よって, 点 P は$\underline{\hspace{6.5cm}}$上にある.

逆に, この円上のすべての点 P(x,y) は条件を満たす.

したがって, 求める軌跡は$\underline{\hspace{6.5cm}}$

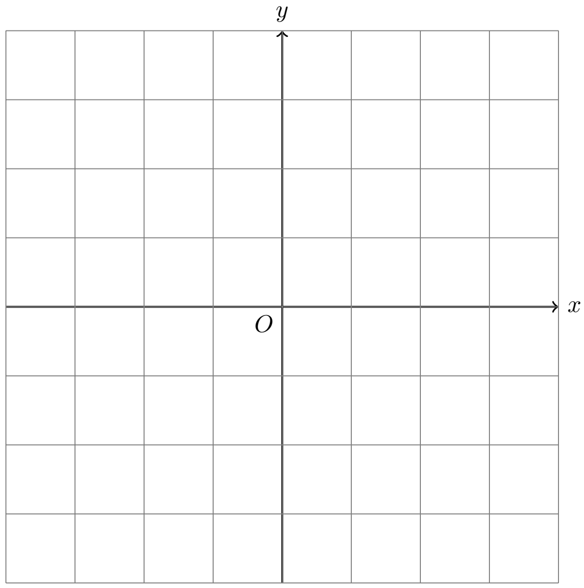
問題

点 Q が直線 $y=x+2$ 上を動くとき, 点 A$(1,6)$ と点 Q を結ぶ線分 AQ を $2:1$ に内分する点 P の軌跡を求めよ.

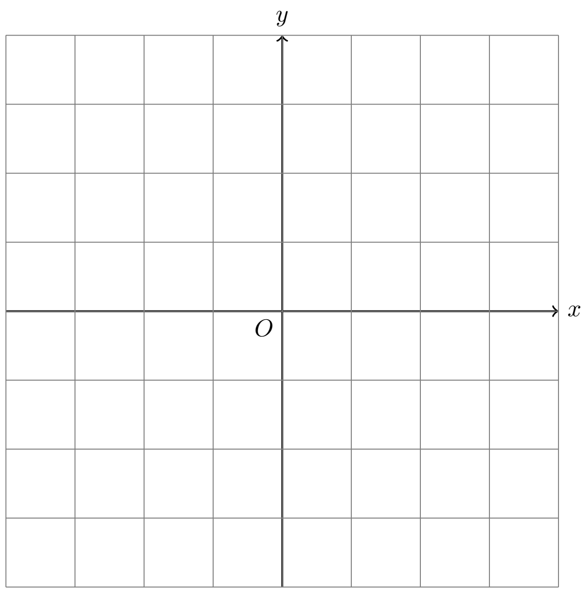
2　不等式の表す領域

2.1　領域って...?

$y \geqq x-1$ を満たす点の集まりを描こう.



$x > -1$ を満たす点 P の集まりを描こう.



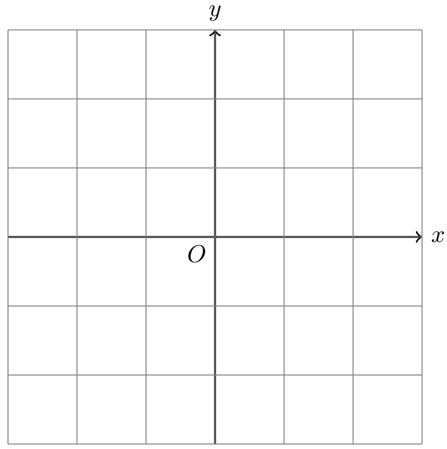
領域

与えられた条件を満たす______全体の集合を, その条件を満たす点の<u>領域</u>という.

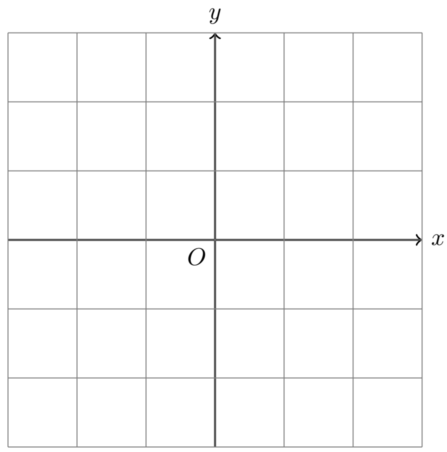
2.2　さまざまな領域

次の不等式の表す領域を図示せよ.

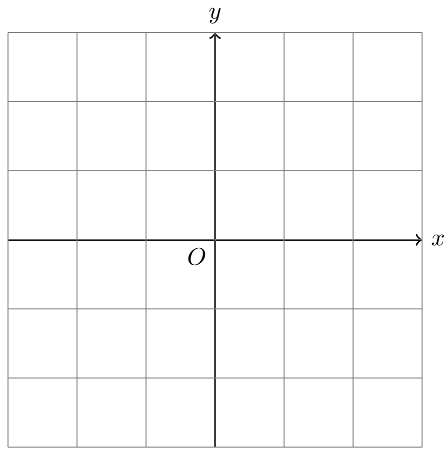
(1) $3x+y-2>0$



(2) $x^2+y^2 \leqq 4$



(3) $(x-1)^2+(y+2)^2>1$



2.3 不等式の表す領域

<u>復習</u>

連立方等式を解く

$\iff$ 2 つの図形の＿＿＿＿＿＿＿＿部分を求める

連立不等式も同じ考え方.

連立不等式の表す領域って

連立不等式を解く

$\iff$ 2 つの領域の＿＿＿＿＿＿＿＿部分を求める

(1) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ.

$$\begin{cases} x+y+1 & > 0 \\ x-y & < 0 \end{cases}$$

(2) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ.

$$\begin{cases} x^2+y^2 & > 1 \\ x-y+1 & \geqq 0 \end{cases}$$

(3) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ.

$$\begin{cases} x^2+y^2 & < 9 \\ (x-1)^2+y^2 & \geqq 4 \end{cases}$$

(4) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ.

$$\begin{cases} y & < x^2 \\ y-x & \geqq 0 \end{cases}$$

復習

$$ab < 0 \iff \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$$

(1) $(x - y + 1)(x + y - 1) < 0$ の満たす領域を図示せよ.

(2) $(x + y + 2)(x + y - 1) \geqq 0$ の満たす領域を図示せよ.

2.4　領域と最大・最小

(1) x, y が 4 つの不等式 $x \geqq 0, y \geqq 0, 2x+y \leqq 8, 2x+3y \leqq 12$ を満たす．(x, y) の存在する領域を図示せよ．

(2) (x, y) が (1) の領域内に存在するとき，$x+y$ の最大値・最小値を求めよ．

練習問題

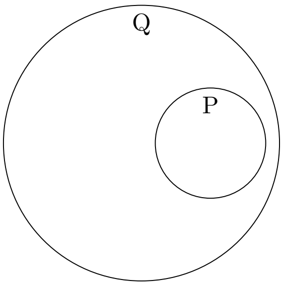
(1) x, y が 4 つの不等式 $x \geqq 0, y \geqq 0, x+3y \leqq 5, 3x+2y \leqq 8$ を同時に満たすとき，$x-y$ の最大値・最小値を求めよ．

2.5　領域を利用した証明

復習
2つの条件 p, q について,

条件 p を満たすもの全体の集合を P
条件 q を満たすもの全体の集合を Q

とする.



次の命題は真か偽か.

$$p \Longrightarrow q$$

(1) x, y は実数とする. 以下を示せ.

$$(x+2)^2 + y^2 < 1 \implies (x+3)^2 + y^2 \leqq 3$$

(2) x, y は実数とする. 以下を示せ.

$$x^2 + y^2 \leqq 1 \implies x + y \leqq \sqrt{2}$$

(3) x, y は実数とする. 次の命題の真偽を判定せよ.
また, 真の場合には証明し, 偽の場合には判例をあげよ.

$$x^2 + y^2 \leqq \sqrt{5} \implies x - y \leqq \sqrt{5}$$