1　等差数列と等比数列

1.1　数列とは

数を一列に並べたものを数列という．そのうち, 規則性のあるものについて考えていく．例えば,

$$1,\quad 4,\quad 9,\quad 16,\quad 25,\quad 36,\quad 49,\quad 64,\quad \cdots,\quad n^2$$

様々な数列に触れて, 数列に慣れよう．

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\cdots$	a_n
(1)	1,	2,	3,	4,	5,	$\cdots$	
(2)	1,	-2,	3,	-4,	5,	$\cdots$	
(3)						$\cdots$	$n(2n-1)$
(4)		5,	8,	11,		$\cdots$	
(5)	-1,	3,	7,	11,		$\cdots$	
(6)	2,	4,	8,	16,		$\cdots$	
(7)		12,	24,	48,		$\cdots$	
(8)	a ,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,		$\cdots$	
(9)	a,	ar,	ar^2,	ar^3,		$\cdots$	

1.2　等差数列

左の (　), (　), (　), (　) のように, 初項 a に一定の数 d を足していくことで得られる数列を______________という．

また, この一定の値のことを______________という．

例題

初項 1, 公差 3 である数列を第 1 項から第 5 項までを列挙せよ．また, 一般項を求めよ．

等差数列

初項 a, 公差 d の等差数列の一般項は

$$a_n =$$

1.3　等比数列

左の (　), (　), (　), (　) のように, 初項 a に一定の数 r をかけていくことで得られる数列を______________という．

また, この一定の値のことを______________という．

例題

初項 1, 公比 3 である数列を第 1 項から第 5 項までを列挙せよ．また, 一般項を求めよ．

等比数列

初項 a, 公差 r の等比数列の一般項は

$$a_n =$$

1.4　基礎問題

以下の数列の一般項を求めよ.

(1) 初項 5, 公差 4 の等差数列

(2) 初項 10, 公差 -5 の等差数列

(3) 初項 4, 公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列

(4) 初項 5, 公比 3 の等差数列

(5) 初項 3, 公比 -2 の等差数列

(6) 初項 8, 公比 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列

1.5　問題

(1) 第 4 項が 15, 第 8 項が 27 の等差数列の一般項を求めよ.

(2) 第 5 項が 20, 第 10 項が 0 の等差数列の一般項を求めよ.

(3) 第 2 項が 6, 第 6 項が 54 の等差数列の一般項を求めよ.

(4) 第 3 項が -4, 第 5 項が -16 の等差数列の一般項を求めよ.

1.6　当然の話

あたりまえ

(1) 初項 a, 公差 d の等差数列において, 全ての n で, 以下が常に成立.

$$a_{n+1} - a_n = d$$

(2) 初項 a, 公比 r の等比数列において, 全ての n で, 以下が常に成立.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

これらを用いて, 証明をしよう.

(1) $a_n = 3n - 4$ が等差数列であることを示せ. また, 初項と公差を求めよ.

(2) $2 \cdot 3^n$ が等比数列であることを示せ. また, 初項と公比を求めよ.

1.7　練習

以下の数列において, x の値を求めよ.

(1) 等差数列 $1,\ x,\ 8$

(2) 等差数列 $3,\ x,\ 7$

(3) 等差数列 $\dfrac{1}{12},\ \dfrac{1}{x},\ \dfrac{1}{6}$

(4) 等比数列 $2,\ x,\ 5$

(5) 等比数列 $3,\ x,\ 9$

2　等差数列の和

2.1　等差数列の和

$S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25$

について考える.

等差数列の和

2.2　練習問題

(1) 初項 3, 末項 19, 項数 15 の等差数列の和

(2) 初項 2, 末項 10, 項数 9 の等差数列の和

(3) 初項 10, 公差 -3 の等差数列の初項から第 18 項までの和

2.3 練習問題 2

以下の数列の和を求めよ.

(1) $15, 18, 21, \cdots, 96$

(2) $102, 96, 90, \cdots, 6$

2.4 練習問題 3

以下の問いに答えよ.

(1) 等差数列 $15, 18, 21, \cdots$ について, 第 10 項から第 20 項までの和 S を求めよ.

(2) 等差数列 $15, 11, 7, \cdots$ について, 第 100 項から第 150 項までの和 S を求めよ.

2.5　和の最大・最小

初項 13, 公差 -2 である等差数列について,

(1) 初めて負の数になるのは第何項目か.

(2) 初項から第 n 項までの和を S_n とする. S_n の最大値と, そのときの n の値を求めよ.

練習

(1) 初項 40, 公差 -3 である等差数列の第 1 項から第 n 項までの和を S_n とする. S_n の最大値と, そのときの n の値を求めよ.

(2) 初項 -100, 公差 7 である等差数列の第 1 項から第 n 項までの和を S_n とする. S_n の最小値と, そのときの n の値を求めよ.

3　等比数列の和

3.1　等比数列の和

$$S = 3 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^5 + 3 \cdot 2^6 + 3 \cdot 2^7$$

について考える.

等比数列の和

(1) 初項 5, 公比 2 の等比数列の初項から第 10 項までの和を求めよ.

(2) 初項 2, 公比 1 の等比数列の初項から第 10 項までの和を求めよ.

(3) 初項 3, 公比 -2 の等比数列の初項から第 10 項までの和を求めよ.

3.2 練習問題

以下の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ.

(1) $1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \cdots$

(2) $2, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3^2}, -\dfrac{2}{3^3}, \cdots$

以下の問いに答えよ.

(1) 初項から第 3 項までの和が 26, 第 2 項から第 4 項までの和が 78 である等比数列の初項と公比を求めよ.

(2) 初項から第 3 項までの和が 7, 第 3 項から第 5 項までの和が 28 である等比数列の初項と公比を求めよ.

4　練習問題

4.1　基礎

(1) 第 10 項が 30, 第 20 項が 0 である等差数列 $\{a_n\}$ がある.

（a）初項と公差を求めよ. また, 一般項 a_n を求めよ.

（b）-48 は第何項か.

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする.

（a）等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ.

（b）S_n を求めよ.

(3) 1 から 100 までの自然数について, 以下の和を求めよ.

（a）5 の倍数の和

（b）5 の倍数でない数の和

(4) 初項が 200, 公差が -6 の等差数列 $\{a_n\}$ について, 初項から第何項までの和が最大であるか. また, その和を求めよ.

(5) 第 2 項が 3, 初項から第 3 項までの和が 13 である等比数列の初項と公比を求めよ.

5　シグマ記号

5.1　シグマ記号

数列 $\{a_n\}$ について, 初項から第 n 項までの和

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

を, ____________とも書くことができる.

例えば,

$$\sum_{k=1}^{5} 2k =$$

$$\sum_{k=1}^{7} (2k-1) =$$

また,

$$\sum_{k=3}^{6} 2k =$$

である.

<u>練習</u>

項を書き並べて表し, その和を計算せよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 2^k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=4}^{7} (3k-2)$

(3) $\displaystyle\sum_{i=4}^{6} \frac{1}{2i}$

5.2　慣れる

(1) $1+2+3+4+5+6$ を $\sum$ を用いて表せ.

(2) $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2$ を $\sum$ を用いて表せ.

(3) $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots(n-1)^2$ を $\sum$ を用いて表せ.

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k-2)$ を計算せよ.

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^k$ を計算せよ.

5.3 自然数の累乗

1 から n までの自然数の和は

$$\sum_{k=1}^{n} k =$$

であった.
さて,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

について考える.

5.4 練習

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^2$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2$

(3) $\displaystyle\sum_{k=6}^{10} k^2$

5.5　自然数の累乗 2

1 から n までの自然数の和は

$$\sum_{k=1}^{n} k =$$

であった.
また, 2 乗和

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

である.
今回は 3 乗和

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 =$$

について考えていく.

5.6 練習

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^2$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^3$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} k^3$

5.7　さまざまな和

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(k^2+k+1)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k^2-6k+3)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2k^3$

(4) 数列 $1\cdot 3, 2\cdot 4, 3\cdot 5, \cdots, n(n+2)$ の第 k 項を k の式で表せ.

(5) 和 $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+n(n+2)$ を求めよ.

5.8　課題

和 $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2)$ を求めよ.

6

6.1

以下の数列の規則性を見つけよう.

$$1,\quad 3,\quad 7,\quad 13,\quad 21,\quad 31,\quad 43, \cdots$$

6.2　練習問題

以下の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(1) $1, 2, 5, 10, 17, \cdots$

(2) $1, 2, 4, 7, 11, \cdots$

(3) $2, 3, 5, 9, 17, \cdots$

6.3　和から数列

ある数列の初項から第 10 項までの和が 20 で, 初項から第 9 項までの和が 18 のとき, 第 10 項を求めよう.

(1) 初項から第 n 項までの和 S_n が n^2+2n で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう.

(2) 初項から第 n 項までの和 S_n が n^2-n で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう.

6.4 演習 1

$a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 11$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 階差数列が等差数列であるとき, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 階差数列が等比数列であるとき, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

6.5 演習 2

(1) 初項から第 n 項までの和 S_n が $n^2 + 1$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう.

(2) 初項から第 n 項までの和 S_n が $3^n - 1$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう.

7　色々な数列の和

7.1　積から差

以下の和を求めよ.

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6}$$

(1) 以下の和を求めよ.

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

(2) 以下の和を求めよ.

$$S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$$

7.2　かけてずらす

以下の和を求めよ.

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^5 + 7 \cdot 2^6$$

(1) 以下の和を求めよ.

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^5 + \cdots + n \cdot 2^{n-1}$$

(2) 以下の和を求めよ.

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 6 \cdot 3^5 + \cdots + n \cdot 3^{n-1}$$

7.3 群数列

群数列とは,

例

正の偶数の列を, 第 n 群には n 個の数が入るように分けた.

$$2 \mid 4, 6 \mid 8, 10, 12 \mid 14, 16, 18, 20 \mid 22, \cdots$$

(1) 第 6 群の最初の数を求めよ.

(2) 第 6 群に入る全ての数の和を求めよ.

(3) 第 n 群の最初の数を n の式で表せ.

(4) 第 10 群に入るすべての数の和を求めよ.

練習

正の奇数を以下のような群に分ける. ただし, 第 n 群には n 個の数が入るものとする.

$$1 \mid 3, 5 \mid 7, 9, 11 \mid 13, 15, 17, 19 \mid 21, \cdots$$

(1) 第 n 群の最初の数を n の式で表せ.

(2) 第 15 群に入るすべての数の和を求めよ.

8　総復習

(1) 初項 2, 公差 5 の等差数列の一般項を求めよ.

(2) 初項 2, 公差 5 の等差数列の初項から第 n 項までの和を求めよ.

(3) 第 4 項が 15, 第 8 項が 27 である等差数列の一般項を求めよ.

(1) 初項 2, 公比 3 の等比数列の一般項を求めよ.

(2) 初項 2, 公比 3 の等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ.

(3) 第 2 項が 6, 第 4 項が 54 である等比数列の一般項を求めよ.

(1) $\sum_{k=1}^{5} k$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^2$

(4) $\sum_{k=1}^{n} k^3$

(1) $\sum_{k=1}^{1} 0(3k^2 + 2k + 1)$

(2) $\sum_{k=1}^{n} (2k+1)(k-1)$

(1) 数列 $1 \cdot 3, 2 \cdot 4, 3 \cdot 5, \cdots, n(n+2)$ の和を求めよ.

(2) 数列 $1, 3, 7, 13, 21, \cdot$ の一般項を求めよ.

(1) 和 $S = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)}$ を求めよ.

(2) 和 $S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^{n-1}$ の一般項を求めよ.

(1) 正の奇数の列を, 以下のような群に分ける. ただし, 第 n 群には n 個の数が入るものとする.

$$1 \mid 3, 5 \mid 7, 9, 11 \mid 13, 15, 17, 19 \mid 21, \cdots$$

(a) 第 7 群の初めの数を求めよ.

(b) 第 7 群に入る全ての数の和 S_7 を求めよ.

(c) 第 10 群に入る全ての数の和 S_{10} を求めよ.

(d) 第 n 群の初めの数を求めよ.

(e) 第 n 群に入る全ての数の和 S_n を求めよ.

(2) 正の偶数の列を, 以下のような群に分ける. ただし, 第 n 群には n 個の数が入るものとする.

$$2 \mid 4, 6 \mid 8, 10, 12 \mid 14, 16, 18, 20 \mid 22, \cdots$$

(a) 第 7 群の初めの数を求めよ.

(b) 第 7 群に入る全ての数の和 S_7 を求めよ.

(c) 第 10 群に入る全ての数の和 S_{10} を求めよ.

(d) 第 n 群の初めの数を求めよ.

(e) 第 n 群に入る全ての数の和 S_n を求めよ.

(3) 自然数 k を小さい順に k 個ずつ並べてできる以下のような数列を考える.

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \cdots$$

（a）自然数 10 が初めて現れるのは, 何項目か.

（b）第 20 項目の数字を求めよ.

（c）初項から第 20 項までの和を求めよ.

(4) 自然数 n が初めて現れるのは第何項目かを n を用いて表せ.

(5) 第 100 項を求めよ.

(6) 初項から第 100 項までの和を求めよ.

(1) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ を求めよ.

(2) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}$ を求めよ.

(3) 数列 a_n の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = \frac{1}{3}n^3 - \frac{5}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

である.

（a）以下の和を求めよ.

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$$

（b）数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

（c）$a_n > 100$ を満たす最小の自然数 n を求めよ.

9　ハノイの塔

9.1　ルール

以下のルールに従って全ての円盤を右端の杭に移動させたら完成.

- 3 本の杭と, 中央に穴の開いた大きさの異なる複数の円盤から構成される.
- 最初はすべての円盤が左端の杭に小さいものが上になるように順に積み重ねられている.
- 円盤を一回に一枚ずつどれかの杭に移動させることができるが, 小さな円盤の上に大きな円盤を乗せることはできない.

9.2　問い

n 枚の円盤を全て移動させるには, 最低何回の手数がかかるか.

9.3　実験

(1) $n=1$ のとき.

(2) $n=2$ のとき.

(3) $n=3$ のとき.

(4) $n=4$ のとき.

9.4　気づき

実験中に気づいたことを memo.

9.5　予想

n 枚のとき, 最低手数はどうなるか.

9.6　予想が正しいことの確認

n 枚のときの最小手数を a_n で表すとき, 以下について検討する.

(1) a_1 の値

(2) a_n と a_{n-1} の間の関係性

(3) 数列 a_n を n を用いて表せるか.

10　漸化式

10.1　漸化式とは

$a_{n+1} = 2a_n + 1$

(1) $a_1 = 10, a_{n+1} = 3a_n + 2$ のとき, この数列 $\{a_n\}$ の第 1 項から第 5 項を求めよ.

10.2 漸化式を解く

10.2.1 等差・等比型

(1) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 2$

(2) $a_1 = -3, a_{n+1} = a_n - 2$

(3) $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n$

(4) $a_1 = 1, a_{n+1} = -2a_n$

10.2.2 階差型

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3^n$

(2) $a_1 = -2, a_{n+1} = a_n + 2^n$

(3) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2n + 3$

(4) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + n + 1$

10.2.3 その他

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n + 3$

(2) $a_1 = -1, a_{n+1} = 3a_n + 2$

(3) $a_1 = 3, a_{n+1} = 4a_n - 6$

(4) $a_1 = 4, a_{n+1} = 2a_n - 3$

10.2.4 章末問題レベル

(1) 以下の条件で定められる数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ の一般項 a_n, b_n をそれぞれ求めよ.

$$a_1 = 0, b_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1, b_{n+1} = b_n + a_n$$

(2) $a_1 = \frac{1}{5}, a_{n+1} = \frac{a_n}{4a_n - 1}$ の一般項を求めよ．また，$S_{20} = a_1 + \cdots a_{20}$ を求めよ.

11　数学的帰納法

11.1　等式の証明

数学的帰納法を用いて, 以下の等式を証明せよ.

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

11.2　問題

　数学的帰納法を用いて, 以下の等式を証明せよ.

(1) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

(2) $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

12　問題演習

一般項を求めよ

(1) 数列 $2, 5, 10, 17, 26, 37 \cdots$

(2) $S_n = n^2 - 3n + 3$

(3) $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + 3$

(4) $a_1 = 3, a_{n+1} = 4a_n$

(5) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2n - 3$

(6) $a_1 = 5, a_{n+1} = 3a_n - 2$

数学的帰納法を用いて, 以下の等式を示せ.

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(2n-1) = \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

12.1 問題

(1) $a_1 = 4, a_{n+1} = 3a_n + 2^n$

(2) $a_1 = 5, a_{n+1} = 2a_n - 3n + 4$

(3) $a_1 = 2, a_{n+1} = 4a_n^2$

(4) $a_1 = 1, na_{n+1} = (n+1)a_n + 2$

1　数列の極限

1.1　数列の極限

数列

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

において, n を限りなく大きくすると, どのようになっていくか.

問い

以下の数列において, n を限りなく大きくすると, どのようになっていくか.

(1) $1.1,\ 1.01,\ 1.001, \cdots, 1+(0.1)^n, \cdots$

(2) $1+\dfrac{1}{1}, 1+\dfrac{1}{2}, 1+\dfrac{1}{3}, \cdots, 1+\dfrac{1}{n}, \cdots$

(3) $-1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{3}, \cdots, \dfrac{(-1)^n}{n}, \cdots$

(4) $\cos\pi, \cos 3\pi, \cos 5\pi, \cdots, \cos(2n-1)\pi, \cdots$

極限

数列 $\{a_n\}$ において, n を限りなく大きくするとき, a_n がある値 α に限りなく近づくならば, $\{a_n\}$ は α に収束する ($\{a_n\}$ の極限は α) という.
α を $\{a_n\}$ の極限値という.
このことを, 以下のように書く.

1.2　収束しない数列

問い

以下の数列において, n を限りなく大きくすると, どのようになっていくか.

(1) $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots$

(2) $-2, -4, -6, \cdots, -2n, \cdots$

(3) $-1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots$

数列の極限

1.3 数列の極限の性質

以下が成立.

数列の極限の性質

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がともに収束し, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする.

(1) $\lim_{n\to\infty} ka_n =$

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) =$

(3) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) =$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n =$

(5) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} =$

ex

$\lim_{n\to\infty} a_n = 3, \lim_{n\to\infty} b_n = -6$ のとき,

1.4 不定形の極限

ex

(1) $\lim_{n\to\infty} (5n^2 - 3n)$

(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n}{3n+2}$

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{5n}{2n^2-7}$

(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3n}{3n+1}$

(5) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - n)$

1.5　はさみうちの原理

以下が成立.

数列の極限の性質

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする.

(1) すべての n について $a_n \leqq b_n$ ならば $\alpha \leqq \beta$

(2) すべての n について $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ かつ, $\alpha = \beta$ ならば,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

他にも..

例題

極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3}$ を求めよ.

練習

θ を定数とするとき, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\theta}{6}$ を求めよ.

2　無限等比級数

等差数列は....

2.1　等比数列の極限

以下が成立.

数列 $\{r^n\}$ の極限

$r > 1$ のとき　$r^n \to \infty (as\ n \to \infty)$

$r = 1$ のとき　$r^n \to 1 (as\ n \to \infty)$

$|r| < 1$ のとき　$r^n \to 0 (as\ n \to \infty)$

$r \leqq -1$ のとき　$\{r^n\}$ は振動

練習

第 n 項が以下の式で表される数列の極限を求めよ.

(1) $\left(\sqrt{2}\right)^n$

(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

(3) $\left(-\dfrac{4}{5}\right)^n$

(4) $3\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}$

等比数列の極限についてまとめたことから, 以下が成立.

数列 $\{r^n\}$ が収束するための必要十分条件は,

例

数列 $\left\{\left(\dfrac{x}{3}\right)^n\right\}$ が収束するための必要十分条件を求めよ. また, そのときの極限値を求めよ.

2.2 r^n を含む数列の極限

以下の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+3^n}{4^n-3^n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{3^n+2^n}$

数列 $\left\{\dfrac{r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を, 以下の場合について求めよ.

(1) $|r|<1$

(2) $r<-1$

2.3　練習

以下の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{5^n-3^n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^n}{3^n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}}{5^n-4^n}$

数列 $\left\{\dfrac{1-r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を, 以下の場合について求めよ.

(1) $r>1$

(2) $r=1$

(3) $|r|<1$

(4) $r<-1$

2.4　漸化式

例

以下の条件で定められる数列の極限を求めよ.

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

練習

以下の条件で定められる数列の極限を求めよ.

$$a_1 = 2, a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

3　無限級数

3.1　考える

(1) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ に対し,

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

を考える.

$n \to \infty$ のとき, S_n はどうなるか.

(2) $a_n = n$ に対し,

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

を考える.

$n \to \infty$ のとき, S_n はどうなるか.

3.2　無限級数

以下の和

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

を無限級数という.

また,

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

を, 無限級数の第 n 項までの部分和という.

無限級数 S_n が収束して, 極限値が S のとき,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

のとき, 無限級数は S に収束するという. S を $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ とも書く.

$\{S_n\}$ が発散するとき, 無限級数は発散するという.

3.3 練習

3.3.1 例題

次の無限級数の収束, 発散を調べ, 収束するときはその和を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\cdots$

3.3.2 例題

次の無限級数の収束, 発散を調べ, 収束するときはその和を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\cdots$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}+\cdots$

3.4 無限等比級数

3.4.1 復習

初項 a, 公比 r の等比数列の, 第 n 項までの和を求めよ.

3.4.2 無限等比級数

初項 a, 公比 r の無限等比数列から作られる無限級数

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

を, 初項 a, 公比 r の無限等比級数という.
極限を考える.

(1) $a = 0$ のとき,

(2) $a \neq 0$ のとき

(a) $r = 1$ のとき

(b) $|r| < 1$ のとき

(c) $r \leqq -1$ のとき

(d) $r > 1$ のとき

まとめると,

無限等比級数

3.4.3 練習

(1) 初項 1, 公比 $\dfrac{1}{2}$ の無限等比級数の収束, 発散を調べ, 収束する場合はその和を求めよ.

(2) $(\sqrt{2}+1) + 1 + (\sqrt{2}-1) + \cdots$ で表される無限等比級数の収束, 発散を調べ, 収束する場合はその和を求めよ.

(3) 無限等比級数 $x + x(2-x) + x(2-x)^2 + \cdots$ が収束するような x の値の範囲を求めよ.

3.5　これまでの問題への応用

(1) 数直線上で, 点 P が原点 O から正の向きへ 1 だけ進み, そこから負の向きに $\dfrac{1}{2}$, そこから正の向きに $\dfrac{1}{2^2}$, そこから負の向きに $\dfrac{1}{2^3}$ と進む. 以下, このような移動を限りなく続けるとき, 点 P が近づいていく点の座標を求めよ.

(2) 循環小数 $0.2\dot{3}\dot{4}$ を分数で表せ.

練習

(1) 数直線上で, 点 P が原点 O から正の向きへ 1 だけ進み, そこから負の向きに $\dfrac{1}{2^2}$, そこから正の向きに $\dfrac{1}{2^4}$, そこから負の向きに $\dfrac{1}{2^6}$ と進む. 以下, このような移動を限りなく続けるとき, 点 P が近づいていく点の座標を求めよ.

(2) 循環小数 $0.4\dot{7}0\dot{2}$ を分数で表せ.

問題

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$ の和を求めよ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{2}{3^n}\right)$ の和を求めよ.

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n-3^n}{4^n}\right)$ の和を求めよ.

3.6 無限級数の収束と発散

以下が成立.

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束する $\Longrightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない $\Longrightarrow$ 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する.

例題

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ の収束, 発散を調べよ.