KNC(難関大学対策講座) 数学

～整数を学ぶ～

令和 6 年 8 月 21 日

2 年 4 組＿＿＿＿番 氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

- 2 つの整数 a, b について, ある整数 $k \in \mathbb{Z}$ を用いて $a = bk$ と表せるとき,

  b は a の倍数, a は b の倍数

- 2 つ以上の整数について, 共通する倍数を公倍数といい, 公倍数の中で最大のものを最大公倍数という.

- 2 つ以上の整数について, 共通する倍数を公倍数といい, 公倍数の中で最小のものを最小公倍数という.

[補足] 最大公約数は $G.C.D$, 最小公倍数は $L.C.M$

- 2 つの整数 a, b に対し, 最大公約数が 1 であるとき, a と b は互いに素であるという.

- 和・差・積のあまりについて
  $a = mp + r, b = mp' + r'$ とする.

$$\begin{array}{ccccc}
a+b & \text{を } m \text{ で割ったあまり} & = & r+r' & \text{を } m \text{ で割ったあまり} \\
a-b & \text{を } m \text{ で割ったあまり} & = & r-r' & \text{を } m \text{ で割ったあまり} \\
ab & \text{を } m \text{ で割ったあまり} & = & rr' & \text{を } m \text{ で割ったあまり} \\
a^k & \text{を } m \text{ で割ったあまり} & = & r^k & \text{を } m \text{ で割ったあまり}
\end{array}$$

$\boxed{\textbf{1}}$ 以下の問いに答えよ．【倍数の判定】

(1) 百の位が 3, 十の位が 8 である 4 桁の自然数 A がある．A が 5 び倍数であり, 3 の倍数であるとき, A を求めよ．

(2) ある 2 桁の自然数 B を 9 倍して 72 を足すと, 百の位が 6, 一の位が 5 であるとき, B を求めよ．

$\boxed{\textbf{2}}$ 以下の問いに答えよ．【$\sqrt{n}$ が自然数となる n】

(1) $\sqrt{378n}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ．

(2) $\sqrt{n^2+12n}$ が自然数 m になるような自然数 m と n の組み合わせを求めよ．

3 以下の問いに答えよ．【最小公倍数から自然数決定】

（1）条件「n と 16 の最小公倍数が 144」を満たす自然数 n を全て求めよ．

（2）条件「n と 45 と 60 の最小公倍数が 360」を満たす自然数 n を全て求めよ．

4 1 から 10 までの 10 個の自然数の積 $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 10$ について，N を素因数分解したとき，次の問いに答えよ．【末尾に並ぶ 0 の個数】

（1）素因数 2 の個数を求めよ．

（2）素因数 5 の個数を求めよ．

（3）N を計算すると，末尾には 0 は連続して何個並ぶか．

5 整数 a は, 7 で割ると 3 あまり, 整数 b は 7 で割ると 6 余る．このとき, $a+b, a-b, ab$ を 7 で割った余りをそれぞれ求めよ．【和・差・積のあまり】

6 各問いに答えよ．【a^k を m で割ったあまり】

（1）7^{50} を 6 で割ったあまりを求めよ.

（2）3^{30} を 8 で割ったあまりを求めよ.

(3) 5^{100} を 3 で割ったあまりを求めよ.

- ユークリッドの互除法

① 割り算と最大公約数の関係

自然数 a, b に対し, a を b で割った余りを r とすると, 以下が成立.

$$gcd(a, b) = gcd(r, b)$$

② ユークリッドの互除法

①のことから, 整数 a, b の最大公約数を求めるには, 以下の手順を繰り返せば良い.

[1] a を b で割った余りを r とする.

[2] $r = 0$ ならば　$gcd(a, b) = b$
　　$r > 0$ ならば　a を b で, b を r で置き換えて [1] に戻る.

- 1 次不定方程式

① 互いに素である整数の性質

2 つの整数 a, b が互いに素であるとき, 整数 c について, $ax + by = c$ を満たす整数 x, y が存在する.

② 1 次不定方程式と整数解

$a, b, c \in \mathbb{Z}$ とする $(a, b \neq 0)$. x, y の 1 次方程式 $ax + by = c$ を成り立たせる整数 x, y の組を, この方程式の整数解という. この方程式の整数解を求めることを 1 次不定方程式を解くという.

$\boxed{\mathbf{7}}$ 以下の 2 数の最大公約数を求めよ．【最大公約数】

（1）667, 966

（2）4165, 6035

8 次の等式を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ．【1 次不定方程式の整数解】

（1）$11x + 19y = 1$

（2）$11x + 19y = 5$

9 次の等式を満たす整数 x, y の組を全すべて求めよ．【1 次不定方程式の整数解】

（1）$5x + 7y = 1$

（2）$35x - 29y = 3$

入試問題に挑戦

$\boxed{\mathbf{1}}$ $2m^2-n^2-mn-m+n=18$ を満たす自然数 m, n を求めよ.

$\boxed{\textbf{2}}$ 4 個の整数 $n+1, n^3+3, n^5+5, n^7+7$ がすべて整数となるような正の整数 n は存在しない．これを証明せよ．

[大阪大]

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 2 つの自然数の組 (a, b) は, 条件 $a < b$ かつ $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{4}$ を満たす. このような組 (a, b) のうち, b の最も小さいものをすべて求めよ.

(2) 3 つの自然数の組 (a, b, c) は, 条件 $a < b < c$ かつ $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{3}$ を満たす. このような組 (a, b, c) のうち, c の最も小さいものをすべて求めよ.

[一橋大]

$\boxed{\mathbf{4}}$ 自然数 n の関数 $f(n), g(n)$ を,

$$f(n) = n \text{ を } 7 \text{ で割ったあまり}, \quad g(n) = 3f\left(\sum_{k=1}^{7} k^n\right)$$

によって定める.

(1) すべての自然数 n に対して, $f(n) = f(n^7)$ を示せ.

(2) あなたの好きな自然数 n を決めて $g(n)$ を求めよ. その $g(n)$ の値をこの設問におけるあなたの得点とする.

[京都大]

$\boxed{\mathbf{5}}$ p が素数であれば, どんな自然数 n についても $n^p - n$ は p で割り切れる. このことを n についての数学的帰納法で証明せよ.

[京都大]

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1)

[大]