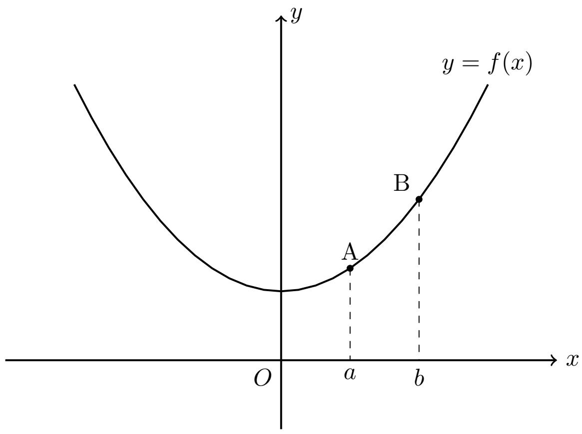
1　微分係数

1.1　平均変化率



2 点 A, B 間の傾きを求めよう.

$(AB\text{ の傾き}) =$

これを $x = a$ から $x = b$ までの $f(x)$ の

______________________________という.

<u>練習</u>
以下の平均変化率を求めよ.

(1) 関数 $f(x) = 2x^2 - 1$ の $x = 1$ から $x = 2$ まで

(2) 関数 $f(x) = x^2$ の $x = a$ から $x = a + h$ まで

1.2　微分係数

関数 $f(x)$ の $x = a$ から $x = a + h$ までの平均変化率は,

であり, この値が $h \to 0$ において一定の値に近づくとき, その極限値を

関数 $f(x)$ の $x = a$ における____________________

といい, $f'(a)$ と書く.
つまり,

$x = a$ における微分係数

$f'(a) =$

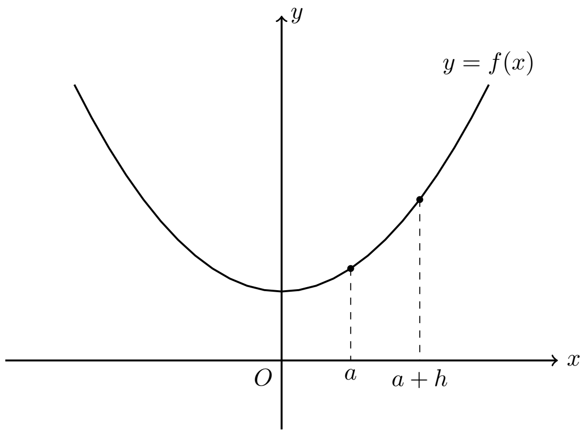
<u>練習</u>
以下の微分係数を定義に従って求めよ.

(1) 関数 $f(x) = x + 3$ の $x = 2$ での微分係数

(2) 関数 $f(x) = x^2$ の $x = 3$ での微分係数

(3) 関数 $f(x) = x^3$ の $x = -1$ での微分係数

1.3　微分係数の図的意味



$h \to 0$ において, 平均変化率は何になるか.

微分係数の意味

<u>練習</u>
以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x) = x^2 + 1$ のグラフ上の点 $(1, 2)$ における接線の方程式を求めよ.

2　導関数

2.1　導関数

各点 x に, その点での微分係数 $f'(x)$ を対応させる新しい関数を $f(x)$ の導関数という. つまり,

導関数の定義

$$f'(x) =$$

練習

定義に従って, 以下の関数の導関数を求めよ.

(1) $f(x) = x$

(2) $f(x) = x^2$

(3) $f(x) = x^3$

(4) $f(x) = x^4$

(5) $f(x) = 2$

予想

(1) $f(x) = x^5$ の導関数はどうなるだろうか.

(2) n を正の整数としたとき, $f(x) = x^n$ の導関数はどうなるだろうか.

関数 x^n, 定数関数の導関数

n を正の整数とする.

関数 x^n の導関数は $(x^n)' =$

定数関数 c の導関数は $(c)' =$

Proof.

□

導関数の表記法

関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を以下のように表すこともある.

練習

以下の導関数を求めよ.

(1) $y = x^6$

(2) $y = x^{10}$

(3) $y = 4$

2.2　多項式関数の微分

関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることを,

$f(x)$ を＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿という.

今後しばらくは, 多項式関数について考える.

関数の定数倍, 和, 差の導関数

k : 定数, $f(x), g(x)$: 多項式関数とする.

1. $y = kf(x)$ を微分すると $y' =$
2. $y = f(x) + g(x)$ を微分すると $y' =$
3. $y = f(x) - g(x)$ を微分すると $y' =$

Proof.

□

練習 1

以下の関数を (x で) 微分せよ.

(1) $y = x^2 + 3x + 1$

(2) $y = 3x^3 + x^2 - 4$

(3) $y = \dfrac{1}{2}x^4 - 3x + 100$

(4) $y = ax^2 + bx + c$　(a, b, c は定数とする.)

練習 2

以下の関数を (x で) 微分せよ.

(1) $y = (x+1)(x-1)$

(2) $(x-2)^3$

(3) $3(x^2+1)^2$

練習 3

関数 $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + x + 1$ について, 次の x の値における微分係数を求めよ.

(1) $x = 1$

(2) $x = 0$

(3) $x = -1$

練習 4

関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が以下の条件を全て満たすとき, 定数 a, b, c の値を求めよ.

$$f'(0) = 1, \quad f'(1) = 3, \quad f(1) = -1$$

3　接線の方程式

3.1　復習

(1) 関数 $y = -x^2 + 2x$ のグラフ上の点 $(1, 1)$ における接線の方程式を求めよ.

(2) 関数 $y = x^2 + 4x - 3$ のグラフ上に, x 座標が 1 である点 A をとる. 点 A における接線の方程式を求めよ.

練習

(1) 関数 $y = 2x^2 + x$ のグラフ上の点 $(-1, 1)$ における接線の方程式を求めよ.

(2) 関数 $y = -2x^2 + 3x + 1$ のグラフ上に, x 座標が 2 である点 A をとる. 点 A における接線の方程式を求めよ.

3.2　グラフ上にない点から引く接線

例

関数 $y = x^2 + 8$ のグラフに, 点 $(1, 0)$ から引いた接線の方程式を求めたい.

(1) 接点の x 座標を a とする. 傾きを求めよ.

(2) 接点の x 座標を a とする. 接線の方程式を求めよ.

(3) 接点が () を通ることから, (2) の結果を用いて a の方程式を作れ.

(4) (3) の方程式を解くことで, a の値を求め, 接点の座標を求めよ.

(5) 接線の方程式を全て求めよ.

練習 1
関数 $y = x^2 + 3x + 1$ のグラフに, 原点から引いた接線の方程式を求めよ.

練習 2
関数 $y = 2x^2 + 1$ のグラフに, 点 $(1, 1)$ から引いた接線の方程式を求めよ.

4　増減と極大・極小

4.1　準備

実数 a, b に対して, 不等式

$$a < x < b,\quad a \leqq x \leqq b,\quad a < x \leqq b,\quad x < b$$

などを満たす実数全体の集合を＿＿＿＿＿＿という.

- $a < x < b$ を＿＿＿＿＿＿と書く.
- $a \leqq x \leqq b$ を＿＿＿＿＿＿と書く.
- $a \leqq x < b$ を＿＿＿＿＿＿と書く.
- $a < x$ を＿＿＿＿＿＿と書く.
- $x \leqq b$ を＿＿＿＿＿＿と書く.

例

(1) $1 < x \leqq 3$

(2) $-3 < x$

復習

$y = f(x)$ について, ある点 $(a, f(a))$ で

$f'(a) > 0$ のとき,　接線の傾きは　＿＿＿

$f'(a) = 0$ のとき,　接線の傾きは　＿＿＿

$f'(a) < 0$ のとき,　接線の傾きは　＿＿＿

調べてみる

$f(x) = x^2 - 2x$ について,

(1) $y = f(x)$ のグラフを描け.

(2) $f'(x)$ を求めよ.

(3) $f'(x) = 0$ となる x の値を求めよ.

(4) $f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

(5) $f'(x) < 0$ となる x の範囲を求めよ.

関数 $f(x)$ の増減と $f'(x)$ の符号

4.2　n 次関数

<u>調べてみる！</u>

関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$ について,

(1) $f'(x)$ を求めよ.

(2) $f'(x) = 0$ となる x の値を求めよ.

(3) $f'(x) > 0, f'(x) < 0$ となる x の範囲をそれぞれ求めよ.

練習 1

関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ について, 増減を調べ, グラフを描け. また, 極値がある場合それを全て求めよ.

練習 2

関数 $f(x) = x^3 - 3x$ について, 増減を調べ, グラフを描け. また, 極値がある場合それを全て求めよ.

練習 3
関数 $f(x) = x^3$ について, 増減を調べ, グラフを描け. また, 極値がある場合それを全て求めよ.

練習 4
関数 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$ について, 増減を調べ, グラフを描け. また, 極値がある場合それを全て求めよ.

4.3　極値から定数

例題

関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ が $x = 2$ で極小値 -1 をとるように, 定数 a, b の値を定めよ. また, 極小値を求めよ.

練習 1

関数 $f(x) = x^3 + ax + b$ が $x = 1$ で極小値 -2 をとるように, 定数 a, b の値を定めよ. また, 極大値を求めよ.

練習 2

関数 $f(x) = -x^3 + ax + b$ が $x = 1$ で極大値 3 をとるように, 定数 a, b の値を定めよ. また, 極小値を求めよ.

練習 3

関数 $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + b$ が $x = -1$ で極大値 8 をとるように, 定数 a, b の値を定めよ. また, 極小値を求めよ.

5　関数の増減・活用

5.1　最大・最小

復習

以下の関数の最大・最小を求めよ．また, そのときの x の値を求めよ．

$$y = x^2 - 4x + 1 \quad (1 \leqq x \leqq 5)$$

練習

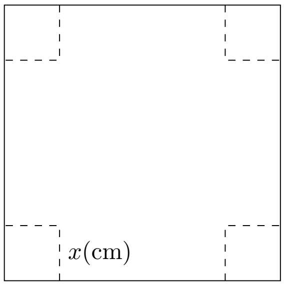
以下の関数の最大・最小を求めよ．また, そのときの x の値を求めよ．

(1) $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 4 \quad (-4 \leqq x \leqq 2)$

(2) $y = -2x^3 + 6x \quad (-3 \leqq x \leqq 3)$

5.2 文章題

(1) 1 辺の長さが 12cm である正方形の厚紙の四隅から, 合同な正方形を切り取った残りで, 蓋のない直方体の箱を作る. このとき, 箱の容積を最大にするには, 切り取る正方形の 1 辺の長さを何 cm にすれば良いか. 以下の手順に沿って答えよ.



(a) 切り取る正方形の 1 辺の長さを $x$cm, このときの箱の容積を $y\text{cm}^3$ とする. y を x の関数として表せ.

(b) 箱の容積が最大になるのは, 切り取る正方形の 1 辺の長さが何 cm のときか求めよ.

(2) 底面の直径と高さの和が 18cm である直円柱について, 体積が最大となるのは底面の半径が何 cm のときか求めよ.

5.3 方程式

復習

以下の方程式の異なる実数解の個数を求めよ.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

例題

以下の方程式の異なる実数解の個数を求めよ.

$$x^3 - 6x^2 - 5 = 0$$

練習

以下の方程式の異なる実数解の個数を求めよ.

(1) $x^3 - 12x + 5 = 0$

(2) $-x^3 + 6x^2 - 9x + 4 = 0$

5.4 定数分離

例題

方程式 $x^2+4x+1-a=0$ が異なる 2 つの実数解を持つように, 定数 a の値の範囲を求めよ.

例題

方程式 $x^3-12x+5-a=0$ が異なる 3 つの実数解を持つように, 定数 a の値の範囲を求めよ.

練習

(1) 方程式 $2x^3-3x^2+1-a=0$ が異なる 3 つの実数解を持つように, 定数 a の値の範囲を求めよ.

(2) 方程式 $-x^3+6x^2+4-2a=0$ がただ 1 つの実数解を持つように, 定数 a の値の範囲を求めよ.

(3) 方程式 $-2x^3+6x^2+18x-7-2a=0$ の実数解の個数を求めよ.

5.5　不等式の証明

(1) $x \geqq 0$ のとき, 以下の不等式が成り立つことを示せ.

$$x^3 + 9x \geqq 6x^2$$

(2) $x \geqq 0$ のとき, 以下の不等式が成り立つことを示せ.

$$x^3 \geqq -3x^2$$

1　不定積分

1.1　言葉の意味

- x で微分すると $f(x)$ になる関数を,

  $f(x)$ の____________________という.

  Question : $2x$ の原始関数であるものを挙げよ.

- また, x で微分すると $f(x)$ になる関数を,

  $f(x)$ の________________ともいい, ____________と書く.

  Question : 不定積分 $\displaystyle\int 2x\,dx$ を求めよ.

1.2　練習問題

以下の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\,dx$

(2) $\displaystyle\int x^2\,dx$

(3) $\displaystyle\int x^3\,dx$

(4) $\displaystyle\int x^4\,dx$

(5) $\displaystyle\int x^n\,dx$

x^n の不定積分

n を 0 以上の整数とする.

$$\int x^n\,dx =$$

1.3　多項式関数の積分

多項式関数においても, 微分と同様にそれぞれで考える.

(1) $\displaystyle\int 4x^3 dx$

(2) $\displaystyle\int (x^3 + x^2 + x) dx$

(3) $\displaystyle\int (2x^3 - x^2 + 5x + 1) dx$

(4) $\displaystyle\int (x+1)(x-1) dx$

(5) $\displaystyle\int (x+2)(x+4) dx$

(6) $\displaystyle\int 2(x+2)^3 dx$

1.4 x 以外の変数

変数が x 以外の関数でも同様である.

(1) $\displaystyle\int t^3 dt$

(2) $\displaystyle\int (2y^3 + 3y^2 + 4y) dy$

また, 積分する定数以外は, 定数として扱う.

(1) $\displaystyle\int xt dt$

(2) $\displaystyle\int (3xt^2 + 2xt + x) dt$

1.5　条件を満たす関数

例題

以下の 2 つの条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ.

$$[1]F'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \quad [2]F(1) = 5$$

練習問題

(1) 以下の 2 つの条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ.

$$[1]F'(x) = 6x^2 - 4x \quad [2]F(-1) = 4$$

(2) 以下の 2 つの条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ.

$$[1]F'(x) = 9x^2 - 1 \quad [2]F(0) = 5$$

2　定積分

2.1　定積分

関数 $f(x)=2x$ の原始関数 $F(x)$ は,

$$F(x)=x^2+C \quad (C:\text{定数})$$

$F(4)-F(2)$ を求めてみよう.

定積分

例

練習問題 1

定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_2^4 x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_3^1 3x^2\,dx$

(3) $\displaystyle\int_3^5 3\,dx$

練習問題 2

定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 (x^2+x)dx$

(2) $\displaystyle\int_3^6 (2x+1)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 (4x^3+3x^2-3)dx$

(4) $\displaystyle\int_3^0 (x+1)(x-2)dx$

(5) $\displaystyle\int_{-2}^2 t(t+1)^2 dt$

(6) $\displaystyle\int_{-1}^2 (y^2+1)^2 dy$

練習問題 3

定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{1}^{1}(x^2-x)dx$

(2) $\displaystyle\int_{3}^{6}(2x+1)dx$

(3) $\displaystyle\int_{6}^{3}(2x+1)dx$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{0}(x+1)(x-2)dx+\int_{0}^{2}(x+1)(x-2)dx$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx$

(6) $\displaystyle\int_{2}^{3}(x^2+1)^2dx+\int_{-1}^{2}(x^2+1)^2dx+\int_{3}^{-1}(x^2+1)^2dx$

2.2　定積分を含む等式

例 1

以下の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

$$f(x) = 2x + \int_0^2 f(t)dt$$

練習

以下の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

(1) $f(x) = 4x + 2\int_0^2 f(t)dt$

(2) $f(x) = 3x^2 + \int_{-1}^1 f(t)dt$

x の関数 $\int_a^x f(t)dt$ について.

例 1

以下の等式を満たす関数 $f(x)$ と, 定数 a の値を求めよ.

$$\int_a^x f(t)dt = x^2 + 2x + 1$$

練習

以下の等式を満たす関数 $f(x)$ と, 定数 a の値を求めよ.

(1) $\int_a^x f(t)dt = x^2 + 3x - 4$

(2) $\int_a^x f(t)dt = x^2 - 2x - 3$

(3) $\int_a^x f(t)dt = 3x^2 + 2x - 1$

3　定積分と面積

$f(x) \geqq 0$ における面積

区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqq 0$ のとき, $y = f(x)$ のグラフと x 軸及び 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた部分の面積は

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

〈図的説明〉

3.1　練習 1

次の曲線と 2 直線および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1) 放物線 $y = x^2$, 2 直線 $x = 1, x = 3$

(2) 放物線 $y = x^2 + 1$, 2 直線 $x = -3, x = 0$

(3) 放物線 $y = (x + 1)^2$, 2 直線 $x = -1, x = 2$

(4) 放物線 $y = (x - 1)^2 + 1$, 2 直線 $x = -1, x = 3$

3.2　考える 1

放物線 $y=-x^2$ と 2 直線 $x=0, x=3$ および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

3.3　練習 2

(1) 放物線 $y=x^2-1$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(2) 放物線 $y=x^2-9$ と 2 直線 $x=-2, x=2$ および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

3.4　考える 2

放物線 $y = x^2 - 4$ と 2 直線 $x = 0, x = 4$ および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

3.5　練習 3

(1) 放物線 $y = x^2 - 1$ と 2 直線 $x = 0, x = 2$ および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(2) 放物線 $y = 3x^2 - 27$ と 2 直線 $x = -1, x = 4$ および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(3) $y = x^3 - x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(4) $y = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

3.6　考える 3

2 曲線 $y = x^2 - 2$ と $y = x$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

3.7　練習 4

(1) 2 曲線 $y = x^2$ と $y = 2x$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

(2) 2 曲線 $y = x^2 - 2$ と $y = -x^2$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

(3) 2 曲線 $y = x^2 + x - 3$ と $y = -x^2 + 5x + 3$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

3.8　考える 4

以下の定積分について考える.

$$\int_0^3 |x^2-4|dx$$

(1) $y=|x^2-4|$ のグラフを描こう.

(2) $\displaystyle\int_0^3 |x^2-4|dx$ の図的意味を説明しよう.

(3) $\displaystyle\int_0^3 |x^2-4|dx$ を求めよ.

3.9　練習 5

以下の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^2 |x(x-4)|dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^4 |x^2-x-6|dx$

4　曲線と接線

例題

曲線 $y = x^3 - 9x$ 上に点 A$(1, -8)$ をとる.

(1) 点 A における接線 l の方程式を求めよ.

(2) 曲線 $y = x^3 - 9x$ と接線 l で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

4.1　練習

曲線 $y = x^3 - 4x^2 + x + 6$ 上に点 A$(3, 0)$, B$(0, 4)$ をとる.

(1) 曲線 $y = x^3 - 4x^2 + x + 6$ と点 A における接線で囲まれた部分の面積 S_1 を求めよ.

(2) 曲線 $y = x^3 - 4x^2 + x + 6$ と点 B における接線で囲まれた部分の面積 S_2 を求めよ.

5 $\dfrac{1}{6}$ 公式

放物線と x 軸で囲まれた部分の面積

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)dx =$$

Proof. $\square$

5.1 例題

放物線 $y = x^2 - 2x - 2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

5.2　練習

(1) 放物線 $y = x^2 - 2x - 2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(2) 放物線 $y = 2x^2 - 3x - 2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(3) 放物線 $y = -x^2 + 2x + 2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(4) 放物線 $y = -3x^2 + 2x + 3$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

6　積分問題演習

問題 1

曲線 $C : y = x^2 - ax$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積が 36 になるように a の値を定めよ.

(2) 曲線 C と x 軸および, 2 直線 $x = 1, x = 2$ で囲まれてできる面積が最小になるように, a の値を定めよ.

問題 2
曲線 $y = -x^2 + 4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を直線 $y = kx$ (k : 定数) で 2 等分するように k の値を定めよ.

問題 3
曲線 $y = x^2$ と点 $(0, 2)$ を通る直線で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ.