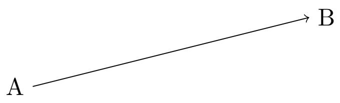
1　ベクトルとその演算

1.1　ベクトル

用語

- 有向成分
  ⋯ 線分に向きをつけたもの.



- 始点
  ⋯ 有向成分の始まりの点. 上の図であれば点 A のこと.

- 終点
  ⋯ 有向成分の終わりの点. 上の図であれば点 B のこと.

- ベクトル
  ⋯ 有向成分の向きと大きさにのみ着目したもの. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のように表す. また, 大きさを $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ で表す.

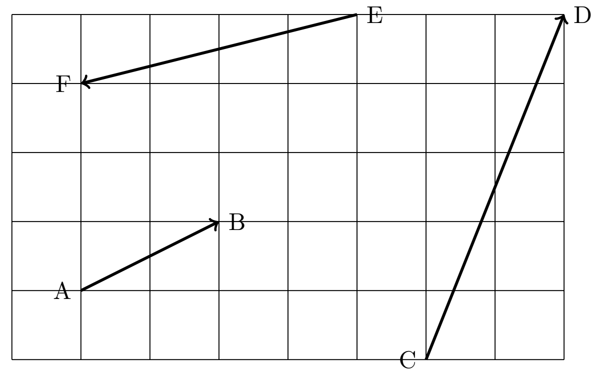
- ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の逆ベクトル
  ⋯ 大きさが等しく向きが逆のベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

- 零ベクトル
  ⋯ 大きさが 0 であるベクトル. $\overrightarrow{0}$ で表す.

1.2　練習問題

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|, |\overrightarrow{\mathrm{CD}}|, |\overrightarrow{\mathrm{EF}}|$ を求めよ. ただし, 1 メモリを大きさ 1 とする.



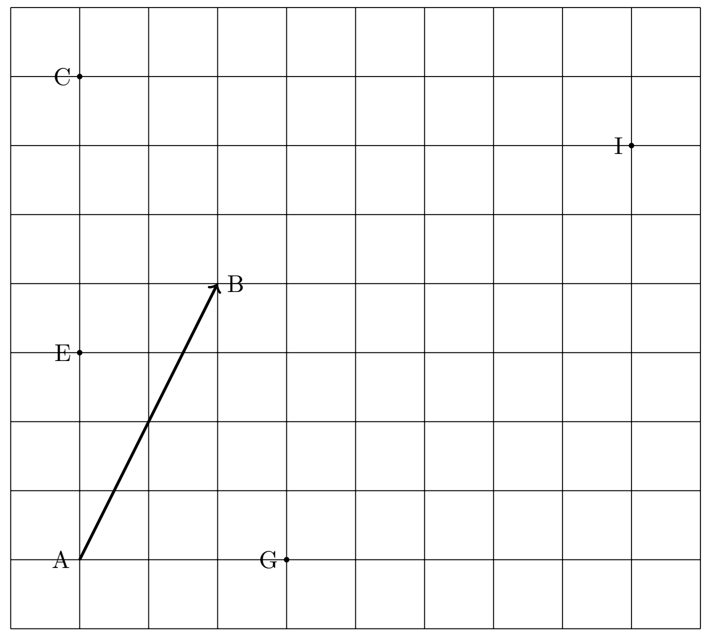
(2) 以下の条件を満たすベクトルを描け.

(a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と同じ大きさのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と同じ向きで大きさ半分のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$

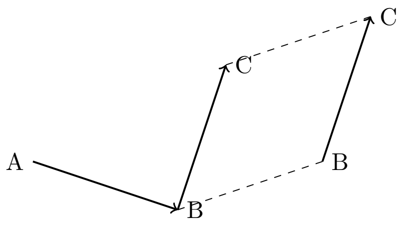
(c) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と等しいベクトル $\overrightarrow{\mathrm{GH}}$

(d) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の逆ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$



2　ベクトルの演算

2.1　加法



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

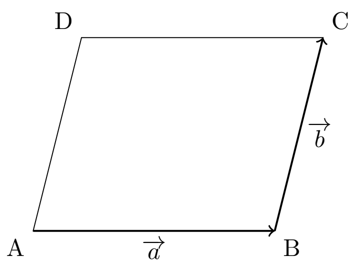
性質

(1) 交換法則 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

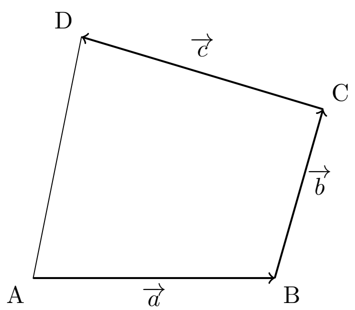
(2) 結合法則 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

< 証明 >

(1)



(2)



零ベクトルと加法

- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

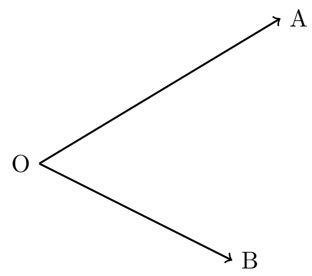
< 証明 >

- $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とおくと,

- $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とおき, $\vec{0} = \overrightarrow{\mathrm{BB}}$ とおくと,

$$\vec{a} + \vec{0} =$$

2.2　減法



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

2.3　**加減法練習**

(1) 以下の方程式が成立することを示せ.

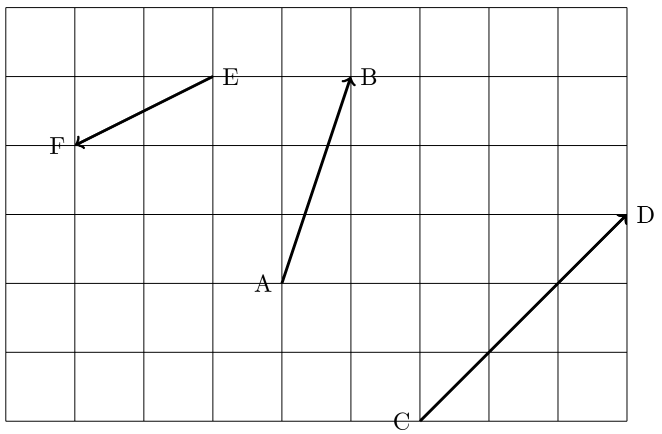
(a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{0}$

(2) 以下のベクトルを図示せよ.

(a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{CD}}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{EF}}$



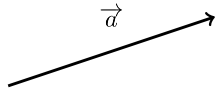
(3) $(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}}) - (\overrightarrow{\mathrm{BC}} - \overrightarrow{\mathrm{BD}}) = \overrightarrow{0}$ を示せ.

2.4 実数倍

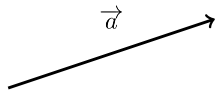
k : 実数, $\overrightarrow{a}$: ベクトル, に対し, $\overrightarrow{a}$ の k 倍を $k\overrightarrow{a}$ で表す.

- $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ のとき.

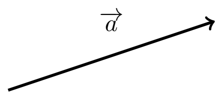
(1) $k > 0$



(2) $k = 0$



(3) $k < 0$



- $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ のとき.

性質

k, l : 実数とする.

(1) $k(l\overrightarrow{a}) = (kl)\overrightarrow{a}$

(2) $(k+l)\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{a} + l\overrightarrow{a}$

(3) $k(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$

2.5 練習問題

(1) 図中の $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ に対し, 以下のベクトルを求めよ.

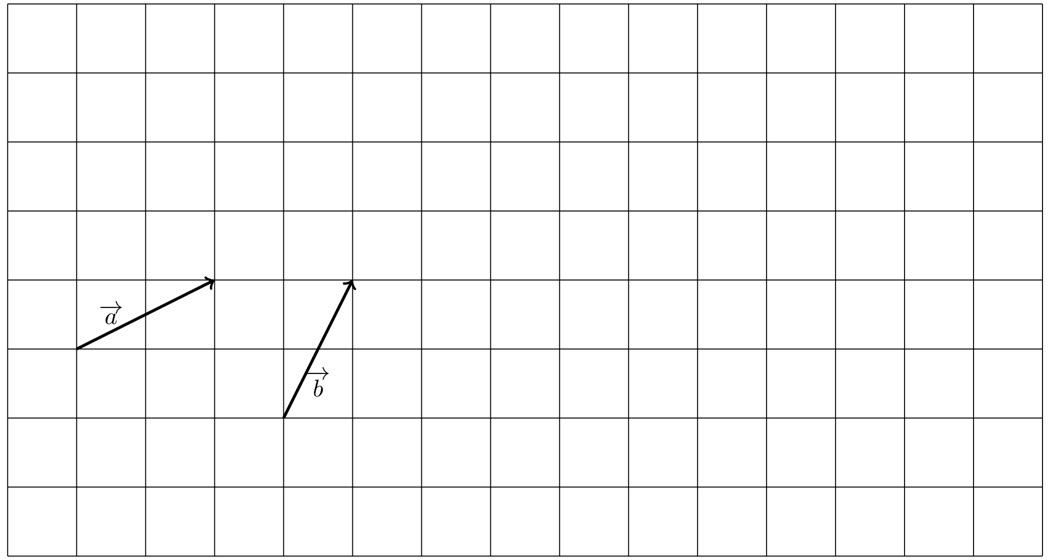
(a) $2\overrightarrow{a}$

(b) $-3\overrightarrow{b}$

(c) $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$

(d) $2(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$

(e) $2(3\overrightarrow{a})$



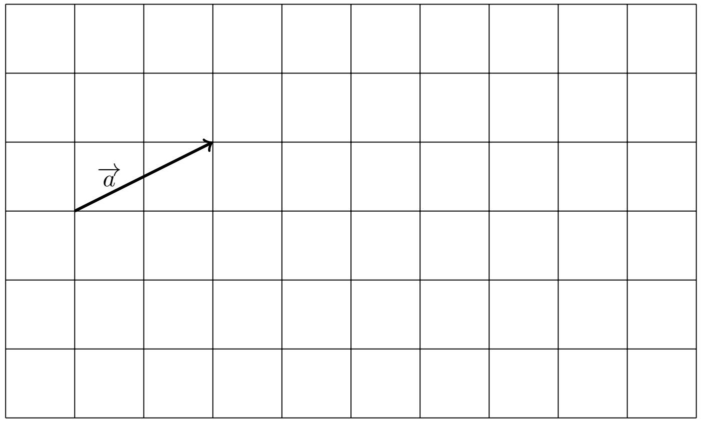
(2) 計算せよ.

(a) $5\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{a}$

(b) $5(\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}) - 2(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b})$

2.6　平行

以下の図で, $\overrightarrow{a}$ に平行なベクトルをいくつか描いてみよう.



平行条件

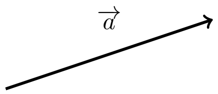
$\overrightarrow{a} \not\parallel \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{b} \not\parallel \overrightarrow{0}$ のとき,

$$\overrightarrow{a} \not\parallel \overrightarrow{b} \iff$$

2.7　単位ベクトル

$\cdots$ 大きさが 1 のベクトルのこと.

下の図で $|\overrightarrow{a}| = 2$ のとき, $\overrightarrow{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを描くと,



$\overrightarrow{a}$ の単位ベクトルは,

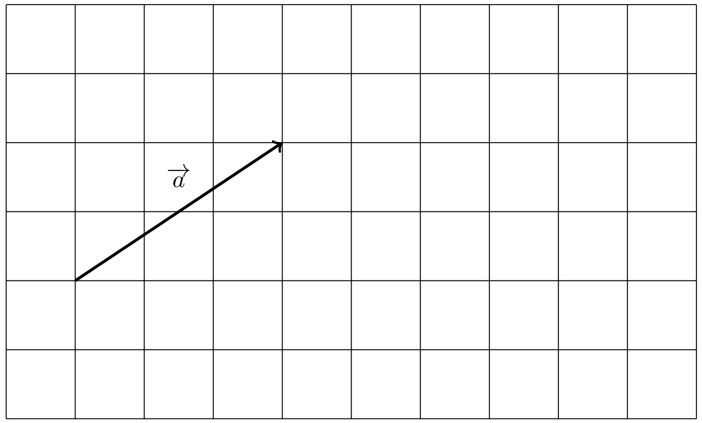
と書ける.

2.8　練習問題

(1) 以下の条件を満たすベクトルを全て描け.

(a) $\overrightarrow{a}$ と平行で, 大きさは同じであるベクトル $\overrightarrow{b}$

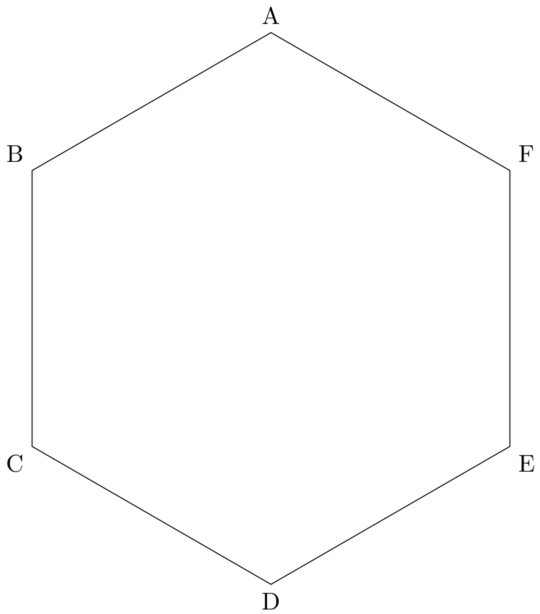
(b) $\overrightarrow{a}$ と平行で, 大きさが 2 倍であるベクトル $\overrightarrow{b}$



(2) 単位ベクトル $\overrightarrow{e}$ と平行で大きさが 2 であるベクトルを $\overrightarrow{e}$ を用いて表せ.

(3) $|\overrightarrow{a}| = 5$ のとき, $\overrightarrow{a}$ と同じ同じ向きの単位ベクトルを $\overrightarrow{a}$ を用いて表せ.

2.9 **分解**



$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{b}$ とする．以下のベクトルを $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ で表せ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$

分解

$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}\,(\neq \overrightarrow{0})$, $\overrightarrow{a} \not\parallel \overrightarrow{b}$ のとき，
全てのベクトル $\overrightarrow{p}$ はある実数 s, t を用いて

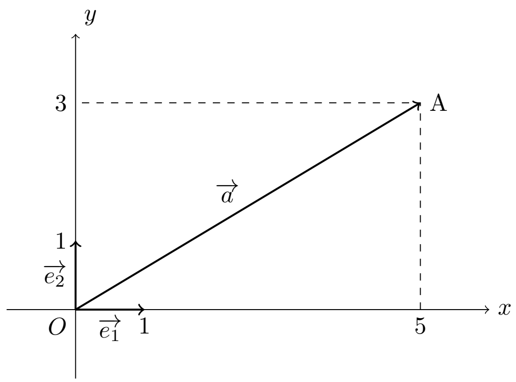
$$\overrightarrow{p} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$$

と一意に表すことができる．

3　ベクトルの成分

3.1　成分表示

- 基本ベクトル
  $\cdots x$ 軸, y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトル. $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ で表す.



上の図で $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ を用いて表すと,

$$\overrightarrow{a} =$$

で書ける. また, これを

$$\overrightarrow{a} =$$

のようにも書く.

- 基本ベクトルの成分表示.

$$\overrightarrow{e_1} =$$

$$\overrightarrow{e_2} =$$

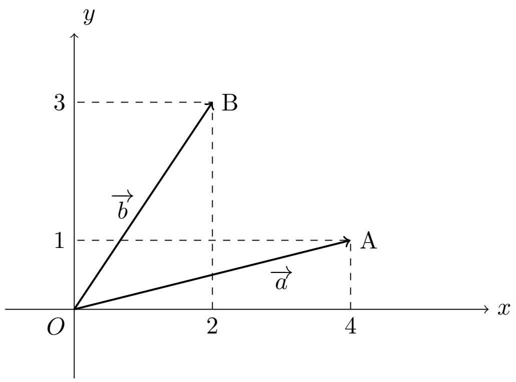
- ベクトルが等しいとは..
  $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$ とすると,

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \iff$$

- ベクトルの大きさ
  $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$ のとき,

$$|\overrightarrow{a}| =$$

3.2　成分表示の演算



$$\overrightarrow{a} = (\qquad , \qquad)$$

$$\overrightarrow{b} = (\qquad , \qquad)$$

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (\qquad , \qquad)$$

$$2\overrightarrow{a} = (\qquad , \qquad)$$

和・差・実数倍

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) =$$

$$(a_1, a_2) - (b_1, b_2) =$$

$$k(a_1, a_2) =$$

< 証明 >

3.3　練習問題

(1) $\overrightarrow{a} = (3, 5)$, $\overrightarrow{b} = (2, 4)$ のとき, 以下のベクトルを成分表示せよ.

(a) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

(b) $2\overrightarrow{a}$

(c) $3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$

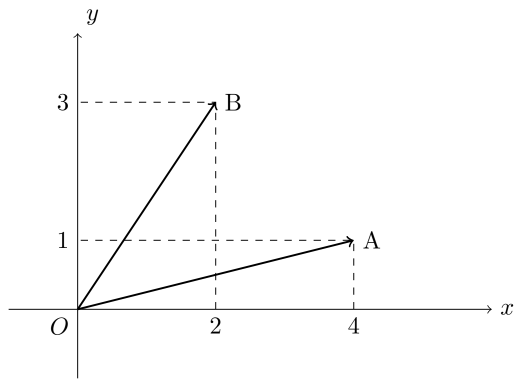
(d) $2(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$

(2) $\overrightarrow{a} = (2, -1)$, $\overrightarrow{b} = (4, 3)$ とする. $\overrightarrow{c} = (8, 1)$ を実数 s, t を用いて $s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$ の形で表せ.

(3) $\overrightarrow{a} = (-2, 1)$ と $\overrightarrow{b} = (x, 3)$ が平行になるように, x の値を定めよ.

(4) $\overrightarrow{a} = (2, x)$ と $\overrightarrow{b} = (3, 6)$ が平行になるように, x の値を定めよ.

3.4　座標平面上の点とベクトル



$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (4, 1), \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (2, 3)$ のとき, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\qquad , \qquad)$ である.

2 点 A, B とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

2 点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2)$ について,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\qquad , \qquad)$$

であり, 大きさは

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| =$$

＜証明＞
$\mathrm{A}(a_1, a_2)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2)$ とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\qquad , \qquad)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (\qquad , \qquad)$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$$

$$=$$

3.5　練習問題

(1) 以下の 2 点 A, B に対し, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分表示せよ. また, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ を求めよ.

(a) A(3, 2), B(0, 2)

(b) A(4, 5), B(−2, 1)

(2) 以下の 4 点 A, B, C, D を頂点とする四角形 ABCD が平行四辺形となるように, x, y の値を求めよ.

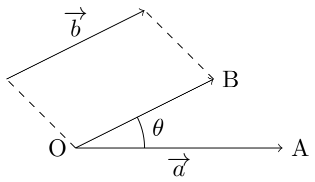
(a) $\mathrm{A}(-2, 2)$, $\mathrm{B}(1, 1)$, $\mathrm{C}(2, 3)$, $\mathrm{D}(x, y)$

(b) $\mathrm{A}(-2, 1)$, $\mathrm{B}(x, y)$, $\mathrm{C}(2, 4)$, $\mathrm{D}(-1, 3)$

4　ベクトルの内積

4.1　内積の定義

　ベクトルの加法, 減法の他に, 新たな演算を定義する.
まず, $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角 θ を以下の図のように定義.



内積

$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ のなす角を θ とする. $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ の内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を以下で定義.

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =$$

【図的解釈】

例

$|\overrightarrow{a}| = 3, |\overrightarrow{b}| = 4$, $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ のなす角を $\theta = 60^\circ$ とする.
内積は

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =$$

練習問題

$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ のなす角を θ とする. 以下の場合, 内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を求めよ.

(1) $|\overrightarrow{a}| = 3, |\overrightarrow{b}| = 2, \theta = 60^\circ$

(2) $|\overrightarrow{a}| = 5, |\overrightarrow{b}| = \sqrt{3}, \theta = 30^\circ$

(3) $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{2}, |\overrightarrow{b}| = 1, \theta = 145^\circ$

(4) $|\overrightarrow{a}| = 1, |\overrightarrow{b}| = 4, \theta = 120^\circ$

(5) $|\overrightarrow{a}| = 6, |\overrightarrow{b}| = 5, \theta = 90^\circ$

(6) $|\overrightarrow{a}| = 3, |\overrightarrow{b}| = 2, \theta = 180^\circ$

(7) $|\overrightarrow{a}| = 2, |\overrightarrow{b}| = 1, \theta = 0^\circ$

4.1.1 成分による内積表示

成分による内積

$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$ のとき,

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =$$

< 証明 >

例題

$\overrightarrow{a} = (1, 2)$, $\overrightarrow{b} = (3, 1)$ のとき, 内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を求めよ.

練習問題 1

内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を求めよ.

(1) $\overrightarrow{a} = (2, 1)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 3)$

(2) $\overrightarrow{a} = (-1, 2)$, $\overrightarrow{b} = (-2, -5)$

(3) $\overrightarrow{a} = (\sqrt{2}, -1)$, $\overrightarrow{b} = (-\sqrt{2}, -2)$

練習問題 2

2 つのベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ のなす角 θ を求めよ.

(1) $\overrightarrow{a} = (1, -\sqrt{3}), \overrightarrow{b} = (-\sqrt{3}, 1)$

(2) $\overrightarrow{a} = (3, 6), \overrightarrow{b} = (2, -1)$

練習問題 3

2 つのベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ のなす角が 90° になるように x の値を定めよ.

(1) $\overrightarrow{a} = (3, 4), \overrightarrow{b} = (x, 6)$

(2) $\overrightarrow{a} = (x, -1), \overrightarrow{b} = (x, x+2)$

練習問題 4

(1) $\overrightarrow{a} = (\sqrt{3}, -1)$ に垂直で, 大きさが 2 のベクトル $\overrightarrow{b}$ を求めよ.

(2) $\overrightarrow{a} = (2, 1)$ に垂直で, 大きさが $\sqrt{10}$ のベクトル $\overrightarrow{b}$ を求めよ.

(3) $\overrightarrow{a} = (4, 3)$ に垂直な単位ベクトル $\overrightarrow{e}$ を求めよ.

(4) $\overrightarrow{a} = (1, 2)$ に垂直な単位ベクトル $\overrightarrow{e}$ を求めよ.

4.2　内積の性質

性質

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|^2$

(2) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$

(3) $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$

(4) $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$

(5) $(k\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot(k\overrightarrow{b})=k(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})$

< 証明 >

(1) $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ とする.

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

$$=a_1^2+a_2^2=|\overrightarrow{a}|^2$$

(3) $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ とする.

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}$$

なので,

$$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

$$=(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2$$

$$=a_1c_1+b_1c_1+a_2c_2+b_2c_2$$

$$=a_1c_1+a_2c_2+b_1c_1+b_2c_2=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$$

他は同様.

<u>例題 1</u>

以下の等式を示せ.

$$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$$

<u>例題 2</u>

$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ が次の条件を満たすとき, $|2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$ の値を求めよ.

$$|\overrightarrow{a}|=1,\quad |\overrightarrow{b}|=4,\quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=2$$

4.2.1　練習 1

以下の等式を示せ.

(1) $|\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+4|\overrightarrow{b}|^2$

(2) $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=|\overrightarrow{a}|^2-|\overrightarrow{b}|^2$

4.2.2　練習 2

$|\overrightarrow{a}|=3, |\overrightarrow{b}|=2, \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-3$ のとき, 以下の値を求めよ.

(1) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$

(2) $|\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}|$

4.2.3　練習 3

$|\overrightarrow{a}| = 2, |\overrightarrow{b}| = 1$ で, $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ と $2\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b}$ が垂直であるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を求めよ.

(2) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角 θ を求めよ.

4.2.4　練習 4

$|\overrightarrow{a}| = 2, |\overrightarrow{b}| = 2$ で, $3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$ が垂直であるとき, $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角 θ を求めよ.

5　位置ベクトル

5.1　図形の復習

(1) 2 点 $\mathrm{A}(1,-1)$, $\mathrm{B}(4,5)$ に対し, 以下の問いに答えよ.

(a) AB を 2 : 1 に内分する点 P の座標を求めよ.

(b) AB を 1 : 2 に外分する点 Q の座標を求めよ.

(c) AB の中点 M の座標を求めよ.

(2) 3 点 $\mathrm{A}(1,-1)$, $\mathrm{B}(4,5)$, $\mathrm{C}(3,5)$ を結んでできる三角形 ABC の重心を求めよ.

5.2　図形の復習 (一般化)

(1) 2 点 $\mathrm{A}(a_1,a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,b_2)$ に対し, 以下の問いに答えよ.

(a) 線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の座標を求めよ.

(b) 線分 AB を $m:n$ に外分する点 Q の座標を求めよ.

(c) 線分 AB の中点 M の座標を求めよ.

(2) 3 点 $\mathrm{A}(a_1,a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,b_2)$, $\mathrm{C}(c_1,c_2)$ を結んでできる三角形 ABC の重心を求めよ.

5.3 ベクトルで考える

平面上の点をベクトルで表す．平面上で, 点 O を 1 点定めれば, 点 P の位置は,

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

によって決まる．これを点 O に関する点 P の位置ベクトルといい, P($\overrightarrow{p}$) と表す.

内分, 外分の位置ベクトル

点 A($\overrightarrow{a}$), B($\overrightarrow{b}$), C($\overrightarrow{c}$) に対し,

- 線分 AB を $m : n$ に内分する点

$$\frac{n\overrightarrow{a} + m\overrightarrow{b}}{m+n}$$

- 線分 AB を $m : n$ に外分する点

$$\frac{-n\overrightarrow{a} + m\overrightarrow{b}}{m-n}$$

- 線分 AB の中点 M

$$\frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2}$$

- 3 点を結んでできる三角形 ABC の重心

$$\frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3}$$

5.3.1 練習問題

2 点 A($\overrightarrow{a}$), B($\overrightarrow{b}$) を結ぶ線分に対し, 以下の問いに答えよ.

(1) 線分 AB を $3 : 2$ に内分する点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{p}$

(2) 線分 AB を $3 : 1$ に外分する点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{q}$

6　図形への応用

6.1　直線上にある点

これが全て. ↓

$$3\text{ 点 A, B, C が同一直線上にある} \iff \overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}\text{ なる実数 } k \text{ がある.}$$

例

3 点 A, B, C について,

(1) A, B, C がこの順で同一直線上にあり, AB:BC $= 3 : 1$ のとき, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表せ.

(2) A, B, C がこの順で同一直線上にあり, AC:BC $= 2 : 1$ のとき, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表せ.

(3) A, B, C がこの順で同一直線上にあり, BC:AC $= 1 : 4$ のとき, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表せ.

練習問題 1

(1) 平行四辺形 ABCD において, 辺 CD を $1 : 2$ に内分する点を E, 対角線 BD を $3 : 2$ に内分する点を F とする. このとき, 3 点 A, F, E は一直線上にあることを示せ.

(2) 三角形 ABC において, 辺 AB を $1 : 2$ に内分する点を D, 辺 BD を $3 : 1$ に内分する点を E とし, 線分 CD の中点を F とする. このとき, 3 点 A, F, E は一直線上にあることを示せ.

6.2　2 **直線の交点**

例題
三角形 OAB において, 辺 OA の中点を C, 辺 OB を $2:1$ に内分する点を D とし, 線分 AD と線分 BC の交点を P とする. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ.

練習
三角形 OAB において, 辺 OA を $3:2$ に内分する点を C, 辺 OB を $1:2$ に内分する点を D とし, 線分 AD と線分 BC の交点を P とする. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ.

6.3　内積の利用

例題

鋭角三角形 ABC において, 頂点 B, C からそれぞれの向かい合う辺 AC, AB に下ろした垂線の交点を H とする．AH⊥BC をベクトルを用いて示せ.

練習

四角形 ABCD がひし形のとき, AC⊥DB をベクトルを用いて示せ.

7　図形のベクトル表現

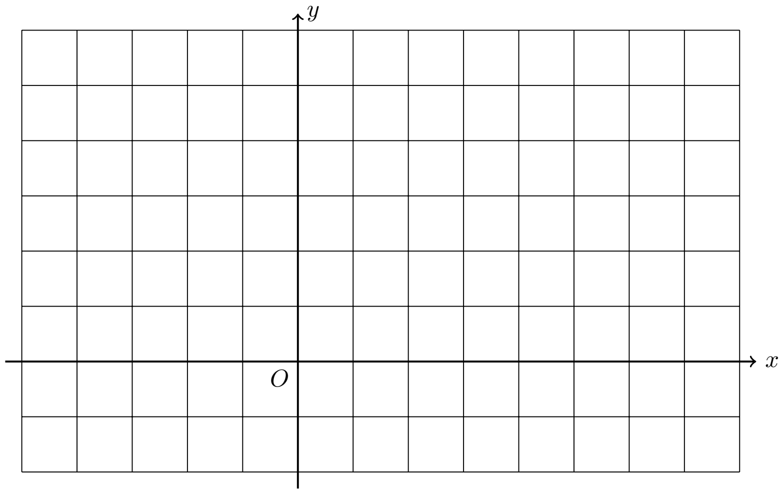
7.1　直線

原点を O とする座標平面上に, 点 A(1, 2) がある. 位置ベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおく. $\overrightarrow{d} = (3, 1)$ とするとき, 点 P が位置ベクトル

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{d} \quad (t : \text{実数})$$

で表されるとき, 点 P の様子を描いてみよう.

t	-2	-1	0	1	2
P の座標					



点 A($\overrightarrow{a}$) を通り, $\overrightarrow{0}$ でないベクトル $\overrightarrow{d}$ に平行な直線を l とする. 直線 l 上のどのような点 P に対しても

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} =$$

が成立.

よって,

$$\overrightarrow{p} =$$

さて, 原点を O とする座標平面上において, 点 A(1, 2) を通り, $\overrightarrow{d} = (3, 1)$ に平行な直線上の点 P(x, y) について, ベクトル方程式から

$$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

これを, 直線 l の________________

上の式から, 媒介変数 t を消去して, 直線の方程式を求めることができる.

<u>問題</u>

以下のとき, 点 A を通りベクトル $\overrightarrow{d}$ に平行な直線を媒介変数表示せよ. また, 媒介変数を消去した式を求めよ.

(1) A$(3, -2)$, $\overrightarrow{d} = (-1, -2)$

(2) A$(-2, 3)$, $\overrightarrow{d} = (3, -4)$

問題

原点を O とする座標平面上の 2 点 A$(1,3)$, B$(3,4)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を成分表示せよ.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分表示せよ.

(3) 2 点 A, B を通る直線を l とする. l 上の点 P について, $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とする. 実数 t を用いて p を表せ.

(4) t を消去し, 直線 l の方程式を求めよ.

直線

異なる 2 点 A$(\overrightarrow{a})$, B $\overrightarrow{b}$ を通る直線 AB のベクトル方程式は

-
-

問題

2 点 A$(-2,1)$, B$(-3,-2)$ を通る直線を媒介変数表示せよ. また媒介変数を消去した式を求めよ.

7.2　平面上の点の存在範囲

△OAB において, 以下の式を満たす点 P の存在範囲を求めてみよう.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad s + t = 1, s \geqq 0, t \geqq 0$$

<u>問題</u>

△OAB において, 以下の式を満たす点 P の存在範囲を求めよ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad s + t = 2, s \geqq 0, t \geqq 0$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad s + t = \dfrac{1}{2}, s \geqq 0, t \geqq 0$

△OAB において, 以下の式を満たす点 P の存在範囲を求めてみよう.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad 0 \leqq s + t \leqq 1, s \geqq 0, t \geqq 0$$

問題

△OAB において, 以下の式を満たす点 P の存在範囲を求めよ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad 0 \leqq s + t \leqq 2, s \geqq 0, t \geqq 0$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad 0 \leqq s + t \leqq \dfrac{1}{2}, s \geqq 0, t \geqq 0$

7.3 垂直な直線

点 A($\overrightarrow{a}$) を通り, ベクトル $\overrightarrow{n}$ に垂直な直線 l について考える.
$\overrightarrow{a} = (1, 3), \overrightarrow{n} = (1, 1)$ のとき, 直線 l 上の点 P($\overrightarrow{p}$) は...

<u>練習</u>
点 A を通り, ベクトル $\overrightarrow{n}$ に垂直な直線の方程式を求めよ.

(1) A$(3, 4)$, $\overrightarrow{n} = (2, -1)$

(2) A$(-2, -1)$, $\overrightarrow{n} = (1, 3)$

(3) A$(1, 2)$, $\overrightarrow{n} = (0, 1)$

7.4　円のベクトル方程式

点 A$(3, 4)$ に対し, 位置ベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とする. また, $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とする.

$$|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{p}| = 5$$

を満たすとき, 点 P の軌跡はどのようになるだろうか.

<u>練習問題</u>

点 A$(\overrightarrow{a})$ が与えられているとき, 以下のベクトル方程式のにおいて, 点 P$(\overrightarrow{p})$ 全体の集合はどのような図形を描くか.

(1) $|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{p}| = 3$

(2) $|\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{p}| = 4$

(3) $|3\overrightarrow{p} - 6\overrightarrow{a}| = 3$

点 A$(1,0)$, B$(5,0)$ に対し, 位置ベクトル $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする. また, $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とする.

$$(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a})\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b})=0$$

を満たすとき, 点 P の軌跡はどのようになるだろうか.

問題

平面上の異なる 2 点 O, A に対して, $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とするとき, ベクトル方程式

$$|\overrightarrow{p}|^2-\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{a}=0$$

を満たす点 P$(\overrightarrow{p})$ 全体の集合はどのような図形を描くか.

8　空間のベクトル

空間のベクトルになっても, 平面と同様にやれば良い.

8.1　基本

(1) 点 $\mathrm{P}(1,2,3)$ に対し, 以下の点の座標を求めよ.

（a）yz 平面に関して対称な点.

（b）xz 平面に関して対称な点.

（c）z 軸に関して対称な点.

（d）原点に関して対称な点.

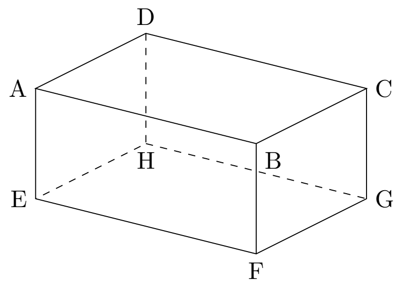
(2) 原点 O と次の点の距離を求めよ.

（a）$\mathrm{P}(6,2,3)$

（b）$\mathrm{Q}(1,-2,3)$

(3) 2 点 $\mathrm{A}(1,2,4)$, $\mathrm{B}(3,-1,-2)$ 間の距離を求めよ.

(4) 以下の図は, 直方体である. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}, \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{e}$ とする. 以下のベクトルを $\vec{b}, \vec{d}, \vec{e}$ を用いて表せ.



(a) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$

(c) $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$

(d) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$

(e) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ (M は線分 DG の中点)

(5) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ とする. 以下のベクトルを成分表示せよ.

(a) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

(b) $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$

(c) $2(\vec{a} + \vec{b}) + 3\vec{c}$

(6) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を前問と同様とする. 以下の内積を求めよ.

(a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

(b) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$

(c) $(\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c})$

(7) 以下のベクトルを, $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ を用いて表せ.

(a) $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

(b) $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$

(8) 2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ のなす角を求めよ.

(9) 3 点 A$(6, 7, -8)$, B$(5, 5, -6)$, C$(6, 4, -2)$ を頂点とする △ABC において, ∠ABC の大きさを求めよ.

(10) 2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ の両方に垂直で, 大きさが 3 のベクトル $\overrightarrow{p}$ を求めよ.

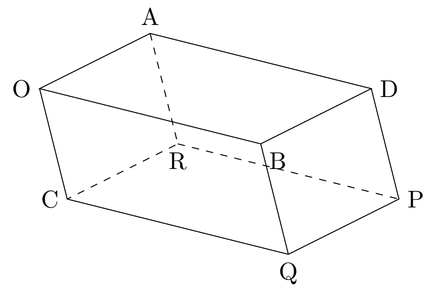
(11) 2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の両方に垂直で, 大きさが $\sqrt{6}$ のベクトル $\overrightarrow{p}$ を求めよ.

(12) 4 点 A($\overrightarrow{a}$), B($\overrightarrow{b}$), C($\overrightarrow{c}$), D($\overrightarrow{d}$) を頂点とする四面体 ABCD において，△BCD の重心を G($\overrightarrow{g}$), 線分 AG を 3 : 1 に内分する点を P($\overrightarrow{p}$) とする．

(a) $\overrightarrow{g}$ を $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ のうち必要なものを用いて表せ．

(b) $\overrightarrow{p}$ を $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ を用いて表せ．

(13) 以下の図のような平行六面体において，△ABC の重心を G とする．3 点 O, G, P は一直線上にあることを示せ．



9　空間図形問題

9.1　同じ平面上にある点

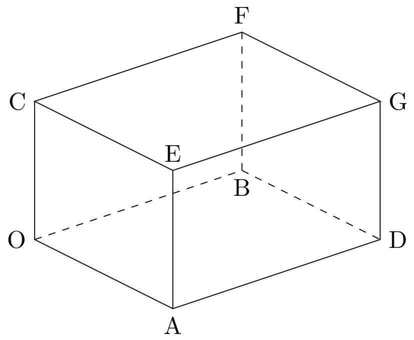
問題

(1) 3 点 $\mathrm{A}(1, 2, 3)$, $\mathrm{B}(0, 1, 1)$, $\mathrm{C}(-2, 0, 2)$ の定める平面 ABC 上に, 点 $\mathrm{P}(x, 3, 2)$ があるとき, x の値を求めよ.

(2) 3 点 $\mathrm{A}(2, -2, 3)$, $\mathrm{B}(2, 4, -1)$, $\mathrm{C}(-1, 2, -1)$ の定める平面 ABC 上に, 点 $\mathrm{P}(x, 3, 1)$ があるとき, x の値を求めよ.

問題

以下の図のよう直方体 OADB-CEGF において, 辺 DG の G を超える延長線上に DG=GH となるように点 H をとり, 直線 OH と平面 ABC の交点を P とする. $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{c}$ とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ を用いて表せ.



問題

左の問題において, 辺 OB の中点を M とする. 直線 OH と平面 AMC の交点を Q とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ を用いて表せ.

9.2 内積

問題

正四面体 ABCD において, AB⊥CD を以下の手順で示す.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}, \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$ として, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を $\vec{c}, \vec{d}$ を用いて表せ.

(2) AB⊥CD を示せ.

問題

正四面体 ABCD において, △BCD の重心を G とすると, AG⊥BC が成立する. このことを, ベクトルを用いて示せ.

10　空間座標

10.1　平面の方程式

xyz 空間上で, 以下の方程式が満たす図形を考える.

(1) $x = 2$

(2) $y = -1$

(3) $z = 4$

10.2　一般化

点 $(1, 2, 3)$ を通り, ベクトル $\overrightarrow{n} = (1, 1, 2)$ に垂直な平面 α の方程式を求めよう.

問題

点 $(3, 1, -1)$ を通り, ベクトル $\overrightarrow{n} = (2, -1, 4)$ に垂直な平面 α の方程式を求めよ.

10.3　**球面の方程式**

xyz 空間において, 点 $\mathrm{A}(1, 2, 3)$ とする. $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = 1$ を満たす点 P 全体の集合はどのようになるか.

球面の方程式

問題

以下のような球面の方程式を求めよ.

(1) 原点を中心とする半径 3 の球面.

(2) 点 $(-2, 1, -5)$ を中心とし, 半径 3 の円.

(3) 点 $(-1, 2, 0)$ を中心とし, 点 $(1, 3, -2)$ を通る球面.

(4) 2 点 $(1, 5, -1), (-3, 1, -3)$ を直径の両端とする球面.

問題

(1) 球面 $(x-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5^2$ と xy 平面が交わる部分は円である．その円の中心の座標と半径を求めよ．

(2) (1) の球面と yz 平面が交わる部分は円である．その円の中心の座標と半径を求めよ．