1　複素数平面

1.1　複素数平面の考え方

　複素数 $a+bi$ の実部を x 軸, 虚部を y 軸に対応させた平面を複素数平面という.

<u>例</u>

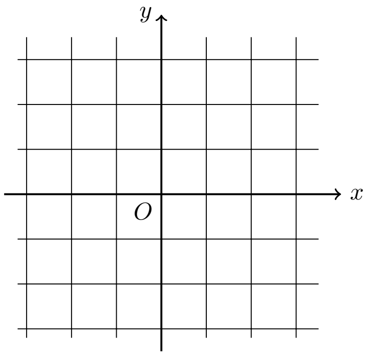
以下の複素数を複素平面上で表せ.

(1) $\mathrm{A}(-3+2i)$

(2) $\mathrm{B}(3i)$

(3) $\mathrm{C}(-2)$

(4) $\mathrm{D}(1-3i)$



<u>例</u>

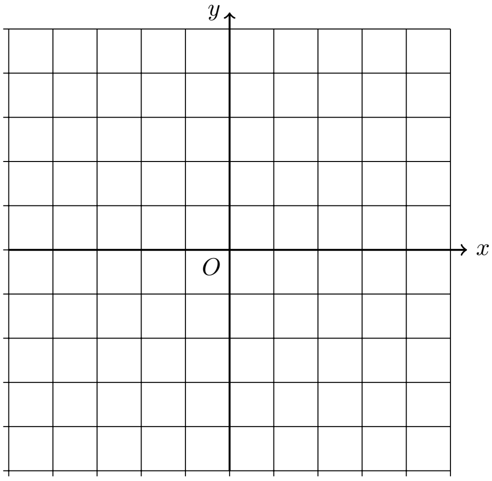
以下の複素数を複素平面上で表せ.

(1) $\alpha = 1+2i$

(2) $\beta = -2+3i$

(3) $\alpha+\beta$

(4) $\alpha-\beta$



<u>例</u>

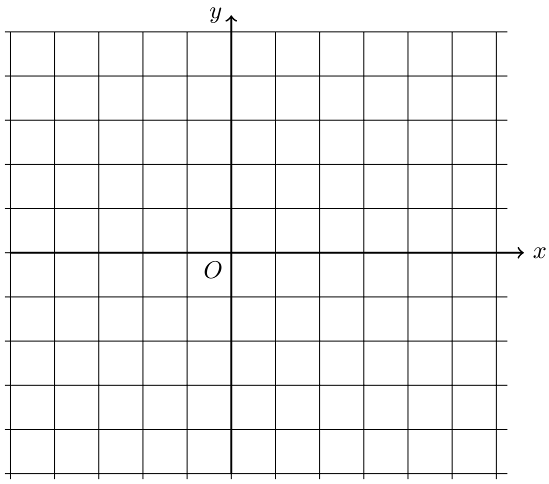
以下の複素数を複素平面上で表せ.

(1) $\alpha = 2+i$

(2) 3α

(3) -2α

(4) $\dfrac{1}{2}\alpha$



<u>例</u>

$\alpha = 1+3i, \beta = x-9i$ とする. 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, と原点 O が一直線上にあるとき, 実数 x の値を求めよ.

複素数 z について, 複素数平面上での原点と点 $\mathrm{P}(x)$ の距離を, 複素数 z の距離という.

<u>例</u>
以下の複素数の絶対値を求めよ.

(1) $1+2i$

(2) $3-4i$

(3) $3i$

(4) -5

<u>例</u>
以下の 2 点間の距離を求めよ.

(1) $\mathrm{A}(1+2i)$, $\mathrm{B}(3+i)$

(2) $\mathrm{A}(3-i)$, $\mathrm{B}(-2+i)$

共役な複素数 $\cdots$ $z=a+bi$ に対し, $\overline{z}=$

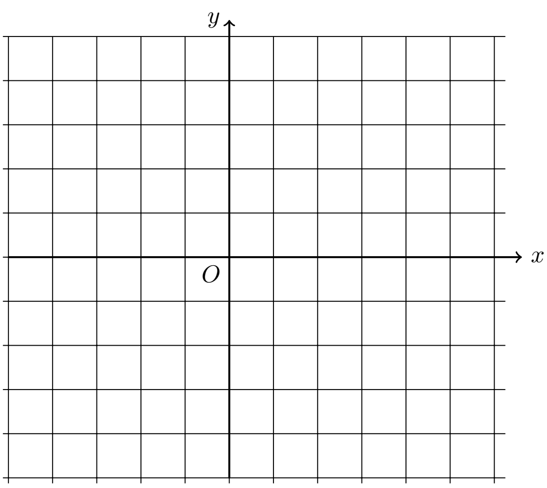
<u>例</u>
以下の複素数を複素平面上で表せ.

(1) $z=4+3i$

(2) $-z$

(3) $\overline{z}$

(4) $-\overline{z}$



<u>計算してみる</u>

(1) $z+\overline{z}$

(2) $z\overline{z}$

共役な複素数の性質について考える.

$$\alpha = 3 + 2i, \quad \beta = -2 + i$$

とする.

(1) $\overline{\alpha + \beta}$

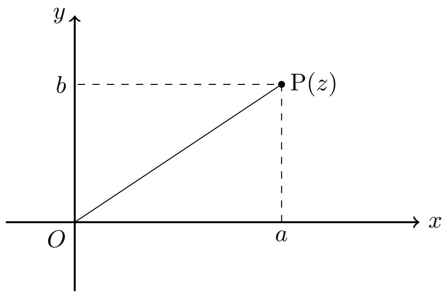
(2) $\overline{\alpha - \beta}$

(3) $\overline{\alpha\beta}$

(4) $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}$

2　極形式

2.1　極形式とは



例 1
以下の複素数を極形式で表せ．ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(1) $1 - \sqrt{3}i$

(2) $2 + 2i$

例 2
以下の複素数を極形式で表せ．ただし，偏角 θ の範囲は $-\pi < \theta \leqq \pi$ とする．

(1) $\sqrt{3} + i$

(2) $-i$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ に対し, $\overline{z}=r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$ と表せる. このことを, 図を描いて確かめてみよう.

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ に対し, $-z=r\{\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)\}$ と表せる. このことを, 図を描いて確かめてみよう.

2.2　極形式の複素数の積と商

具体例

$\alpha = 1 + \sqrt{3}i, \beta = -\sqrt{3} + i$ のとき, 以下の値を求めよ.

(1) $\alpha\beta$

(2) $\dfrac{\alpha}{\beta}$

図で見る積と商

一般化

積と商

$\alpha = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \beta = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ のとき,

$\alpha\beta =$

$\dfrac{\alpha}{\beta} =$

問題 1 複素数 $\alpha = 1+i, \beta = 1+\sqrt{3}i$ について, $\alpha\beta$ を求めよ. また, この結果を用いて, $\cos\dfrac{7}{12}\pi, \sin\dfrac{7}{12}\pi$ の値を求めよ.

問題 2

以下の複素数 α, β について, $\alpha\beta, \dfrac{\alpha}{\beta}$ を求めよ. ただし, 偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする.

$$\alpha = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \beta = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

2.3　複素数平面上での積と商

$2(\cos\dfrac{1}{4}\pi + i\sin\dfrac{1}{4}\pi)z$ は, 点 z を, 原点を中心として $\dfrac{1}{4}\pi$ だけ回転し, 原点からの距離を 2 倍した点である.

以下の点は, 複素数 z をどのように移動した点か.

(1) $(\sqrt{3}+i)z$

(2) $(2-2i)z$

(3) $3iz$

例題

$z = 2+3i$ とする. 点 z を原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数 w を求めよ.

問題

例題と同じ z に対し, 点 z を原点を中心として以下の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{4}\pi$

(2) $-\dfrac{2}{3}\pi$

(3) $\dfrac{1}{2}\pi$

問題

$\alpha=3+2i$ とする．複素数平面上の 3 点 $0, \alpha, \beta$ を頂点とする三角形が正三角形であるとき, β の値を求めよ．

3　ド・モアブルの定理

3.1　復習

以下を計算せよ.

(1) $\left(\cos\dfrac{1}{6}\pi + i\sin\dfrac{1}{6}\pi\right)^2$

(2) $\left(\cos\dfrac{1}{6}\pi + i\sin\dfrac{1}{6}\pi\right)^3$

(3) $\left(\cos\dfrac{1}{6}\pi + i\sin\dfrac{1}{6}\pi\right)^4$

(4) $\left(\cos\dfrac{1}{6}\pi + i\sin\dfrac{1}{6}\pi\right)^6$

3.2　定理

ド・モアブルの定理

n が整数のとき,

問題

以下の式を計算せよ.

(1) $(1+\sqrt{3}i)^4$

(2) $(1-i)^5$

(3) $(1-\sqrt{3}i)^6$

(4) $(\sqrt{3}+i)^{-4}$

3.3　n 乗根

復習

1 の 3 乗根を求めよ.

1 の n 乗根

問題

(1) 1 の 6 乗根を求めよ.

(2) 1 の 8 乗根を求めよ.

問題

(1) 方程式 $z^3 = 8i$ を解け

(2) 方程式 $z^2 = 1 + \sqrt{3}i$ を解け

(3) 方程式 $z^4 = -16$ を解け

(4) 方程式 $z^2 = i$ を解け

4　複素数と図形

4.1　いろいろな図形

$\alpha = 2 + 3i, \beta = 4 - i, \gamma = 3 + i$ とする．A(α), B(β), C(γ) とする．

(1) 線分 AB の中点を表す複素数を求めよ．

(2) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点を表す複素数を求めよ．

(3) 線分 AB を 2 : 1 に外分する点を表す複素数を求めよ．

(4) △ABC の重心を表す複素数を求めよ．

(5) $|z - \alpha| = 1$ を満たす z 全体の集合が表す図形は何か．

(6) $|z - \alpha| = |z - \beta|$ を満たす z 全体の集合が表す図形は何か．

4.2 問題

以下の方程式を満たす点 z 全体の集合は, どのような図形か.

(1) $|z-i|=2$

(2) $|z-3-i|=3$

(3) $|z+4|=|z-2i|$

4.3 アポロニウスの円

例題

以下の方程式を満たす点 z 全体の集合は, どのような図形か.

$$2|z|=|z+3|$$

問題

以下の方程式を満たす点 z 全体の集合は, どのような図形か.

$$2|z-3i|=|z|$$

4.4 平行移動した円

例題

$w = iz + 2$ とする．点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき, 点 w はどのような図形を描くか.

問題

$w = i(z + 2)$ とする．点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき, 点 w はどのような図形を描くか.

4.5 回転

例題

$\alpha = 2+3i, \beta = 4+i$ とする．点 β を，点 α を中心として $\dfrac{1}{3}\pi$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ．

例題

3 点 A(1), B$(-2+2i)$, C$(2-5i)$ に対して，半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ を求めよ．ただし，$-\pi < \theta \leqq \pi$ とする．

問題

$\alpha = 1+i, \beta = 5+3i$ とする．点 β を，点 α を中心として $\dfrac{1}{6}\pi$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ．

問題

3 点 A$(1-i)$, B$(2+i)$, C$(2i)$ に対して，半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ を求めよ．ただし，$-\pi < \theta \leqq \pi$ とする．

例題

3 点 A$(-1+i)$, B$(3-i)$, C$(x+3i)$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) 2 直線 AB, AC が垂直に交わるように, 実数 x の値を求めよ.

(2) 3 点 A, B, C が一直線上にあるように, 実数 x の値を求めよ.

問題

3 点 A(i), B$(2+2i)$, C$(x-i)$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) 2 直線 AB, AC が垂直に交わるように, 実数 x の値を求めよ.

(2) 3 点 A, B, C が一直線上にあるように, 実数 x の値を求めよ.

例題

3 点 A(α), B(β), C(γ) を頂点とする △ABC について, 等式

$$\gamma = (1+\sqrt{3}i)\beta - \sqrt{3}i\alpha$$

が成立するとき, 以下のものを求めよ.

(1) 複素数 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値.

(2) △ABC の 3 つの角の大きさ.

例題

3 点 A(α), B(β), C(γ) を頂点とする △ABC について, 等式

$$\gamma = (1-i)\alpha + i\beta$$

が成立するとき, 以下のものを求めよ.

(1) 複素数 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値.

(2) △ABC の 3 つの角の大きさ.