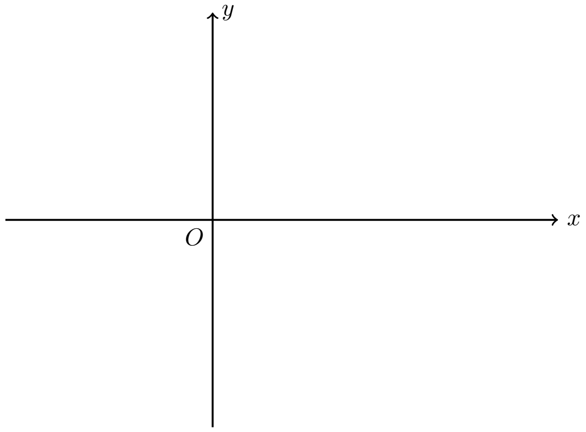
1　3 つの曲線

1.1　放物線の方程式

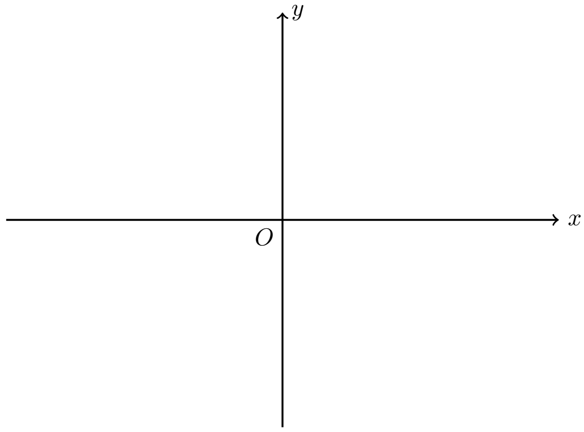
放物線とは



放物線の標準形

1.2　楕円の方程式

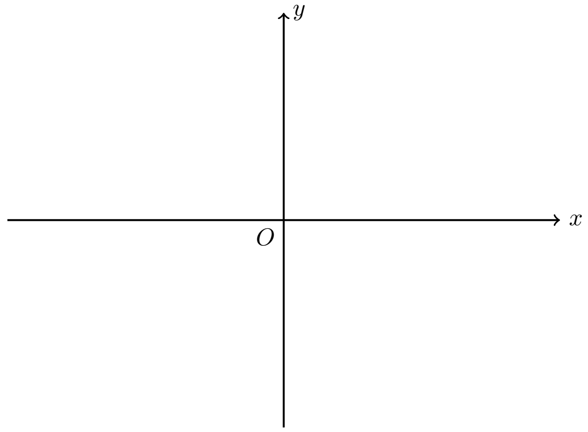
楕円とは



楕円の標準形

1.3 双曲線の方程式

双曲線とは



双曲線の標準形

1.4　練習問題

放物線

以下の放物線の概形を描け．また, 焦点と準線を求めよ．

(1) $y^2 = 8x$

(2) $y^2 = -12x$

(3) $y^2 = 2x$

楕円

以下の楕円の概形を描け．また, 焦点, 長軸の長さ, 短軸の長さを求めよ．

(1) $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$

(2) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

(3) $x^2 + 16y^2 = 16$

双曲線

以下の双曲線の概形を描け．また，焦点，頂点，漸近線を求めよ．

(1) $\dfrac{x^2}{5^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$

(2) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

(3) $x^2 - 16y^2 = 16$

1.5　練習問題 2

1.5.1　y 軸が軸となる放物線

数学 I で学んだ放物線

$$y = ax^2$$

について, 焦点と準線を求めよ.

<u>練習</u>

以下の放物線の概形を描け. また, 焦点と準線を求めよ.

(1) $x^2 = 4y$

(2) $x^2 = -8x$

(3) $y = \frac{1}{2}x$

1.5.2　軸が y 軸上にある楕円

問い

以下は楕円の方程式である．どのような楕円か.

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

問題

以下の楕円の概形を描け．また, 焦点, 長軸の長さ, 短軸の長さを求めよ.

(1) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

(2) $16x^2 + y^2 = 16$

1.6　焦点と距離から楕円

確認

楕円はどのような点の集合か.

問題

2 点 $(0, 3), (0, -3)$ を焦点とし, 焦点からの距離の和が 10 である楕円の方程式を求めよ.

練習問題

2 点 $(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$ を焦点とし, 焦点からの距離の和が 4 である楕円の方程式を求めよ.

1.6.1 円と楕円

考える

円 $x^2+y^2=16$ を, x 軸を基準にして y 軸方向へ $\dfrac{3}{4}$ 倍して得られる曲線の方程式を求めよ.

問題

円 $x^2+y^2=9$ を以下のように拡大・縮小して得られる楕円の方程式を求めよ.

(1) x 軸を基準に y 軸方向に $\dfrac{4}{3}$ 倍

(2) y 軸を基準に x 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ 倍

1.6.2　軌跡と楕円

例題

座標平面上において, 長さが 5 の線分 AB の端点 A は x 上を, 端点 B は y 軸上を動くとき, 線分 AB を $2:3$ に内分する点 P の軌跡を求めよ.

問題

座標平面上において, 長さが 7 の線分 AB の端点 A は x 上を, 端点 B は y 軸上を動くとき, 線分 AB を $4:3$ に内分する点 P の軌跡を求めよ.

1.6.3 焦点が y 軸上の双曲線

例題

以下の双曲線の概形を描け．また, 焦点, 頂点, 漸近線を求めよ.

$$\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{3^2}=-1$$

問題

以下の双曲線の概形を描け．また, 焦点, 頂点, 漸近線を求めよ.

$$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=-1$$

問題

(1) 2 点 $(0,4),(0,-4)$ を焦点とし, 焦点からの距離の差が 6 である双曲線の方程式を求めよ.

(2) 2 点 $(5,0),(-5,0)$ を焦点とし, 焦点からの距離の差が 8 である双曲線の方程式を求めよ.

(3) 以下の双曲線の概形を描け．また，焦点，頂点，漸近線を求めよ．

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$

(4) 2 点 $(0, 6), (0, -6)$ を焦点とする直角双曲線の方程式を求めよ．

2　平行移動

2.1　復習

以下の方程式が表す図形の概形を描け.

(1) $y = x + 2$

(2) $y = x^2 + 3$

(3) $y = (x - 2)^2$

(4) $y = 2(x + 1)^2 - 2$

(5) $y = 2x^2 + 4x$

(6) $y - 3 = (x + 3)^2$

(7) $x^2 + y^2 = 1$

(8) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$

(9) $x^2 - 2x + y^2 + 6x + 1 = 0$

(10) $y = 2^x$

(11) $y = 2^{x-1}$

(12) $y + 2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$

(13) $y - 2 = \log_2(x+1)$

(14) $y = \frac{1}{x}$

(15) $y = \frac{1}{x-2}$

(16) $y + 2 = \frac{1}{x+1}$

(17) $y - 1 = -\frac{1}{x-1}$

2.2 二次曲線の平行移動一般化

変数 x, y を含む式を $F(x,y)$ を書くことがある．
これまでに学んださまざまな曲線の方程式は，$F(x,y)=0$ の形で表すことができる．

曲線 $F(x,y)=0$ の平行移動

曲線 $F(x,y)=0$ を，x 軸方向へ p，y 軸方向へ q だけ平行移動した後の曲線の方程式は，

例

円 $x^2+y^2=4$ を，x 軸方向へ 3，y 軸方向へ -2 だけ平行移動させたグラフの方程式を求めよ．

練習問題

(1) 放物線 $y^2=4x$ を，x 軸方向へ 2，y 軸方向へ 3 だけ平行移動するとき，その放物線の方程式と焦点，準線を求めよ．また，概形を描け．

(2) 放物線 $x^2=2y$ を，x 軸方向へ -1，y 軸方向へ 1 だけ平行移動するとき，その放物線の方程式と焦点，準線を求めよ．また，概形を描け．

(3) 楕円 $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ を, x 軸方向へ -1, y 軸方向へ 2 だけ平行移動するとき, その放物線の方程式と焦点を求めよ. また, 概形を描け.

(4) 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$ を, x 軸方向へ 1, y 軸方向へ -3 だけ平行移動するとき, その放物線の方程式と焦点を求めよ. また, 概形を描け.

(5) 双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ を, x 軸方向へ 1, y 軸方向へ -2 だけ平行移動するとき, その放物線の方程式と焦点, 漸近線を求めよ. また, 概形を描け.

(6) 双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=-1$ を, x 軸方向へ 2, y 軸方向へ -1 だけ平行移動するとき, その放物線の方程式と焦点, 漸近線を求めよ. また, 概形を描け.

2.3　変形して図形を求める

復習

以下の方程式はどのような図形を表すか．また，その概形を描け．

(1) $y = 2x^2 - 4x + 3$

(2) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 4 = 0$

練習

以下の方程式はどのような図形を表すか．また，その概形を描け．

(1) $x^2 - 2x + 4y^2 + 8y + 1 = 0$

(2) $x^2 - 4y^2 + 2x + 16y - 19 = 0$

(3) $y^2 + 8y - 16x = 0$

3　曲線と直線

3.1　復習

(1) 放物線 $y = x^2 - 4x + 1$ と直線 $y = x - 5$ の共有点の座標を求めよ.

(2) 円 $x^2 + y^2 = 5$ と直線 $y = x - 1$ の共有点の座標を求めよ.

以下, k は定数とする.

(3) 放物線 $y = x^2 + 3x$ と直線 $y = 2x + k$ の共有点の個数を調べよ.

(4) 円 $x^2 + y^2 = 10$ と直線 $x + y + k = 0$ の共有点の個数を調べよ.

3.2　新しく学んだ曲線へ適用

以下の問いに答えよ.

(1) 放物線 $y^2 = 4x$ と直線 $2x - y = 4$ の共有点の座標を求めよ.

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ と直線 $x - y = 3$ の共有点の座標を求めよ.

以下, k は定数とする.

(3) 楕円 $x^2 + 4y^2 = 20$ と直線 $y = x + k$ の共有点の個数を調べよ.

(4) 双曲線 $x^2 - 2y^2 = 4$ と直線 $y = x + k$ の共有点の個数を調べよ.

3.3　接線 (復習)

(1) 点 $(0,-4)$ から放物線 $y=x^2-4x+5$ に接線を引くとき, その接線の方程式を求めよ. また, 接点の座標を求めよ.

(2) 点 $(0,5)$ から円 $x^2+y^2=5$ に接線を引くとき, その接線の方程式を求めよ. また, 接点の座標を求めよ.

3.4　接線 (練習)

(1) 点 $(0,3)$ から楕円 $x^2+2y^2=2$ に接線を引くとき, その接線の方程式を求めよ. また, 接点の座標を求めよ.

(2) 点 $(4,0)$ から放物線 $y^2=-4x$ に接線を引くとき, その接線の方程式を求めよ. また, 接点の座標を求めよ.

4　離心率

4.1　軌跡の復習

問題
点 $\mathrm{F}(4,0)$ からの距離と, 直線 $x=1$ からの距離の比が以下を満たす点 P の軌跡を求めよ.

(1) $1:2$

(2) $1:1$

(3) $2:1$

4.2 離心率について

5　媒介変数表示

5.1　復習

点 A$(2,-1)$ を通り，$\overrightarrow{d}=(-4,3)$ に平行な直線を媒介変数表示せよ．また，媒介変数を消去した式で表せ．

5.2　媒介変数について

5.3　例

以下のように媒介変数表示された曲線について考える．

$$
\begin{aligned}
x =& t-1 \\
y =& t^2+t
\end{aligned}
$$

(1) $t=0,1,2,3$ のとき，点 (x,y) はどのような値をとるか．

(2) 媒介変数表示された曲線について，t を消去して x,y の式で表し，概形を描く．

5.4 放物線の頂点の軌跡

例題

放物線 $y = x^2 + 2tx - 2t$ の頂点は, t の値が変化するときどのような曲線を描くだろうか.

(1) 頂点を $\mathrm{P}(x, y)$ とおくとき, x, y をそれぞれ t を用いて表せ.

(2) 放物線の頂点が描く曲線を求めよ.

問題

放物線 $y = -x^2 + 4tx + 2t$ の頂点は, t の値が変化するときどのような曲線を描くだろうか.

5.5　一般角 θ を媒介変数に含む曲線

例題

以下の媒介変数表示は, どのような図形を表すか.

(1) $x = 2\sin\theta, y = 2\cos\theta$

(2) $x = 2\sin\theta, y = 3\cos\theta$

(3) $x = \dfrac{3}{\cos\theta}, y = 2\tan\theta$

5.6　逆算的に...

(1) 円 $x^2 + y^2 = 4^2$

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$

(3) 双曲線 $\dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$

5.7 平行移動

以下の媒介変数表示は，どのような図形を表すか答えよ．また，概形を描け．

(1) $x = 2\cos\theta - 1, y = 2\sin\theta + 3$

(2) $x = 3\cos\theta + 1, y = 2\sin\theta - 2$

(3) $x = \dfrac{2}{\cos\theta} + 1, y = \tan\theta - 3$

6　極座標と極方程式

6.1　極座標とは

6.2　直交座標とは

問題

極座標が次のような点の直交座標を求めよ.

(1) $\left(2, \dfrac{\pi}{6}\right)$

(2) $\left(\sqrt{2}, \dfrac{5}{4}\pi\right)$

(3) $(3, \pi)$

問題

直交座標が次のような点の極座標を求めよ.

(1) $(2, 2)$

(2) $(-1, \sqrt{3})$

(3) $(0, -2)$

6.3 極方程式

以下の方程式について考えてみる.

$$r = 2\cos\theta$$

まずは, 表を埋めていく.

θ									
r									

この表を元に, グラフを描こう.

問題

以下の曲方程式で表される曲線について調べよう.

(1) $r = 3$

(2) $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$

問題

平面上の曲線を曲方程式で表す.

(1) 中心 A の極座標が $(4, 0)$ である半径 4 の円を, 極方程式で表せ.

(2) 極方程式が $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ である点 A を通り, 始線に平行な直線を, 極方程式で表せ.

6.4　さまざまな曲線

直交座標の x, y の方程式で表された曲線を極方程式で表せ.

(1) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を極方程式で表せ.

(2) 双曲線 $x^2 - 2y^2 = 4$ を極方程式で表せ.

(3) 楕円 $x^2 + 2y^2 = 4$ を極方程式で表せ.

(4) 楕円 $4x^2 + y^2 = 4$ を極方程式で表せ.

問題

以下の極方程式の表す曲線を, 直交座標の x, y の方程式で表せ.

(1) $r = 2(\cos\theta + \sin\theta)$

(2) $r(\cos\theta + \sin\theta) = 1$

(3) $r = 2\sin\theta$

問題

(1) 始線 OX 上の点 $\mathrm{A}(2,0)$ を通り, 始線に垂直な直線を l とする. 極 O を焦点, l を準線とする放物線の極方程式を求めよ.

(2) 始線 OX 上の点 $\mathrm{A}(2,0)$ を通り, 始線に垂直な直線を l とする. 点 $\mathrm{P}(r,\theta)$ から l に下ろした垂線を PH とするとき, $\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}=\dfrac{1}{2}$ であるような点 P の軌跡を, 極方程式で表せ.