1 極限の復習

1.1 数列

復習です.

(1) $\lim_{n\to\infty}(n^2-n)$

$$= \lim_{n\to\infty} n(n-1)$$

$$= \infty$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n-100}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2-\frac{100}{n}} = \frac{3}{2}$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-10}{3+4n+5n^2}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}-\frac{10}{n^2}}{5+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{5}$$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n-\sqrt{n^2+n}}$

$$\frac{2}{n-\sqrt{n^2+n}} \times \frac{n+\sqrt{n^2+n}}{n+\sqrt{n^2+n}}$$

$$= \frac{2(n+\sqrt{n^2+n})}{n^2-(n^2+n)}$$

$$= \frac{2(n+\sqrt{n^2+n})}{-n}$$

$$= -2\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) \to -4 \quad (\text{as } n\to\infty).$$

(6) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-2}-\sqrt{n})$

$$(\sqrt{n-2}-\sqrt{n}) \times \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{(n+2)-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \to 0 \quad (\text{as } n\to\infty)$$

(7) $\lim_{n\to\infty}(3^n-2^n)$

$= \lim_{n\to\infty} 3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = \infty$ //

(8) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+5^n}{2^n-5^n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n-1} = -1$ //

(9) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2^{n+1}+5^{n+1}}{5^n+3^n+2^n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n+2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n+5\cdot 1}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{5}{1} = 5$ //

(10) $a_1=2, a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n+1$ で定められる数列 a_n の極限を求めよ.

$a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n+1.$

$a_{n+1}+2 = \frac{3}{2}(a_n+2)$

数列 $\{a_n+2\}$ は. 初項 $2+2=4$
公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列.

$a_n+2 = 4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-2$ //

(11) 数列 $a_n=3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\right), b_n=3$ があり, もう一つの数列 c_n が, 任意の自然数 n で $b_n<c_n<a_n$ を満たしているとする. 数列 c_n の極限を求めよ.

$3 < c_n < 3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\right)$

$\lim_{n\to\infty} 3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\right) = 3$ より.

はさみうちの原理から.

$\lim_{n\to\infty} c_n = 3$ //

(12) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ の収束, 発散を調べ, 収束する場合はその和を求めよ.

まず, 部分和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$ を求める

$$\frac{1}{k(k+2)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)\frac{1}{2}$$

より

$$\begin{aligned}
S_n = &\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) \\
&+ \quad \vdots \\
&+ \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+2}\right) \\
= &\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

//

(13) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$ の収束, 発散を調べ, 収束する場合はその和を求めよ.

まず, 部分和 S_n を求める.

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}} \times \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{(n+2)-n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right).$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ S_n = &\ \frac{1}{2}\left(\cancel{\sqrt{3}} - \sqrt{1}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\cancel{\sqrt{4}} - \sqrt{2}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\cancel{\sqrt{5}} - \cancel{\sqrt{3}}\right) \\
&+ \quad \vdots \\
&+ \frac{1}{2}\left(\sqrt{n+1} - \cancel{\sqrt{n-1}}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\sqrt{n+2} - \cancel{\sqrt{n}}\right) \\
= &\ \frac{1}{2}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - 1 - \sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

$\therefore$ 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$ は $+\infty$ に 発散.

2 関数の極限

2.1 そもそも極限とは

$\lim_{x \to a} f(x) = b$ の意味を説明せよ．

「xを aとは異なる値をとりながら，
限りなく aに近づけるとき，
$f(x)$の値は限りなく bに近づく」

そのため，

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ となるとは限らない。

「代入ではない!!」

2.2 練習問題

次の極限を求めよ．

(1) $\lim_{x \to 1}(2x+1)(x-1)$

$= \underline{0}_{//}$

(2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{2x+1}{x-5}$

$= \dfrac{1}{-5} = \underline{-\dfrac{1}{5}}_{//}$

(3) $\lim_{x \to -1} \sqrt{1-2x}$

$= \underline{\sqrt{3}}_{//}$

(4) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x$ $= \underline{1}_{//}$

(5) $\lim_{x \to 4} \log_2 x$ $= \log_2 4$

$= \underline{2}_{//}$

★ 不定形 $\frac{0}{0}$, $0\times\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ 等は、不定形の解消後に極限を考える!

2.3 さまざまな極限

次の問いに答えよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}$ を求めよ．

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}$$

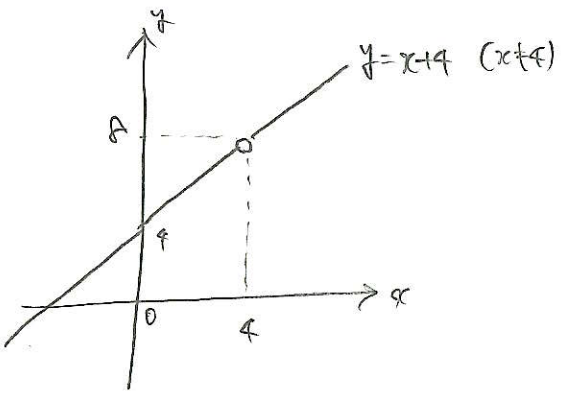
$$=\lim_{x\to4}\frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{x-4}}=\lim_{x\to4}(x+4)$$

$$=\underline{8}$$

(2) $y=\dfrac{x^2-16}{x-4}$ のグラフを描き，上の問題の意味を説明せよ．

定義域：$x\neq4$ をみたす実数

$x\neq4$ で $y=x+4$.



$x=4$ での y の値は定義されていないが，x を限りなく4に近づけると，y の値は限りなく8に近づく．

2.4 練習

極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}\right)$

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{(2+x)-2}{2(2+x)}$$

$$=\frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}(2+x)}$$

$$=\frac{1}{2(x+2)}\to\frac{1}{4}\quad(\text{as } x\to0).$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$

$$\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$$

$$=\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}\times\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}$$

$$=\frac{\cancel{x}+\cancel{9}-\cancel{9}}{\cancel{x}(\sqrt{x+9}+3)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}\to\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

$$\underline{(\text{as } x\to0)}$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}$

$$=\underline{\infty}$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{-3}{(x+2)^2}$ $=\underline{-\infty}$

2.5 片側極限

問題

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{|x|}$$

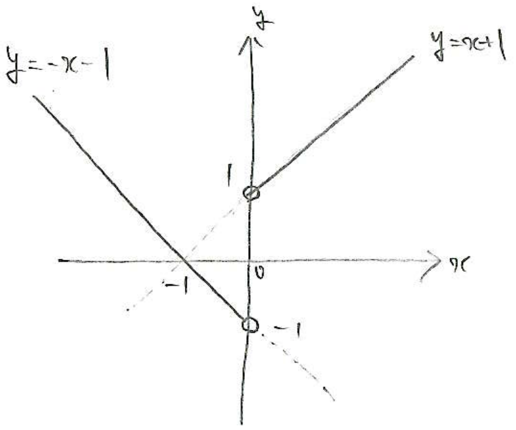
の極限について考える．(0 に近づける)

(i) $x>0$ のとき

$$f(x) = \frac{x^2+x}{x} = x+1.$$

(ii) $x<0$ のとき

$$f(x) = \frac{x^2+x}{-x} = -x-1.$$



上図より，

$x>0$ の範囲で x を 0 に限りなく近づけると

$f(x)$ の値は 1 に限りなく近づく．

$$\lim_{x\to 0_{+0}} f(x) = 1.$$

右側極限

一方，

$x<0$ の範囲で x を 0 に限りなく近づけると

$f(x)$ の値は -1 に限りなく近づく．

$$\lim_{x\to 0_{-0}} f(x) = -1.$$

左側極限

$x\to 0_{+0}$，$x\to 0_{-0}$ を

$x\to +0$，$x\to -0$ と書くこともある

2.6 練習

極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{|x|}{x}$

$x>0$ で $\dfrac{|x|}{x} = 1.$

$$\therefore \lim_{x\to+0} \frac{|x|}{x} = 1.$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-0} \frac{|x|}{x}$

$x<0$ で $\dfrac{|x|}{x} = -1$

$$\therefore \lim_{x\to-0} \frac{|x|}{x} = -1$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to1+0} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

$x>1$ で $\dfrac{x^2-1}{|x-1|} = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1.$

$$\therefore \lim_{x\to 1+0} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1+0}(x+1) = 2$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to1-0} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

$x<1$ で $\dfrac{x^2-1}{|x-1|} = \dfrac{x^2-1}{-(x-1)} = -(x+1)$

$$\therefore \lim_{x\to 1-0} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1-0} -(x+1) = -2$$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{1}{x}$

$= \infty.$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to-0} \frac{1}{x}$

$= -\infty$

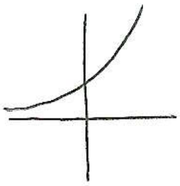
3 色々な関数の極限

3.1 指数対数

考え方は同じ.

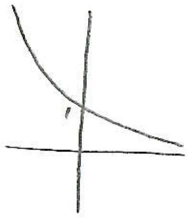
3.2 練習

(1) $\lim_{x\to\infty} 3^x$ $=\infty$ //



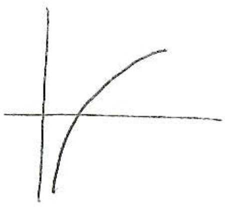
(2) $\lim_{x\to-\infty} (0.3)^x$

$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^x = \infty$ //



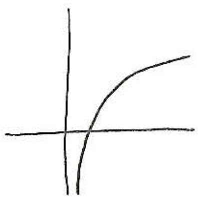
(3) $\lim_{x\to+0} \log_2 x$

$= -\infty$ //



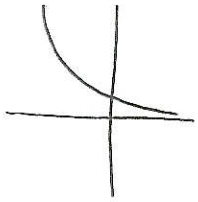
(4) $\lim_{x\to\infty} \log_3 x$

$= \infty$ //



(5) $\lim_{x\to\infty} 2^{-x}$

$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$



(6) $\lim_{x\to\infty} \log_3 \frac{3x+1}{9x-9}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{9x-9} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{9-\frac{9}{x}} = \frac{1}{3}$

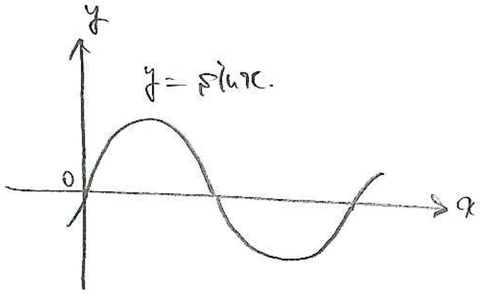
$\therefore \lim_{x\to\infty} \log_3 \frac{3x+1}{9x-9} = \log_3 \frac{1}{3}$

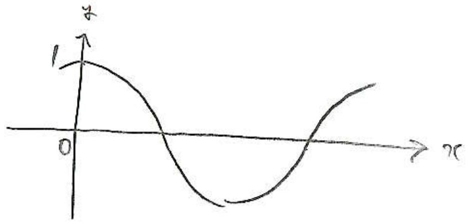
$= -1$ //

3.3 三角関数

3.4 グラフで考える

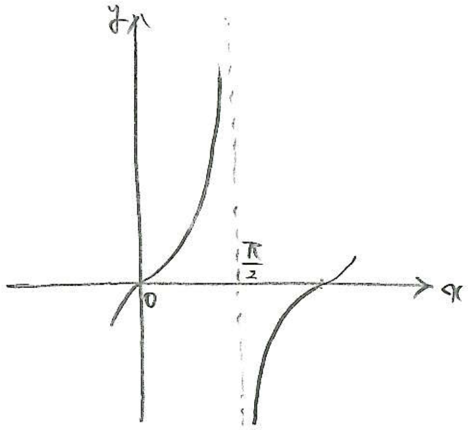
(1) $x \to \infty$ での $\sin x, \cos x$ の極限はどうなるか.





$x \to \infty$ においてともに極限なし.

(2) $x \to \dfrac{\pi}{2}$ での $\tan x$ の極限はどうなるか.



$x \to \frac{\pi}{2}+0$ で $\tan x \to -\infty$.

$x \to \frac{\pi}{2}-0$ で $\tan x \to \infty$.

極限はなし.

3.5 色々な問題

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = 0$ //

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \tan\frac{1}{x} = 0$ //

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$

$-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1.$

$-x \le x\cos\frac{1}{x} \le x.$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} x = 0$ より はさみうちの原理で

$\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$ //

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

$-1 \le \sin x \le 1$

$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ より はさみうちの原理で

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ //

3.6 $\dfrac{\sin x}{x}$ の極限

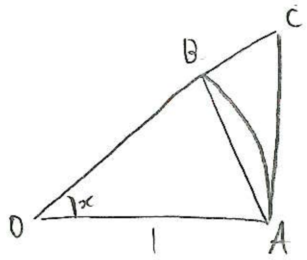
係数をそろえる!!

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

★ xの単位はラジアン

＜証明＞

$x>0$ のとき.



半径1の扇形 OAB について,

図のように. △OAB, △OAC を考える。

面積は,

△OAB ≤ 扇OAB ≤ △OAC を満たす。

ここで,

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin x=\frac{1}{2}\sin x$$

$$扇OAB=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x=\frac{1}{2}x$$

$$\triangle OAC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x=\frac{1}{2}\tan x.$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\sin x\le\frac{1}{2}x\le\frac{1}{2}\tan x$$

① ②

①より

$$\frac{\sin x}{x}\le 1.$$

②より

$$\cos x\le\frac{\sin x}{x}$$

$\lim_{x\to 0}\cos x=1$ より はさみうちの原理で

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

$x<0$ で.

$t=-x$ とおけば

$$\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to 0+0}\frac{\sin(-t)}{-t}$$

$$=\lim_{t\to 0+0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

以上より $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

3.7 練習

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times 3=1\cdot 3=\underline{3}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{3}{2}$$

$$=1\cdot 1\cdot\frac{3}{2}=\underline{\frac{3}{2}}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$=1\cdot 1=\underline{1}$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}\cdot\frac{\cos x+1}{\cos x+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)}$$

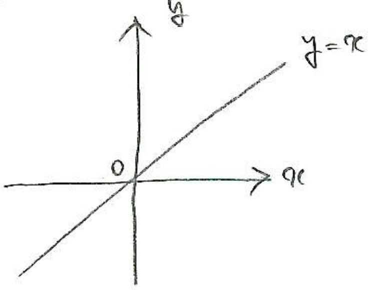
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x+1}\cdot(-\sin x)$$

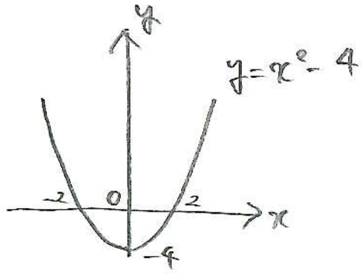
$$=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 0=\underline{0}$$

4 関数の連続性

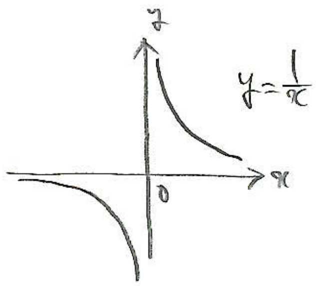
4.1 思考

(1) すべてのxで 連続なグラフをいくつか描いてみよ.

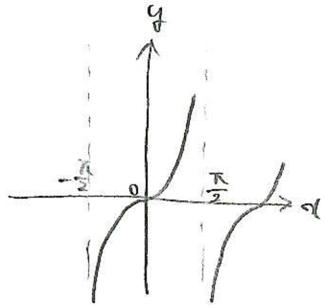




(2) 不連続な 点をもつ グラフをいくつか描いてみよ.



$x = 0$で不連続



$x = \frac{\pi}{2}, \cdots$ で不連続

4.2 連続について

$f(x)$が $x = a$で連続

$\Leftrightarrow$ 極限値 $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在し,

かつ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$f(x)$がある区間I内で連続

$\Leftrightarrow$ 区間I内のすべてのxで $f(x)$が連続

連続関数とは

… 定義域内すべてのxで連続な関数

つまり、これらは連続関数

4.3 不連続について

例) $y = [x]$.

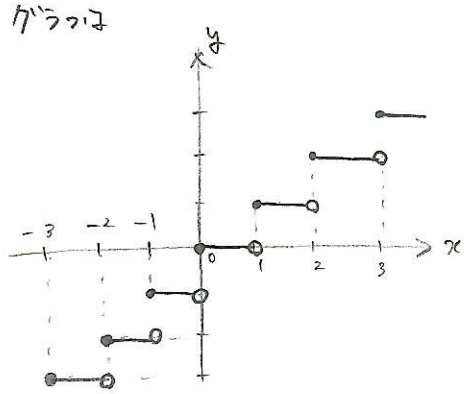
$[x]$は, xを超えない最大の整数を表す.

例えば $[1.5] = 1$.

$[2] = 2$.

$[-1.5] = -2$.

グラフは



4.4 中間値の定理

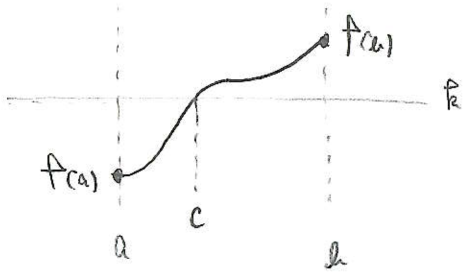
閉区間で連続な関数は，以下の性質を持つ．

閉区間で連続な関数は，その区間で最大値および最小値を持つ．

また，以下も成立．

中間値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で，
$f(a) \neq f(b)$ ならば，$f(a) < k < f(b)$ をみたす
任意の k に対し
$f(c) = k,\quad a < c < b$
をみたす実数 c が少なくとも1つ存在

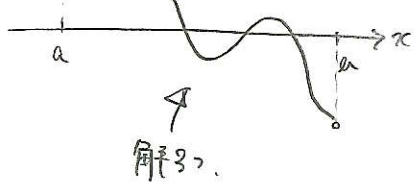


$x = a$ から $x = b$ の点へ行くとき，
必ず $y = k$ を通ることになる!

このことから，次も成立する．

補題

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で，
$f(a)$ と $f(b)$ が異符号であれば，
方程式 $f(x) = 0$ は $a < x < b$ の範囲に
少なくとも1つの実数解をもつ．



解3つ．

4.5 練習

(1) 方程式 $x - \cos x = 0$ は，$0 < x < \pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解を持つことを示せ．

$f(x) = x - \cos x$ とすると，
この関数は連続関数である。

$f(0) = 0 - (1) = -1 \quad < 0$

$f(\pi) = \pi - (-1) = \pi + 1 \quad > 0$

∴ $f(x)$ は $[0, \pi]$ で連続で，
$f(0)$ と $f(\pi)$ は異符号なので，

方程式 $x - \cos x = 0$ は $0 < x < \pi$ の
範囲に少なくとも1つ実数解をもつ。

(2) 方程式 $2^x - 3x = 0$ は，$3 < x < 4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解を持つことを示せ．

$f(x) = 2^x - 3x$ とおくと，
この関数は連続．

$f(3) = 2^3 - 3 \cdot 3 = 8 - 9 = -1 < 0$

$f(4) = 2^4 - 3 \cdot 4 = 16 - 12 = 4 > 0$

∴ $f(x)$ は $[3, 4]$ で連続で，
$f(3)$ と $f(4)$ は異符号なので，

方程式 $2^x - 3x = 0$ は $3 < x < 4$ の
範囲で少なくとも1つ実数解をもつ．