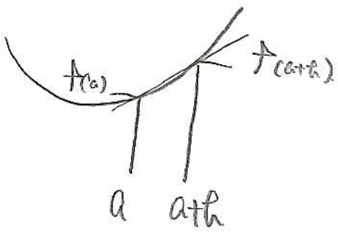
1　導関数

1.1　復習

確認です.

(1) 微分係数の定義

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

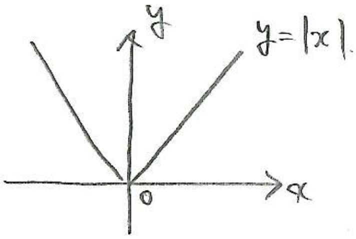


(2) 導関数の定義

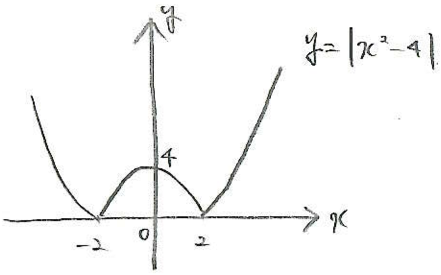
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

1.2 色々考える

連続であるが, 微分可能でない x の値が存在する関数を複数描いてみよう.



$x=0$ で
微分不可能



$x=-2,\ 2$ で
微分不可能

1.3 練習

定義に従って...

(1) 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ の $x=2$ における微分係数を求めよ.

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{(2+h)-2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} \times \frac{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\cancel{2}+h)-\cancel{2}}{h\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\ //$$

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の導関数を求めよ.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{(x+h)-x}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,\frac{x-(x+h)}{x(x+h)} = \underline{\frac{-1}{x^2}}\ //$$

2 導関数の計算

2.1 公式

まずは，使えるようになりましょう．

定理

関数 $f(x), g(x)$ がともに微分可能であるとき，

- $\{f(x)g(x)\}' = f'(x) \cdot g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = \dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$
- $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

合成関数の微分

関数 $y = f(u)$ が u の関数として，$u = \overset{g}{\cancel{f}}(x)$ が x の関数として微分可能であるとき，$y = f(g(x))$ は x の関数として微分可能で，

- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

もちろん，2年初期に学んだ公式も成立．

有理数 p に対して，

$$(x^p)' = p\,x^{p-1}$$

2.2 例

微分せよ．

(1) $y = (\overset{u}{x^2 + x})(\overset{v}{x^3 + 4x + 2})$

$$y' = (2x+1) \cdot (x^3 + 4x + 2) + (x^2 + x) \cdot (3x^2 + 4)$$
$$= 5x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 12x + 2.$$

(2) $y = \dfrac{1}{3x+1}$

$$y' = \frac{3}{(3x+1)^2}$$

(3) $y = \dfrac{x^2}{3x+1}$

$$y' = \frac{2x \cdot (3x+1) - x^2 \cdot 3}{(3x+1)^2}$$
$$= \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$

(4) $y = (2x^2 + 1)^3$

$$y' = 3(2x^2+1) \cdot 4x$$
$$= 12x(2x^2+1).$$

(5) $y = x\sqrt{x^2+1}$

$$= x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = 1 \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{\cancel{2}}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}x$$
$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

3　さまざまな関数の導関数

3.1　自然対数

自然対数 e を，以下のように定義する．

$$e = \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

$$= \lim_{h \to \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{h}$$

この値は，おおよそ　$e = 2.71828\cdots$

数学の世界では，

$\log_e a$ を $\log a$ と表す

注　化学の世界での底の省略は，
常用対数の場合が多い．

3.2　公式

以下が成立．

導関数

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$
- $(\log |x|)' = \dfrac{1}{x}$
- $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \log a}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \log a$

まずは，使えるようになりましょう．

3.3 例

微分せよ．

(1) $y = 3\sin 2x$

$$y' = 3 \cdot 2\cos 2x$$
$$= 6\cos 2x$$

(2) $y = \cos^3 x$

$$y' = 3\cos^2 x \cdot (\cos x)'$$
$$= -3\sin x \cos^2 x$$

(3) $y = \tan(3x^2 + 1)$

$$y' = \frac{1}{\cos^2(3x^2+1)} \cdot (3x^2+1)'$$
$$= \frac{6x}{\cos^2(3x^2+1)}$$

(4) $y = x\log x - x$

$$y' = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} - 1$$
$$= \log x$$

(5) $y = \log|\cos x|$

$$y' = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)'$$
$$= -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

(6) $y = \log_2 |x^3 + 1|$

$$y' = \frac{1}{(x^3+1)\log 2} \cdot (x^3+1)'$$
$$= \frac{3x^2}{(x^3+1)\log 2}$$

(7) $y = xe^x$

$$y' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x$$
$$= (1+x)e^x$$

(8) $y = 3^x$

$$y' = 3^x \cdot \log 3$$

3.4　対数微分法

問題

微分せよ.

$$y = \frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}$$ u / v

そのまま微分すると…

$u = (x-1)(x+3)^3$

$v = (x+2)^4$　　とおく.

$u' = (x+3)^3 + (x-1)\cdot 3(x+3)^2$

$= 4x(x+3)^2$

$v' = 4(x+2)^3$　　より

$$y' = \frac{4x(x+3)^2\cdot(x+2)^4 - (x-1)(x+3)^3\cdot 4(x+2)^3}{(x+2)^8}$$

⋮

対数微分法を用いて…

$$\log y = \log(x-1) + 3\log(x+3) - 4\log(x+2)$$

両辺 x で微分して

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+3} - \frac{4}{(x+2)}$$

$$= \frac{(x+3)(x+2) + 3(x-1)(x+2) - 4(x-1)(x+3)}{(x-1)\cdot(x+3)(x+2)}$$

$$= \frac{12}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$\therefore y' = \frac{\cancel{(x-1)}(x+3)^{\cancel{3}\,2}}{(x+2)^4}\cdot\frac{12}{\cancel{(x-1)}(x+2)\cancel{(x+3)}}$$

$$= \frac{12(x+3)^2}{(x+2)^5}$$

3.5 第 n 次導関数

関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき，これをさらに微分して得られる導関数を，関数 $y=f(x)$ の第 2 次導関数といい，

$$f''(x),\quad f^{(2)}(x),\quad \left(\frac{d}{dx}\right)^2 y \quad \ldots$$

のように表す．

以下，同様に第 n 次導関数を

$$f^{(n)}(x)$$

のように表す．

例

第 n 次導関数を求める．

(1) $y=e^{-x}$

$f(x)=e^{-x}$ とし，

$f^{(1)}(x)=-e^{-x}$

$f^{(2)}(x)=e^{-x}$

$\vdots$

$\therefore\ f^{(n)}(x)=(-1)^n e^{-x}$ //

(2) $y=\sin x$

$f(x)=\sin x$ とし，

$f^{(1)}(x)=\cos x$

$f^{(2)}(x)=-\sin x$

$f^{(3)}(x)=-\cos x$

$f^{(4)}(x)=\sin x$

練習第 2 次導関数，第 3 次導関数を求めよ．

(1) $y=x^3+x^2+x+1$

$y'=3x^2+2x+1$

$y''=6x+2$

$y'''=6$ //

(2) $y=\log x$

$y'=\frac{1}{x}=x^{-1}$

$y''=-\frac{1}{x^2}=-x^{-2}$

$y'''=3\cdot\frac{1}{x^3}$ //

練習第 n 次導関数を求めよ．

(1) $y=x^n$

$f(x)=x^n$ とし，

$f^{(1)}(x)=n\cdot x^{n-1}$

$f^{(2)}(x)=n\cdot(n-1)x^{n-2}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x)=n!$ //

(2) $y=e^{2x}$

$f(x)=e^{2x}$ とし，

$f^{(1)}(x)=2\cdot e^{2x}$

$f^{(2)}(x)=2\cdot2\cdot e^{2x}$

$=2^2\cdot e^{2x}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x)=2^n\cdot e^{2x}$ //

3.6 媒介変数

導関数の記号の嬉しい点は，分数のように扱う事ができる点である．

例題

x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されるとき，$\frac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ．

$$x = 2\cos t, \quad y = 5\sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \text{ より.}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2 \cdot (-\sin t) = -2\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 5\cos t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{5\cos t}{-2\sin t}$$

$$= \frac{5}{-2\tan t}$$

3.7 練習

(1) $x = t^2, \quad y = 2\cancel{x}t + 3$

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 \text{ であり.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \text{ より}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$$

(2) $x = \frac{1}{\cos t}, y = \tan t$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-(-\sin t)}{\cos^2 t}$$

$$= \frac{\sin t}{\cos^2 t}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \text{ より.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin t}$$

4 各種証明

定理

関数 $f(x), g(x)$ がともに微分可能であるとき，

- $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
- $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{(g(x))^2}$
- $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

〈証明〉

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{(x+h) - x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$はともに微分可能なので

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$$

$$\therefore\ \{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{g(x+h)} - \dfrac{1}{g(x)}}{(x+h) - x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)\cdot g(x+h)}\cdot\frac{g(x) - g(x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{g(x+h)}\cdot\frac{-(g(x+h)-g(x))}{h}$$

$$= \frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}\cdot(-g'(x))$$

$$= \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\{f(x)\cdot g(x)\}' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)g'(x).$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$ より.

$$\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right) + f(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$

$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{(g(x))^2}\right)$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

図

合成関数の微分

関数 $y = f(u)$ が u の関数として, $u = \cancel{f(x)}$ $g(x)$ が x の関数として微分可能であるとき, $y = f(g(x))$ は x の関数として微分可能で,

- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx}$

〈略証明〉.

xの増分 Δx に対する uの増分を Δu.
uの 〃 Δu 〃 y 〃 Δy とする。

$\Delta u \neq 0$ のとき.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$u = g(x)$ は連続なので,

$\Delta x \to 0$ で $\Delta u \to 0$.

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

∎

(これは $\Delta u = 0$ でも成立するらしい。)

導関数

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

〈証明〉.

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{(x+h) - x}$$

ここで

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h.$$

$$\therefore (\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}\right).$$

ここで.

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos h - 1}{h} \times \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1}$$

$$= \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)}$$

$$= \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)}$$

$$= \frac{\sin h}{h} \cdot (-\sin h) \cdot \frac{1}{\cos h + 1}$$

$$\to 1 \cdot (-0) \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$(\text{as } h \to 0)$$

$$\left(\because \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 0\right)$$

以上より.

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{(x+h) - x}$$

ここで

$$\cos(x+h) = \cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h.$$

$$\therefore (\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \cdot \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \frac{\sin h}{h}\right).$$

前方のギロニより

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0, \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \text{ より}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ より.}$$

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

証

導関数

- $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$
- $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$
- $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \log a}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \cdot \log a$

〈証明〉

$$(\log_a x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{(x+h) - x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \cdot \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

ここで

$$\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = e \quad \text{より.}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{\log e}{\log a}$$

$$= \frac{1}{x \log a}$$

$a = e$とすれば $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

・$\log|x|$について

$x > 0$のとき

$$(\log|x|)' = (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$x < 0$のとき

$$(\log|x|)' = (\log(-x))' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore (\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

同様にして

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \log a}$$

$y = a^x$とおく.

辺々対数をとって.

$$\log_a y = x$$

xで微分

$$\frac{y'}{y \log a} = 1$$

$$y' = y \log a.$$

$y = a^x$より

$$y' = a^x \cdot \log a$$

$$\therefore (a^x)' = a^x \log a$$

$a = e$とすると

$$(e^x)' = e^x$$

図