# 1 復習・不定積分

## 1.1 微分と積分

(1) $(x^2+3x)' =$ $2x+3$.

(2) $\int (2x+3)dx =$ $2\cdot\frac{1}{2}x^2+3x+C$

$= x^2+3x+C$.

($C$：積分定数).

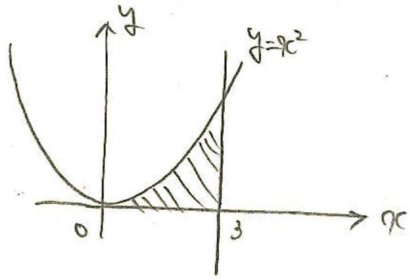
## 1.2 定積分

(1) $\int_0^2 x^2 dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \underline{\frac{8}{3}}$ //

### 1.2.1 面積

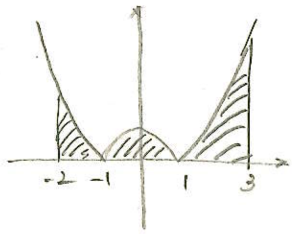
(1) $y=x^2, y=0, x=3$ で囲まれた部分の面積を求めよ.




$S = \int_0^3 x^2 dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \underline{9}$ //

(2) $\int_{-2}^{3} |x^2-1| dx$




$= \int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx$

$+ \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx + \int_{1}^{3}(x^2-1)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{-2}^{-1} + \left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{1}^{3}$

$= \frac{1}{3}(-1+8)-(-1+2)$

$+(1+1)-\frac{1}{3}(1+1)+\frac{1}{3}(27-1)-(3-1)$.

$= \frac{7}{3}-1+2-\frac{2}{3}+\frac{26}{3}-2$

$= \frac{31}{3}-1 = \underline{\frac{28}{3}}$ //

### 1.3　微分の復習

以下の関数を微分せよ．

(1) $y = \sin x$

$y' = \cos x$

(2) $y = \cos x$

$y' = -\sin x$

(3) $y = \tan x$

$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(4) $y = \log_2 x$

$y' = \dfrac{1}{x \log 2}$

(5) $y = \log x$

$y' = \dfrac{1}{x}$

(6) $y = 3^x$

$y' = 3^x \cdot \log 3$

(7) $y = 2^x$

$y' = 2^x \cdot \log 2$

### 1.4　不定積分

$C$：積分定数

**不定積分**

(1) $\int x^\alpha dx = \dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$

(2) $\int \frac{1}{x} dx = \log x + C$

(3) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(4) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(5) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

(6) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\dfrac{\cos x}{\sin x} + C = \dfrac{-1}{\tan x} + C$

(7) $\int e^x dx = e^x + C$

(8) $\int a^x dx = \dfrac{1}{\log a} \cdot a^x + C$

($a$ は 1 でない正の定数)

C：積分定数.

### 1.5 練習

(1) $\int \frac{1}{x^2}dx =$ $\int x^{-2}dx$

$= -x^{-1} + C$

(2) $\int \sqrt{x}dx =$ $\int x^{\frac{1}{2}}dx$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$

(3) $\int \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}dx =$ $\int (1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2})dx$

$= x - 3\log x - \frac{2}{x} + C.$

(4) $\int (2\sin x + 3\cos x)dx =$ $-2\cos x + 3\sin x + C.$

(5) $\int (2e^x + 3^x)dx =$ $2e^x + \frac{3^x}{\log 3} + C$

(6) $\int \tan^2 x dx =$ $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$

$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$

$= \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx$

$= \tan x - x + C$

(7) $\int \frac{2\cos^3 x - 1}{\cos^2 x}dx =$ $\int (2\cos x - \frac{1}{\cos^2 x})dx$

$= 2\sin x - \tan x + C.$

(8) $\int 5^x \log 5 dx =$ $\frac{5^x}{\log 5} \cdot \log 5 + C$

$= 5^x + C.$

## 2 置換積分

### 2.1 置換積分法

**置換積分**

$x = g(t)$ と書けるとき

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$$

#### 2.1.1 練習

C:積分定数.

以下の不定積分を求めよ.

(1) $\int x\sqrt{x+1}dx$

$\sqrt{x+1} = t$ とおく.

$x+1 = t^2$　　$x = (t^2-1)$

$dx = 2t\,dt$.

以上より

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (t^2-1)\cdot t \cdot 2t\,dt$$
$$= \int (2t^4 - 2t^2)dt$$
$$= \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + C$$
$$= \frac{2}{5}(x+1)^2\cdot\sqrt{x+1} - \frac{2}{3}(x+1)\cdot\sqrt{x+1} + C$$

(2) $\int x\sqrt{2x-1}dx$

$\sqrt{2x-1} = t$ とおく.

$2x-1 = t^2$

$2x = t^2+1$.

$\cancel{2}dx = \cancel{2}t\,dt$

以上より

$$\int x\sqrt{2x-1}\,dx$$
$$= \int \frac{1}{2}(t^2+1)\cdot \cancel{t}\cdot \cancel{t}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3\right) + C$$
$$= \frac{1}{30}t^3(3t^2+5) + C$$
$$= \frac{1}{30}(2x-1)\sqrt{2x-1}\cdot(6x+2) + C$$
$$= \frac{1}{15}(2x-1)(3x+1)\sqrt{2x-1} + C$$

(3) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

$\sqrt{x+1} = t$ とおく

$x+1 = t^2$　　$x = t^2-1$.

$dx = 2t\,dt$

以上より

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$$
$$= \int \frac{t^2-1}{\cancel{t}}\cdot 2\cancel{t}\,dt$$
$$= \frac{1}{3}t^3 - t + C$$
$$= \frac{1}{3}t(t^2-3) + C$$
$$= \frac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + C.$$

## 2.2 例

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad C: \text{積分定数}$$

$\int f(ax+b)\,dx$ について

$t = ax+b$ とおく

$dt = a \cdot dx.$

$\therefore dx = \frac{1}{a}dt.$

$\int f(ax+b)dx = \int f(t)\frac{1}{a}dt.$

$= \frac{1}{a}F(t) + C$

$= \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$ 

$\int (3x+1)^4 dx$ 以下の不定積分を求めよ.

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}(3x+1)^5 + C$

$= \frac{1}{15}(3x+1)^5 + C$

### 2.2.1 練習

以下の不定積分を求めよ.

(1) $\int \frac{1}{4x+3}dx$

$t = 4x+3$ とおく.

$dt = 4dx.$

$\int \frac{1}{4x+3}dx$

$= \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{4}dt$

$= \frac{1}{4}\log t + C$

$= \frac{1}{4}\log|4x+3| + C$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}dx$

$1-2x = t$ とおく.

$-2dx = dt.$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}dx$

$= \int t^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt$

$= 2\cdot t^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + C.$

$= -\sqrt{1-2x} + C.$

(3) $\int \sin 2x dx$

$= -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$

(4) $\int e^{3x-1}dx$

$= \frac{1}{3}e^{3x-1} + C$

## 2.3 違う形の置換積分

### 2.3.1 例

以下の不定積分を求めよ．

(1) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$

$x^2+1 = t$ とおく
$2x dx = dt$

$\therefore \int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

$= \int \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2} dt$

$= \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} + C$

$= \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C.$

(2) $\int \cos^2 x \sin x dx$

$\cos x = t$ とおく．
$-\sin x\, dx = dt$

$\int \cos^2 x \sin x\, dx$

$= \int t^2 \cdot (-1) \cdot dt$

$= \frac{-1}{3} t^3 + C$

$= -\frac{1}{3} \cos^3 x + C.$

### 2.3.2 練習

(1) $\int x^2\sqrt{x^3+2}dx$

$= \int \sqrt{x^3+2} \cdot \frac{1}{3}(x^3+2)'\,dx$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}(x^3+2)^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{9}(x^3+2)\sqrt{x^3+2} + C.$

(2) $\int xe^{-x^2}dx$

$= \int e^{-x^2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot (-x^2)'\,dx$

$= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

(3) $\int \frac{\log x}{x}dx$

$= \int \log x \cdot (\log x)'\,dx$

$= (\log x)^2 + C.$

## 2.4 部分積分法

### 2.4.1 例

(1) $\displaystyle\int \underset{び}{\overset{そ}{x}} \underset{せ}{\overset{せ}{\cos}} x\,dx$

$$= \overset{そ}{x} \cdot \overset{せ}{\sin x} - \int \overset{び}{1} \cdot \overset{せ}{\sin x}\,dx + C$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

(2) $\displaystyle\int \log x\,dx$

$$= \int 1 \cdot \log x\,dx$$

$$= (\log x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x\,dx + C$$

$$= x\log x - x + C.$$

(3) $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$

$$= x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x\,dx + C.$$

$$\int 2x \cdot e^x\,dx = 2x \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x\,dx + C$$

$$= 2x \cdot e^x - 2 \cdot e^x + C.$$

$$\therefore \int x^2 e^x\,dx$$

$$= x^2 \cdot e^x - (2x \cdot e^x - 2 \cdot e^x) + C$$

$$= (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

部分積分

$$\int \underline{f} \cdot \underline{g}\,dx = \underset{そのまま}{\underline{f}} \cdot \underset{セキブン}{\underline{G}} - \int \underset{ビブン}{\underline{f'}} \cdot \underset{セキブン}{\underline{G}}\,dx + C$$

<証明>.

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

辺をxで積分.

$$f \cdot g = \int f' \cdot g\,dx + \int f \cdot g'\,dx + C.$$

$$\therefore \int f g'\,dx = f \cdot g - \int f' g\,dx + C$$

四

2.4.2 練習

(1) $\int x \sin x dx$

$= x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx + C$

$= -x\cos x + \sin x + C$

(2) $\int \log 2x dx$

$= \int 1\cdot \log 2x\,dx$

$= x\cdot \log 2x - \int \frac{2}{2x}\cdot x\,dx + C$

$= x\log 2x - x + C.$

(3) $\int (x^2+1)\sin x dx$

$= (x^2+1)\cdot(-\cos x) - \int 2x\cdot(-\cos x)\,dx + C$

$= -(x^2+1)\cos x + \int 2x\cdot\cos x\,dx + C$

ここ

$\int 2x\cdot\cos x\,dx$

$= 2x\cdot\sin x - \int 2\cdot\sin x\,dx + C$

$= 2x\sin x + 2\cos x + C$

$\therefore \int (x^2+1)\sin x$

$= (1-x^2)\cos x + 2x\sin x + C.$

## 3 色々な形

### 3.1 例題

$$
\begin{array}{r}
x-2 \\
x+2 \,\overline{)\, x^2-1} \\
x^2+2x \\
\hline
-2x-1 \\
-2x-4 \\
\hline
3
\end{array}
$$

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x+2}dx$

$$= \int \frac{(x+2)(x-2)+3}{x+2}\,dx$$

$$= \int\left((x-2)+\frac{3}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\log|x+2| + C.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}dx$

まず、$\displaystyle\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$

$$= \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$\therefore \int\frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log|x-1| - \log|x+1|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

(3) $\displaystyle\int \sin^2 x dx$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = (1-\cos 2x)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\therefore \int \sin^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.$$

(4) $\displaystyle\int \sin 3x \cos 2x dx$

$$
\begin{array}{rl}
\sin(3x+2x) &= \sin 3x\cos 2x + \cos 3x\cdot\sin 2x \\
+)\ \sin(3x-2x) &= \sin 3x\cos 2x - \cos 3x\sin 2x \\
\hline
\sin 5x + \sin x &= 2\sin 3x\cos 2x
\end{array}
$$

$$\therefore \int \sin 3x\cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int(\sin 5x + \sin x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x - \cos x\right) + C$$

$$= -\frac{1}{10}(\cos 5x + 5\cos x) + C$$

## 3.2 練習

(1) $\displaystyle\int \frac{4x^2+2x}{2x-1}dx$

$$
\begin{array}{r}
2x+2 \\
2x-1\,\big)\overline{\,4x^2+2x\,} \\
4x^2-2x \\
\hline
4x \\
4x-2 \\
\hline
2
\end{array}
$$

$$= \int \frac{(2x-1)(2x+2)+2}{2x-1}dx$$

$$= \int \left(2x+2+\frac{2}{2x-1}\right)dx$$

$$= x^2+2x+\log|2x-1|+C.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+x-2}dx$

まず、

$$\frac{3}{x^2+x-2} = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

$$\therefore \int \frac{3}{x^2+x+2}dx$$

$$= \int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= \log|x-1| - \log|x+2| + C$$

$$= \log\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.$$

(3) $\displaystyle\int \sin^2 3x dx$

$$\cos 6x = 1-2\sin^2 3x.$$

$$\therefore \sin^2 3x = \frac{1-\cos 6x}{2}$$

$$\therefore \int \sin^2 3x\, dx$$

$$= \int \frac{1-\cos 6x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x + C.$$

(4) $\displaystyle\int \sin x \sin 3x dx$

$$
\begin{array}{rl}
& \cos(3x+x) = \cos 3x\cdot\cos x - \sin 3x\cdot\sin x \\
-) & \cos(3x-x) = \cos 3x\cdot\cos x + \sin 3x\cdot\sin x. \\
\hline
& \cos 4x - \cos 2x = -2\sin 3x\cdot\sin x
\end{array}
$$

$$\therefore \sin 3x\cdot\sin x = \frac{\cos 2x - \cos 4x}{2}$$

$$\therefore \int \sin 3x\cdot\sin x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int(\cos 2x - \cos 4x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 4x\right)+C$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 4x + C$$

## 4 定積分

### 4.1 復習兼演習

(1) $\int_0^4 (3x^2 - 4x + 1)dx$

$= \left[x^3 - 2x^2 + x\right]_0^4$

$= 64 - 2 \cdot 16 + 4$

$= 64 - 32 + 4$

$= \underline{36}$

(2) $\int_{-1}^2 2^x dx$

$= \left[\frac{1}{\log 2} \cdot 2^x\right]_{-1}^2$

$= \frac{1}{\log 2}\left(4 - \frac{1}{2}\right)$

$= \underline{\frac{7}{2\log 2}}$

(3) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ より

$\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$

$= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{2\pi}$

$= \underline{\pi}$

(4) $\int_4^2 \frac{x^2+2}{x-1} dx$

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x-1 \,\overline{)\, x^2 + 2} \\ x^2 - x \\ \hline x + 2 \\ x - 1 \\ \hline 3 \end{array}$$

$= \int_4^2 \frac{(x-1)(x+1)+3}{x-1} dx$

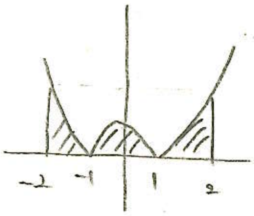
$= \int_4^2 \left(x + 1 + \frac{3}{x-1}\right) dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 + x + 3\log|x-1|\right]_4^2$

$= \frac{1}{2}(4-16) + (2-4) + 3(\log 1 - \log 3)$

$= \underline{-8 - 3\log 3}$

(5) $\int_{-2}^{2} |x^2 - 1| dx$




$= 2\left(\int_0^1 (1-x^2)dx + \int_1^2 (x^2-1)dx\right)$

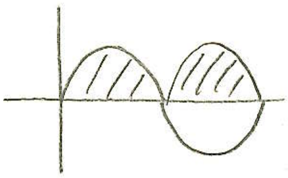
$= 2\left\{ \left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^2 \right\}$

$= 2\left\{ \left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}(8-1) - (2-1) \right\}$

$= 2\left(\frac{2}{3} + \frac{7}{3} - 1\right)$

$= \underline{4}$

(6) $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$



$= \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx$

$= \left[-\cos x\right]_0^{\pi} + \left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}$

$= 2 + 2 = \underline{4}$

## 5 置換積分

### 5.1 復習兼演習

置き換えた場合, 範囲に注意.

(1) $\int_2^1 x(2-x)^4 dx$

$2-x = t$ とおく.
$-dx = dt$

| $x$ | $2 \to 1$ |
|---|---|
| $t$ | $0 \to 1$ |

$$\therefore \int_2^1 x(2-x)^4 dx = \int_0^1 (2-t)\cdot t^4 \cdot (-dt)$$
$$= \int_0^1 (t^5 - 2t^4) dt$$
$$= \left[\frac{1}{6}t^6 - \frac{2}{5}t^5\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{6} - \frac{2}{5} = \frac{5-12}{30}$$
$$= \frac{-7}{30}$$

(2) $\int_0^1 x(1-x)^5 dx$

$1-x = t$ とおく.
$-dx = dt$

| $x$ | $0 \to 1$ |
|---|---|
| $t$ | $1 \to 0$ |

$$\int_0^1 x(1-x)^5 dx = \int_1^0 (1-t)\cdot t^5 \cdot (-dt)$$
$$= \int_1^0 (t^6 - t^5)\, dt$$
$$= \left[\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{6}t^6\right]_1^0$$
$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$$

(3) $\int_2^5 x\sqrt{x-1}dx$

$\sqrt{x-1} = t$ とおく.
$x-1 = t^2$
$dx = 2t\, dt$

| $x$ | $2 \to 5$ |
|---|---|
| $t$ | $1 \to 2.$ |

$$\therefore \int_2^5 x\sqrt{x-1}\, dx = \int_1^2 (t^2-1)\cdot t \cdot 2t\, dt$$
$$= \int_1^2 (2t^4 - 2t^2) dt$$
$$= \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3\right]_1^2$$
$$= \frac{2}{5}(32-1) - \frac{2}{3}(8-1)$$
$$= \frac{62}{5} - \frac{14}{3}$$
$$= \frac{186-70}{15} = \frac{116}{15}$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cdot \sin x\, dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot (\cos x)'\, dx$$
$$= \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(5) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$

$x = a\cos\theta$ とおく.

$dx = -a\sin\theta\, d\theta$.

| $x$ | $0 \to a$ |
|---|---|
| $\theta$ | $\frac{\pi}{2} \to 0$ |

$\therefore \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\cdot\sqrt{1-\cos^2\theta}\cdot(-a\sin\theta)\,d\theta$

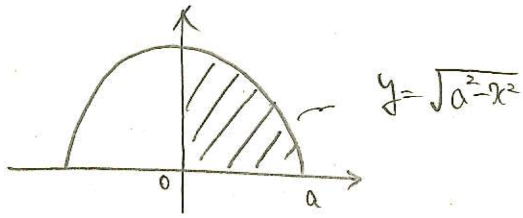
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cdot \sin^2\theta\, d\theta$

$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta$

$= a^2\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \underline{\frac{a^2}{4}\pi}$

$\rightarrow$ 図で解くと!




円の$\frac{1}{4}$.

$\pi\cdot a^2 \times \frac{1}{4} = \frac{a^2}{4}\pi$.

(6) $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}dx$

$x = 2\cos\theta$ とおく.

$dx = -2\sin\theta\, d\theta$

| $x$ | $-1 \to \sqrt{3}$ |
|---|---|
| $\theta$ | $\frac{2}{3}\pi \to \frac{\pi}{6}$ |

$\therefore \int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$

$= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{\pi}{6}} 2\cdot\sqrt{1-\cos^2\theta}\cdot(-2\sin\theta)\,d\theta$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2}{3}\pi} 4\sin^2\theta\, d\theta$

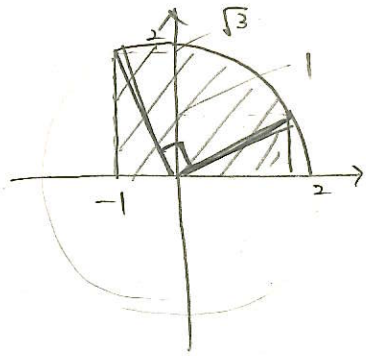
$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2}{3}\pi} \cancel{4}^{2}\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{\cancel{2}}\,d\theta$

$= \left[2\theta - \sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2}{3}\pi}$

$= 2\cdot\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \underline{\pi + \sqrt{3}}$

$\rightarrow$




$\pi\cdot 2^2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}\times 2.$

$= \underline{\pi + \sqrt{3}}$

$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ を使う。

(7) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$

$x = \tan\theta$ とおく。

$dx = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$.

| $x$ | $0 \to 1$ |
|---|---|
| $\theta$ | $0 \to \frac{\pi}{4}$ |

$x^2+1 = \tan^2\theta+1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\therefore \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cancel{\cos^2\theta} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos^2\theta}} d\theta = \left[ \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{\pi}{4}$

(8) $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2+4}dx$

$x = 2\tan\theta$ とおく

$dx = 2 \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

| $x$ | $-2 \to 2$ |
|---|---|
| $\theta$ | $-\frac{\pi}{4} \to \frac{\pi}{4}$ |

$4\tan^2\theta+4 = \frac{4}{\cos^2\theta}$ より

$\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2+4}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\tan^2\theta+1} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$

$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cdot d\theta$

$= \left[ \frac{1}{2}\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\pi}{4}$

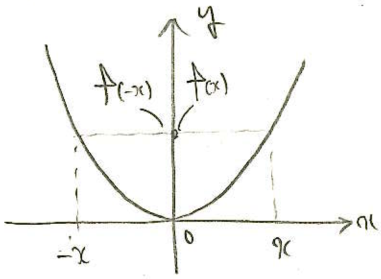
## 5.2 奇関数・偶関数

関数 $f(x)$ において，

- $f(-x) = f(x)$ が常に成立するとき，この関数を偶関数．
- $f(-x) = -f(x)$ が常に成立するとき，この関数を奇関数．

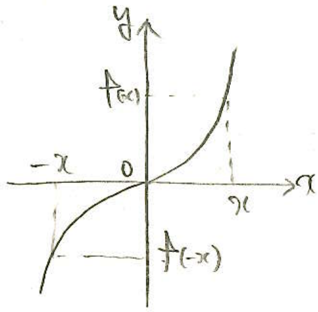
【図】

偶関数 : y軸対称




$$\star \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

奇関数 : 原点対称




$$\star \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

### 5.2.1 練習

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3+3x^2+x+2)dx$

$$= \int_{-1}^{1}(x^3+x)\,dx + \int_{-1}^{1}(3x^2+2)\,dx$$

$$= 0 + 2\cdot\int_{0}^{1}(3x^2+2)\,dx$$

$$= 2\cdot\left[x^3+2x\right]_0^1 = \underline{6}$$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\overset{\text{奇}}{\sin x}+\overset{\text{偶}}{\cos x})dx$

$$= 2\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx$$

$$= 2\cdot\left[\sin x\right]_0^{\pi} = \underline{0}$$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}dx$

$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ とおくと

$f(-x) = -x\sqrt{4-x^2}$ i.e. $f(x)$ は奇関数．

$$\therefore \int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx = \underline{0}$$

① 不定積分を求める
② 定積分

### 5.3 部分積分

#### 5.3.1 復習・練習

C：積分定数

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x dx$

まず、$\int x\sin x dx$

$= x(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)dx + C$

$= -x\cos x + \sin x + C$ より。

$\int_0^{\pi} x\sin x dx$

$= \left[-x\cos x + \sin x\right]_0^{\pi}$

$= \underline{\pi}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

まず、$\int xe^x dx$

$= xe^x - \int e^x dx + C$

$= (x-1)e^x + C$

$\therefore \int_0^1 xe^x dx = \left[(x-1)e^x\right]_0^1$

$= \underline{1}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx$

まず、

$\int x^2\sin x dx$

$= x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)dx + C$

また、$\int 2x\cos x dx$

$= 2x\cdot\sin x - \int 2\sin x dx + C$

$= 2x\sin x + 2\cos x + C$

$\therefore \int x^2\sin x dx$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx$

$= \left[-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

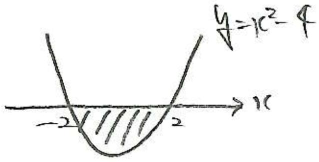
$= 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1 - 2.$

$= \underline{\pi - 2}$

## 7　面積

### 7.1　復習兼演習

(1) 放物線 $y = x^2 - 4$ と $x$ 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.




求める面積は上図の斜線部.

$$S = -\int_{-2}^{2} (x^2-4)\,dx$$

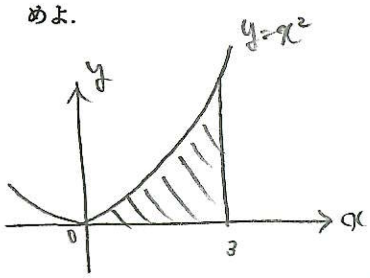
$$= -2\cdot\int_0^2 (x^2-4)\,dx$$

$$= -2\left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_0^2$$

$$= -2\cdot\left(\frac{8}{3} - 8\right)$$

$$= -2\cdot\frac{8\cdot(-2)}{3} = \frac{32}{3}$$

(2) 放物線 $y = x^2$ と $x$ 軸, 直線 $x = 3$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

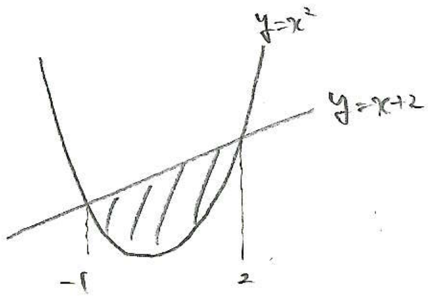



求める面積は上図の斜線部

$$S = \int_0^3 x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^3 = 9$$

(3) 2 曲線 $y = x^2, y = x + 2$ で囲まれた部分の面積を求めよ.




共有点の $x$ 座標は

$$x^2 = x+2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0 \qquad x = -1, 2.$$

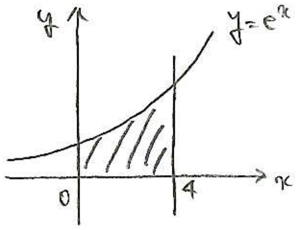
求める面積は上図の斜線部で,

$$S = \int_{-1}^{2} \{(x+2) - x^2\}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{2} -(x-2)(x+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 3^3 = \frac{9}{2}$$

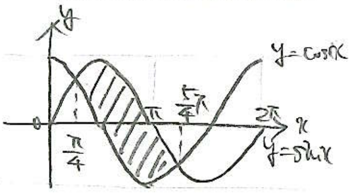
(4) 曲線 $y=e^x$ と $x$ 軸, $y$ 軸, 直線 $x=4$ で囲まれた部分の面積を求めよ.




求める面積は図の斜線部.

$$S=\int_0^4 e^x\,dx$$
$$=\left[e^x\right]_0^4$$
$$=e^4-1$$

(5) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲において, 2 曲線 $y=\sin x, y=\cos x$ で囲まれた部分の面積を求めよ.




共有点の $x$ 座標は

$\sin x=\cos x$

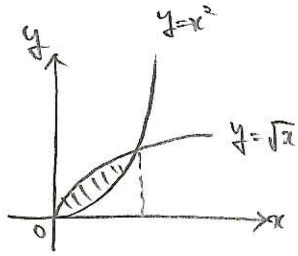
$0\leq x\leq 2\pi$ で

$x=\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$.

求める面積は図の斜線部で

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)\,dx$$
$$=\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}$$
$$=-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\times 2 \quad =2\sqrt{2}$$

(6) 2 曲線 $y=x^2, y=\sqrt{x}$ で囲まれた部分の面積を求めよ.



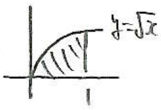
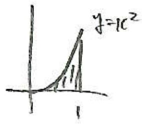

共有点の $x$ 座標は

図の斜線部である.

共有点の $x$ 座標は

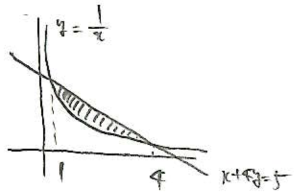
$x^2=\sqrt{x}$

$x=0, 1$

$S=$  $-$ 

$$=\int_0^1\sqrt{x}\,dx-\int_0^1 x^2\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}$$

(7) 2 曲線 $x+4y=5, xy=1$ で囲まれた部分の面積を求めよ.




共有点の $y$ 座標は

$(5-4y)\cdot y=1$

$4y^2-5y+1=0$

$(4y-1)(y-1)=0$

$y=1, \frac{1}{4}$

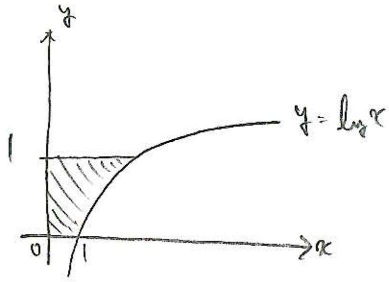
$y=1$ のとき $x=1$. $y=\frac{1}{4}$ のとき $x=4$

求める面積 $S$ は

$$S=\int_1^4\left\{\left(-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\right)-\frac{1}{x}\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{4}x-\log x\right]_1^4$$
$$=-\frac{1}{8}(16-1)+\frac{5}{4}(4-1)-\log 4$$
$$=\frac{15}{8}-2\log 2.$$

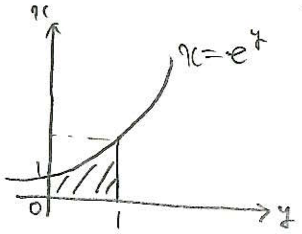
### 7.2　視点を変える

(1) $y = \log x$ と $x$ 軸, $y$ 軸および直線 $y = 1$ で囲まれた部分の面積を求めよ.




求める面積は上図の斜線部.

これは以下と同値




$$\therefore S = \int_0^1 e^y \, dy$$

$$= \left[ e^y \right]_0^1 = \underline{e - 1}$$

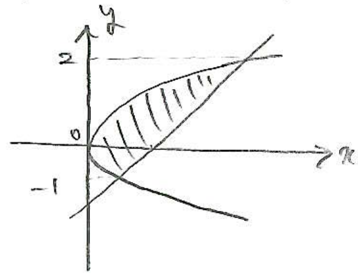
(2) 2 曲線 $x = y^2, x = y + 2$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

共有点のy座標は

$$y^2 = y + 2$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$(y-2)(y+1) = 0 \qquad y = -1, 2$$




求める面積Sは

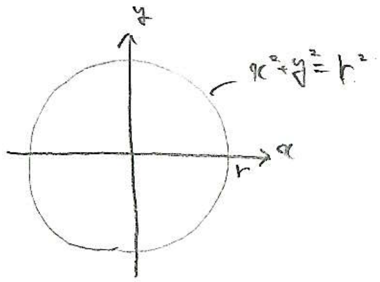
$$S = \int_{-1}^{2} \{(y+2) - y^2\} \, dy$$

$$= \int_{-1}^{2} -(y-2)(y+1) \, dy$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 3^3 = \underline{\frac{9}{2}}$$

## 7.3　いろいろな面積

(1) 半径 $r$ の円の面積を求めよ.




$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

対称性を考慮して、求める面積 $S$ は

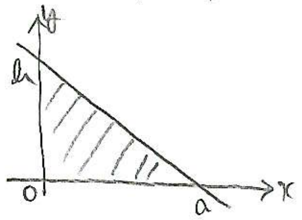
$$S = 4 \times \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

$x = r\cos\theta$ とおく.
$dx = -r\sin\theta\, d\theta$

| $x$ | $0 \to r$ |
|---|---|
| $\theta$ | $\frac{\pi}{2} \to 0$ |

$$\therefore\ S = 4 \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} r\sin\theta \cdot (-r\sin\theta)\, d\theta$$
$$= 4r^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta$$
$$= 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$
$$= 4r^2 \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\pi r^2}$$

(2) $a, b \neq 0$ とする. 2 点 $\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{B}(0, b)$ を通る直線と, $x$ 軸, $y$ 軸で囲まれた部分 (三角形) の面積を求めよ.

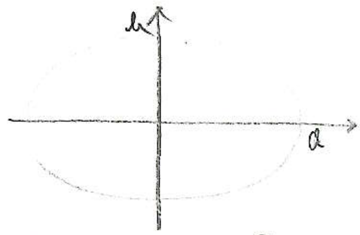



この直線は
$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

求める面積 $S$ は

$$S = \int_0^a \left(-\frac{b}{a}x + b\right) dx$$
$$= \left[-\frac{b}{2a}x^2 + bx\right]_0^a$$
$$= -\frac{1}{2}ba + ba = \underline{\frac{1}{2}ab}$$

(3) $a, b > 0$ とする. 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の面積を求めよ.




$$y = \pm\sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}x\right)^2}$$

対称性を考慮して、求める面積 $S$ は

$$S = 4 \times \int_0^a \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}x\right)^2}\, dx$$
$$= 4 \times \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$
$$= 4 \cdot \frac{b}{a} \cdot \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$
$$= 4 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2\pi}{4}$$
$$= \underline{ab\pi}$$

### 7.4 媒介変数

#### 7.4.1 例題

$a>0$ とする．サイクロイド

$$x=a(\theta-\sin\theta),\quad y=a(1-\cos\theta)\qquad(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

と $x$ 軸で囲まれた部分の面積 $S$ を求めよ．

まず、グラフを描く。

$$x=a(\theta-\sin\theta)$$

$$\frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta).$$

$\cos\theta=1$ で $\frac{dx}{d\theta}=0$

i.e. $\theta=0, 2\pi$ で $\frac{dx}{d\theta}=0$

$\frac{dx}{d\theta}$ の符号.

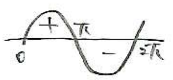

$$y=a(1-\cos\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta}=a\sin\theta.$$

$\sin\theta=0$ で $\frac{dy}{d\theta}=0$.

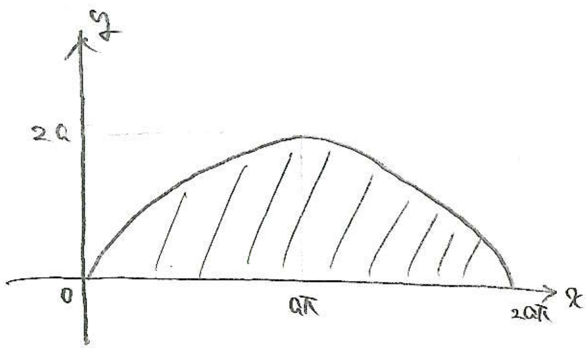
$\theta=0, \pi, 2\pi$ で $\frac{dy}{d\theta}=0$

$\frac{dy}{d\theta}$ の符号




増減表は

| $\theta$ | 0 | … | $\pi$ | … | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dx}{d\theta}$ | 0 | | + | | 0 |
| $\frac{dy}{d\theta}$ | 0 | + | 0 | − | 0 |
| $x$ | 0 | → | $\pi a$ | → | $2\pi\cdot a$ |
| $y$ | 0 | ↑ | $2a$ | ↓ | 0 |




求める面積は図の斜線部で、

$$S=\int_0^{2a\pi} y\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)\cdot\frac{dx}{d\theta}\cdot d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)\cdot(\theta-\sin\theta)\,d\theta$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(\theta-\theta\cos\theta-\sin\theta+\sin\theta\cos\theta)\,d\theta$$

さて、

$$\int\theta\cos\theta\,d\theta=\sin\theta-\int 1\cdot\sin\theta\,d\theta+C$$

$$=\sin\theta+\cos\theta+C$$

$$\int\sin\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\sin^2\theta+C$$

（C：積分定数）より

$$S=a^2\left[\frac{1}{2}\theta^2-(\sin\theta+\cancel{\cos\theta})+\cancel{\cos\theta}+\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$=2a^2\pi^2$$ //

### 7.4.2 練習

$a>0, b>0$ とする．以下の曲線と $x$ 軸で囲まれた部分の面積 $S$ を求めよ．

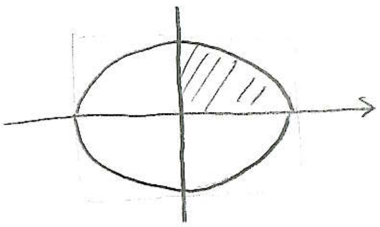
$$x = a\cos\theta,\quad y = b\sin\theta \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

$$\cos\theta = \frac{x}{a}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{b} \qquad \text{であり.}$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

∴ この曲線は楕円.



対称性を考慮して.

$$S = 4\int_0^a y\, dx$$

ここで.

| $x$ | $0 \to a$ |
|---|---|
| $\theta$ | $\frac{\pi}{2} \to 0$ |

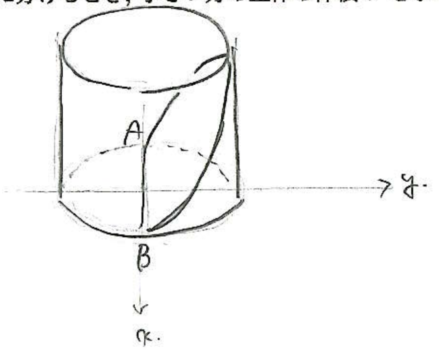
$$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta.$$

$$\therefore S = 4\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin\theta\cdot(-a\sin\theta)\, d\theta$$
$$= 4\cdot ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta$$
$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$
$$= 4ab\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= ab\pi$$

## 8　体積

### 8.1　練習

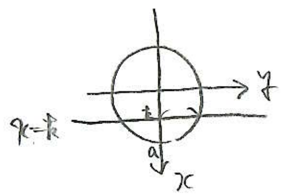
(1) 底面の半径が $a$, 高さが $a$ である直円柱がある．この底面の直径 AB を含み底面と 45° の傾きをなす平面で, 直円柱を 2 つの立体に分けるとき, 小さい方の立体の体積 $V$ を求めよ．

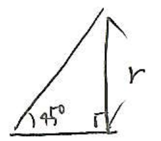



図のように
$xy$平面上に円柱の底面をおき，

$A(-a,0)$，$B(a,0)$ となるようにする

平面 $x=t$ でこの立体を切断したとき，その断面図は
右下図．




断面図．

直角二等辺三角形となり，その辺 $r$ は，

左図から，

$$r=\sqrt{a^2-t^2}$$

∴ $x=t$ で切断してできる三角形の面積 $S(t)$ は

$$S(t)=\frac{1}{2}r^2$$

$$=\frac{1}{2}(a^2-t^2)$$

この $t$ を $-a$ から $a$ まで動かしてできる部分が
求める体積である。対称性考慮して

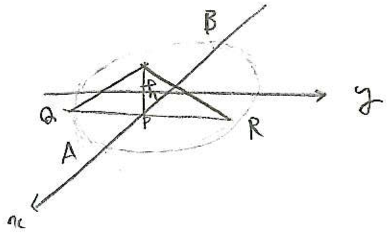
$$\therefore V=2\cdot\int_0^a S(t)\,dt$$

$$=2\cdot\int_0^a\frac{1}{2}(a^2-t^2)\,dt$$

$$=\left[a^2t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^a$$

$$=\frac{2}{3}a^3$$

(2) 半径 $a$ の円 $O$ がある．この直径 AB 上の点 P を通り直線 AB に垂直な弦 QR を底辺とし, 高さが $h$ である二等辺三角形を, 円 $O$ の面に対して垂直に作る．P が A から B まで動くとき, この三角形が通過してできる立体の体積 $V$ を求めよ．

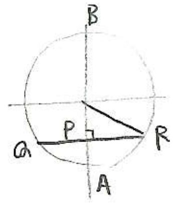



図のように，$xy$平面に円Oをおき，

$A(a,0)$，$B(-a,0)$ となるようにする．

$P(t,0)$ とすると．　左図より　$PR=\sqrt{a^2-t^2}$

$$\therefore QR=2\sqrt{a^2-t^2}$$




よって，作られる二等辺三角形の面積 $S(t)$ は

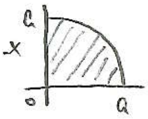
$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{a^2-t^2}\cdot h$$

$$=h\cdot\sqrt{a^2-t^2}$$

求める体積は，対称性考慮して

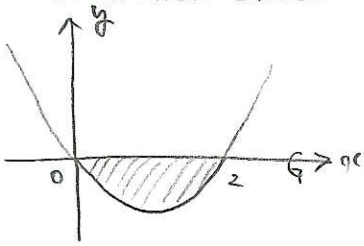
$$V=2\times\int_0^a h\sqrt{a^2-t^2}\,dt$$

$$=2h\int_0^a\sqrt{a^2-t^2}\,dt$$

$=2h\times$ 


$$=2h\cdot\frac{1}{4}\pi a^2=\frac{1}{2}\pi a^2h$$

(3) 曲線 $y = x^2 - 2x$ と $x$ 軸で囲まれた部分を $x$ 軸周りに回転してできる立体の体積 $V$ を求めよ.



求める体積Vは、上図の斜線部をx軸まわりに回転させてできたもの。

$$V = \int_0^2 \pi \cdot (x^2 - 2x)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) \, dx$$

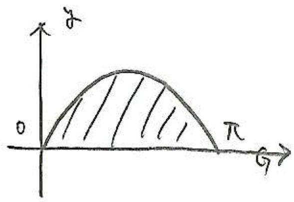
$$= \pi \left[ \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2$$

$$= \pi \left( \frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3} \right)$$

$$= 16\pi \left( \frac{2}{5} - 1 + \frac{2}{3} \right)$$

$$= 16\pi \cdot \frac{6 - 15 + 10}{15} = \frac{16}{15}\pi$$

(4) 曲線 $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と $x$ 軸で囲まれた部分を $x$ 軸周りに回転してできる立体の体積 $V$ を求めよ.



求める体積Vは、上図の斜線部をx軸まわりに回転させてできたもの。

$$V = \int_0^\pi \pi \cdot (\sin x)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx$$

$$= \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx$$

$$= \pi \left[ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{2}\pi^2$$