KNC(難関大学対策講座) 数学

～整数を学ぶ～

令和 6 年 8 月 21 日

2 年 4 組_____番 氏名______________________________

- 2つの整数 a, b について, ある整数 $k \in \mathbb{Z}$ を用いて $a = bk$ と表せるとき,

  b は a の倍数,　　a は b の倍数

- 2つ以上の整数について, 共通する倍数を公倍数といい, 公倍数の中で最大のものを最大公倍数という.

- 2つ以上の整数について, 共通する倍数を公倍数といい, 公倍数の中で最小のものを最小公倍数という.

[補足] 最大公約数は $G.C.D$, 最小公倍数は $L.C.M$

- 2つの整数 a, b に対し, 最大公約数が1であるとき, a と b は互いに素であるという.

- 和・差・積のあまりについて
  $a = mp + r, b = mp' + r'$ とする.

$$
\begin{array}{cccc}
a+b & \text{を } m \text{ で割ったあまり} & = & r+r' \text{ を } m \text{ で割ったあまり} \\
a-b & \text{を } m \text{ で割ったあまり} & = & r-r' \text{ を } m \text{ で割ったあまり} \\
ab & \text{を } m \text{ で割ったあまり} & = & rr' \text{ を } m \text{ で割ったあまり} \\
a^k & \text{を } m \text{ で割ったあまり} & = & r^k \text{ を } m \text{ で割ったあまり}
\end{array}
$$

1 以下の問いに答えよ．【倍数の判定】

(1) 百の位が 3, 十の位が 8 である 4 桁の自然数 A がある．A が 5 の倍数であり，3 の倍数であるとき，A を求めよ．

(2) ある 2 桁の自然数 B を 9 倍して 72 を足すと，百の位が 6，一の位が 5 であるとき，B を求めよ．

(1) Aが5の倍数

i.e. 1の位は 0 or 5

i) 1の位が 0のとき.

$\square 380$

これが3の倍数になるには,

$\square$は 1, 4, 7 のいずれか.

ii) 1の位が5のとき

$\square 385$

これが3の倍数になるには,

$\square$は 2, 5, 8 のいずれか.

以上より Aは.

1380, 4380, 7380,

2385, 5385, 8385

(2) $B = 10a + b$ とおく.

9倍して72をたす

$9B+7 = 90a + 9b + 72$

$= 90a + 70 + 9b + 2.$

$= (9a+7)\cdot 10 + 9b + 2.$

1の位が5より.

$b = 7.$

$\therefore 9B+7 = (9a+7)\cdot 10 + 63 + 2.$

$= (9a+7)\cdot 10 + 60 + 5$

$= (9a+13)\cdot 10 + 5$

百の位が6より.

$a = 6$

このとき, $9B+7 = (54+13)\cdot 10 + 5 = 675$ ok.

$\therefore B = 6\cdot 10 + 7$

$= 67$

2 以下の問いに答えよ．【$\sqrt{n}$ が自然数となる n】

(1) $\sqrt{378n}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ．

(2) $\sqrt{n^2+12n}$ が自然数 m になるような自然数 m と n の組み合わせを求めよ．

(1) $\sqrt{378} = \sqrt{3\cdot 3\cdot 2\cdot 21}$

$= 3\sqrt{42}.$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 378 \\ 3 & 189 \\ 3 & 63 \\ & 21 \end{array}$$

$\therefore \sqrt{378n}$ が自然数になるための

最小の自然数nは

$n = 42$

(2) $\sqrt{n^2+12n}$ が自然数

i.e. n^2+12n が平方数.

$n^2+12n = m^2$ をみたせばよい.

$(n+6)^2 - 36 = m^2$

$(n+6)^2 = m^2 + 36.$

$(n+6)^2 - m^2 = 36$

$(n+6-m)(n+6+m) = 36$

$n+6-m$ < $n+6+m$		n	m
1	36	×	×
2	18	4	8
3	12	×	×
4	9	×	×

$(n, m) = (4, 8)$

3 以下の問いに答えよ．【最小公倍数から自然数決定】

(1) 条件「n と 16 の最小公倍数が 144」を満たす自然数 n を全て求めよ．

(2) 条件「n と 45 と 60 の最小公倍数が 360」を満たす自然数 n を全て求めよ．

(1)

$144 = 12^2$

$= (3\cdot 4)^2 = 16\times 3^2$

よって nと16の最小公倍数が144を

みたす自然数は，

$9\times 2^0,\ 9\times 2^1,\ 9\times 2^2,\ 9\times 2^3,\ 9\times 2^4$

i.e. 9, 18, 36, 72, 144 //

(2)

$45 = 3^2\times 5$

$60 = 4\cdot 15$

$= 2^2\times 3\times 5$

$360 = 4\cdot 9\cdot 10$

$= 2^3\cdot 3^2\cdot 5$

よって条件をみたすnは，

$2^3\cdot 3^0\cdot 5^0,\ 2^3\cdot 3^0\cdot 5^1$

$2^3\cdot 3^1\cdot 5^0,\ 2^3\cdot 3^1\cdot 5^1$

$2^3\cdot 3^2\cdot 5^0,\ 2^3\cdot 3^2\cdot 5^1$

∴ 8, 40, 24, 120, 72, 360 //

4 1 から 10 までの 10 個の自然数の積 $N = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 10$ について，N を素因数分解したとき，次の問いに答えよ．【末尾に並ぶ 0 の個数】

(1) 素因数 2 の個数を求めよ．

(2) 素因数 5 の個数を求めよ．

(3) N を計算すると，末尾には 0 は連続して何個並ぶか．

$N = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10$

$= 2\cdot 3\cdot 2^2\cdot 5\cdot 2\cdot 3\cdot 7\cdot 2^3\cdot 3^2\cdot 2\cdot 5$

$= 2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$

(1) 8コ

(2) 2コ

(3) 0は，10が何回かけてあるか．

i.e. (1)(2)より 10は2回分

i.e. 末尾に0は2コ続いて並ぶ。

5 整数 a は, 7 で割ると 3 あまり, 整数 b は 7 で割ると 6 余る. このとき, $a+b, a-b, ab$ を 7 で割った余りをそれぞれ求めよ. 【和・差・積のあまり】

以下、法を7とする.

$a \equiv 3$, $b \equiv 6$ より

$a+b \equiv 3+6$

$= 9 \equiv \underline{2}$ //

$a-b \equiv 3-6$

$= -3 \equiv \underline{4}$ //

$ab \equiv 3 \cdot 6$

$= 18$

$\equiv \underline{4}$ //

6 各問いに答えよ. 【a^k を m で割ったあまり】

(1) 7^{50} を 6 で割ったあまりを求めよ.

(2) 3^{30} を 8 で割ったあまりを求めよ.

(3) 5^{100} を 3 で割ったあまりを求めよ.

(1) $7 \equiv 1 \pmod 6$ より

$7^{50} \equiv 1^{50}$

$= \underline{1 \pmod 6}$ //

(2) $3^2 = 9 \equiv 1 \pmod 8$ より

$3^{30} = (3^2)^{15}$

$= 9^{15}$

$\equiv 1^{15} \pmod 8$

$= \underline{1}$ //

(3) $5 \equiv 2 \pmod 3$

$5^2 \equiv 4$

$\equiv 1 \pmod 3$

$\therefore 5^{100} = (5^2)^{50}$

$\equiv 1^{50} \pmod 3$

$= \underline{1}$ //

- ユークリッドの互除法

① 割り算と最大公約数の関係

自然数 a, b に対し，a を b で割った余りを r とすると，以下が成立．

$$gcd(a, b) = gcd(r, b)$$

② ユークリッドの互除法

①のことから，整数 a, b の最大公約数を求めるには，以下の手順を繰り返せば良い．

[1] a を b で割った余りを r とする．

[2] $r = 0$ ならば　$gcd(a, b) = b$

$r > 0$ ならば　a を b で，b を r で置き換えて [1] に戻る．

- 1 次不定方程式

① 互いに素である整数の性質

2 つの整数 a, b が互いに素であるとき，整数 c について，$ax + by = c$ を満たす整数 x, y が存在する．

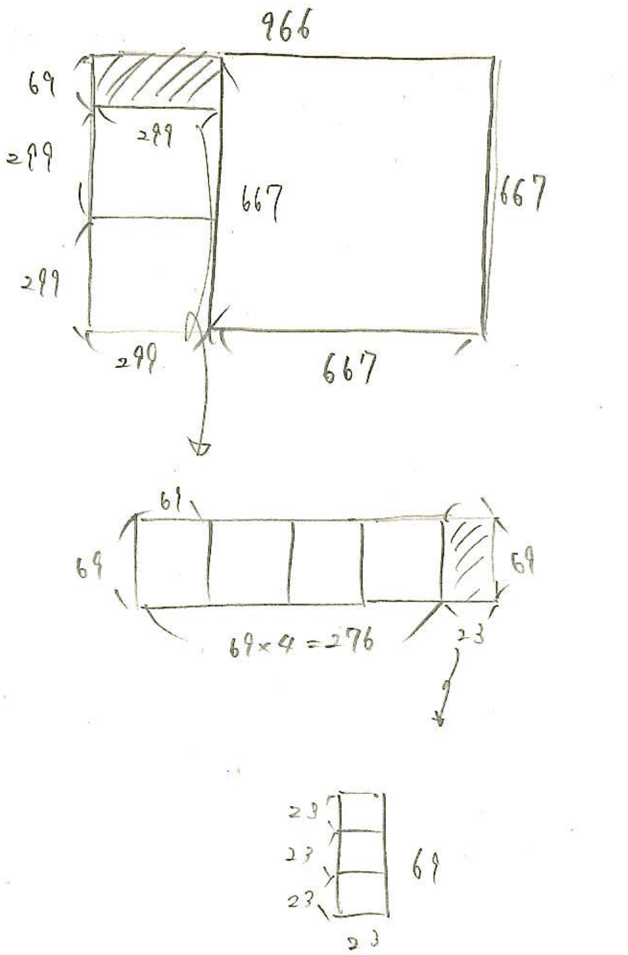
② 1 次不定方程式と整数解

$a, b, c \in \mathbb{Z}$ とする $(a, b \neq 0)$．x, y の 1 次方程式 $ax + by = c$ を成り立たせる整数 x, y の組を，この方程式の整数解という．この方程式の整数解を求めることを 1 次不定方程式を解くという．

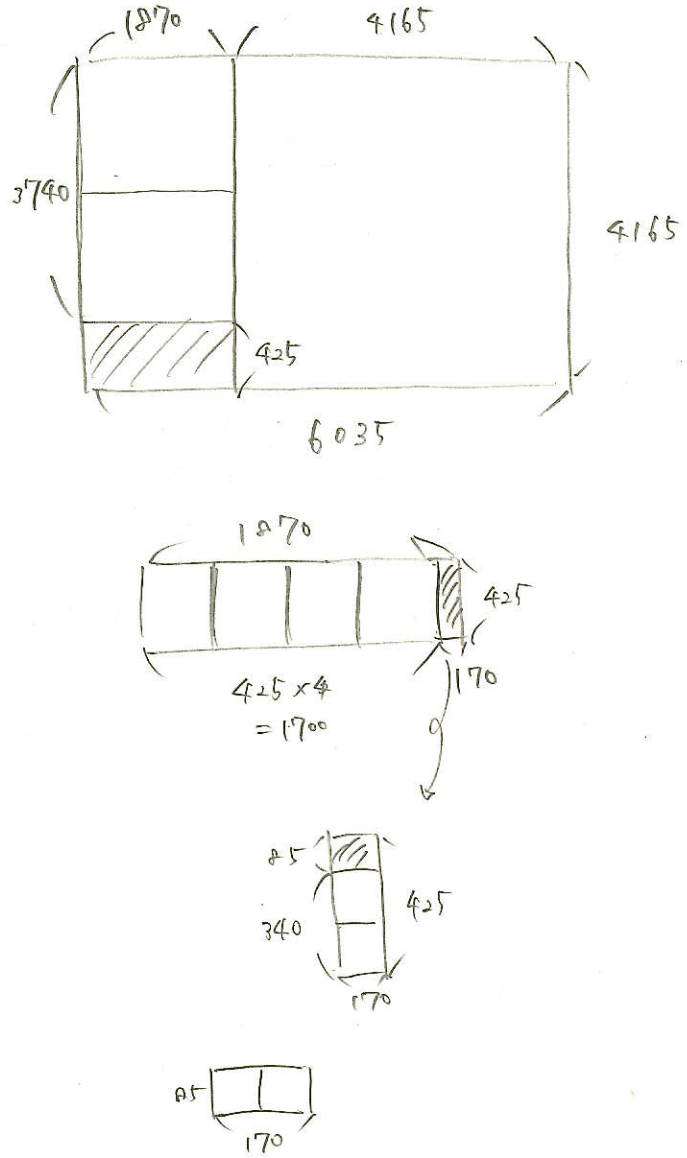
7 以下の 2 数の最大公約数を求めよ．【最大公約数】

(1) 667, 966

(2) 4165, 6035



最大公約数は 23



最大公約数は 85

8 次の等式を満たす整数 x, y の組を１つ求めよ．【1 次不定方程式の整数解】

(1) $11x + 19y = 1$

(2) $11x + 19y = 5$

(1)

$x=7,\ y=-4$ とおくと

$(\text{左辺}) = 11 \cdot 7 + 19 \cdot (-4)$

$= 77 - 76 = 1$

$\therefore\ (x, y) = (7, -4)$ //

(2) (1)より

$11 \cdot 7 + 19 \cdot (-4) = 1$

各辺5倍

$11 \cdot 35 + 19 \cdot (-20) = 5$

$(x, y) = (35, -20)$ //

9 次の等式を満たす整数 x, y の組を全すべて求めよ．【1 次不定方程式の整数解】

(1) $5x + 7y = 1$

(2) $35x - 29y = 3$

(1) 整数解の1つは

$x=3,\ y=-2$ である。

$$\begin{array}{rl} & 5x + 7y = 1 \\ -) & 5 \cdot 3 + 7 \cdot (-2) = 1 \\ \hline & 5(x-3) + 7(y+2) = 0 \end{array}$$

$5(x-3) = 7(-y-2)$

よって

$x-3 = 7k,\ -y-2 = 5k\ (k \in \mathbb{Z})$

と書ける。

$\therefore\ x = 7k+3,\ y = -5k-2\ (k \in \mathbb{Z})$ //

(2) $35 \cdot 5 - 29 \cdot 6 = 175 - 174 = 1$

両を3倍して

$35 \cdot 15 - 29 \cdot 18 = 3$

i.e. 整数解の1つは

$(x, y) = (15, 18)$

$$\begin{array}{rl} & 35x - 29y = 3 \\ -) & 35 \cdot 15 - 29 \cdot 18 = 3 \\ \hline & 35 \cdot (x-15) - 29 \cdot (y-18) = 0 \end{array}$$

$35 \cdot (x-15) = 29 \cdot (y-18)$

よって

$x - 15 = 29k,\ y - 18 = 35k\ \ k \in \mathbb{Z}$

と書ける。

$\therefore\ x = 29k + 15,\ y = 35k + 18\ (k \in \mathbb{Z})$ //

入試問題に挑戦

整数を解くPoint!!

① 積の形を作る ← (文字列)·(文字列) = 数.

② 絞り込み ← 不等式.

③ 余りに注目. ← 合同式 (mod)

☆ 実験を行う.

1 $2m^2-n^2-mn-m+n=18$ を満たす自然数 m, n を求めよ. 〔愛媛大〕

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 2m^2-(n+1)m-n^2+n \\
&= 2m^2-(n+1)m-n(n-1) \\
&= \{2m+(n-1)\}(m-n) \\
&= (2m+n-1)(m-n) = 18
\end{aligned}
$$

$m, n \in \mathbb{N}$ より

$2m+n-1>0$

$\therefore\ m-n>0$

i.e. $m>n$ である。

よって $(2m+n-1,\ m-n)$ の候補は,

$(18, 1), (9, 2), (6, 3)$

$(-1, -18), (-2, -9), (-3, -6)$

$(2m+n-1,\ m-n)$	(m, n)	
$(18, 1)$	$(\frac{20}{3},\ )$	×
$(9, 2)$	$(4, 2)$	ok
$(6, 3)$	$(\frac{10}{3},\ )$	×
$(-1, -18)$	$(-6,\ )$	×
$(-2, -9)$	$(-\frac{10}{3},\ )$	×
$(-3, -6)$	$(-\frac{8}{3},\ )$	×

表より 求める m, n は,

$m=4,\ n=2$ //

「積の形!!」を作る。

→ 絞り込み。

2 4個の整数 $n+1, n^3+3, n^5+5, n^7+7$ がすべて~~整数~~素数となるような正の整数 n は存在しない．これを証明せよ．

[大阪大]

〜実験〜

n	1	2	3	4	5
$n+1$	2	3	4 ×	5	6 ×
n^3+3	4 ×	11	30 ×	67	
n^5+5	6 ×	37	248 ×	1029	
n^7+7	8 ×	135 ×	2194		

<Ans>

以下．法を3として考える．

	$n \equiv 1$	$n \equiv 2$	$n \equiv 0$
$n+1$	2	$3 \equiv 0$	$0+1 \equiv 1$
n^3+3	$4 \equiv 1$	$11 \equiv 2$	$0+3 \equiv 0$
n^5+5	$6 \equiv 0$	$7 \equiv 1$	$5 \equiv 2$
n^7+7	$8 \equiv 2$	$10 \equiv 1$	$7 \equiv 1$

上の表より．

$n \equiv 1$ のときは n^5+5 が．

$n \equiv 2$ のときは $n+1$ が

$n \equiv 0$ のときは n^3+3 が 必ず3の倍数．

また．$n=1, 2, 3$ のときも

実験から．すべて素数になることはない。

よって．4コの整数

$n+1$．n^3+3．n^5+5．n^7+7 が

すべて素数になる 正の自然数 n は存在しない 証

実験がステア!!

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 2つの自然数の組 (a,b) は, 条件 $a<b$ かつ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{4}$ を満たす. このような組 (a,b) のうち, b の最も小さいものをすべて求めよ.

(2) 3つの自然数の組 (a,b,c) は, 条件 $a<b<c$ かつ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{3}$ を満たす. このような組 (a,b,c) のうち, c の最も小さいものをすべて求めよ.

[一橋大]

(1)

$a<b$ より $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ なので

$$\underline{\frac{1}{b}+\frac{1}{b}}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ \underline{<\frac{1}{4}}$$

下線部より

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{b}<\frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{b}<\frac{1}{4}$$

$$b>8$$

∴ b は9以上.

$b=9$ のとき.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{9}<\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{a}<\frac{1}{4}-\frac{1}{9}=\frac{5}{36}$$

$$a>\frac{36}{5}=7.2$$

$$7.2<a<b=9$$

∴ $a=8$ のみ.

よって求める a,b の組は

$\underline{(a,b)=(8,9)}$ //

(2)

$a<b<c$ より $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$ なので

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{c}<\frac{1}{3}$$

$$c>9$$

c は10以上.

$c=10$ のとき.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{10}<\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{7}{30}$$

(1)と同様に,

$$\frac{2}{b}<\frac{7}{30}$$

$$b>\frac{60}{7}=8.\cdots$$

∴ b は9以上.

$c=10$ より. $b=9$ として

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}<\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{a}<\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{9}=\frac{90-27-30}{270}=\frac{33}{270}$$

$$a>\frac{270}{33}=8.\cdots$$

a は9以上. 不適.

$c=11$ のとき.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{11}<\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{8}{33}$$

(1)と同様に.

$$\frac{2}{b}<\frac{8}{33}$$

$$b>\frac{33}{4}=8.25$$

b は9以上

(裏面へ)

(続)

$b=9$ のとき

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}<\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{a}<\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$$

$$=\frac{33-11-9}{99}=\frac{13}{99}$$

$$a>\frac{99}{13}=7.\cdots$$

$\therefore$ a は 8 以上.

$a<b<c$ より

$$(a,b,c)=(8,9,10)$$

$b=10$ のとき

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}<\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{a}<\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}$$

$$=\frac{110-33-30}{330}$$

$$=\frac{47}{330}$$

$$a>\frac{330}{47}=7.\cdots$$

a は 8 以上.

$a<b<c$ より

$$(a,b,c)=(8,10,11),\ (9,10,11)$$

(1)で使った絞り込みを(2)でも活用!!
分数計算のミスがないように注意!!

以上より 求める組は

$$(a,b,c)=(8,9,10),\ (8,10,11),\ (9,10,11)$$

4 自然数 n の関数 $f(n), g(n)$ を，

$$f(n) = n \text{ を 7 で割ったあまり，}\quad g(n) = 3f\left(\sum_{k=1}^{7} k^n\right)$$

によって定める．

(1) すべての自然数 n に対して，$f(n) = f(n^7)$ を示せ．

(2) あなたの好きな自然数 n を決めて $g(n)$ を求めよ．その $g(n)$ の値をこの設問におけるあなたの得点とする．

[京都大]

以下，mod 7で考える。

(1) 〈証明〉．

・$n \equiv 0$ のとき．

$n \equiv 0$．

$n^7 \equiv 0^7 \equiv 0$．

・$n \equiv 1$ のとき．

$n \equiv 1$．

$n^7 \equiv 1 \equiv 1$．

・$n \equiv 2$ のとき

$n \equiv 2$．

$n^7 \equiv 2^7 \equiv 8^2 \cdot 2 \equiv 1^2 \cdot 2 \equiv 2$．

・$n \equiv 3$ のとき

$n \equiv 3$．

$n^7 \equiv 3^7 \equiv 9^3 \cdot 3 \equiv 2^3 \cdot 3 \equiv 8 \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3$．

・$n \equiv 6$ のとき

$n \equiv 6$．

$n^7 \equiv (-1)^7 \equiv -1 \equiv 6$．

・$n \equiv 5$ のとき

$n \equiv 5$．

$n^7 \equiv (-2)^7 \equiv 8 \cdot (-2) \equiv -2 \equiv 5$

$n \equiv 4$ のとき

$n \equiv 4$

$n^7 \equiv (-3)^7 \equiv 9^3 \cdot (-3) \equiv 2^3 \cdot (-3) \equiv 8 \cdot (-3) \equiv 1 \cdot (-3) \equiv 4$

以上より．

$f(n) = f(n^7)$

(2) まず

$\underset{\sim\sim\sim}{f\left(\sum_{k=1}^{7} k^n\right)}$ について考える。

$\sim = f(1^n + 2^n + \cdots + 6^n + 7^n)$．

$= f(f(1^n) + f(2^n) + \cdots + f(6^n) + f(7^n))$

$= f(f(1^n) + \cdots + f(6^n))$．　— (*)

ここで，

・n が奇数のとき

$1^n \equiv -(-1)^n \equiv -6^n$．

$\therefore f(1^n) = -f(6^n)$．

同様に．$f(2^n) = -f(5^n)$．

$f(3^n) = -f(4^n)$．

よって．(*) $= 0$．

・n が偶数のとき．

$1^n \equiv (-1)^n \equiv 6^n$．

$\therefore f(1^n) = f(6^n)$．

同様にして．$f(2^n) = f(5^n)$

$f(3^n) = f(4^n)$

$\therefore$ (*) $= f(2(f(1^n) + f(2^n) + f(3^n)))$　— (**)

(1)の結果から．

$1 \leqq n \leqq 6$ で考えればよいので．

$n = 2$ のとき

(**) $= f(2 \cdot (1 + 4 + 9)) = f(2 \cdot 14) = 0$．

$n = 4$ のとき

(**) $= f(2(1 + 16 + 81)) = f(2 \cdot 98) = 0$．

$n = 6$ のとき

(**) $= f(2(1 + 2^6 + 3^6)) = f(2(1 + 1 + 2^3))$

$= f(2(1+1+1)) = 6$

以上の結果から、

$n=6$のときの得点

$g(6)=3\cdot 6=18$点を私は選択する。

どこまで絞り込みか？

↳ 本番であれば、時間配分を考えて、

途中から力技にまかせるのも大せつ!!

5 p が素数であれば, どんな自然数 n についても $n^p - n$ は p で割り切れる. このことを n についての数学的帰納法で証明せよ.

[京都大]

＜証明＞.

(i) $n=1$ のとき.

$1^p - 1 = 1 - 1 = 0$ で,

0は どのような素数 p でもわりきれる。

(ii) $n=k$ のとき 成立を仮定.

i.e. $k^p - k \equiv 0 \pmod p$ とする.

$n=k+1$ のとき.

$$(k+1)^p - (k+1)$$

$$= \sum_{i=0}^{p} {}_pC_i \, k^{p-i} - (k+1)$$

$$= k^p + \sum_{i=1}^{p} {}_pC_i \, k^{p-i} - k - 1$$

$$= (k^p - k) + \sum_{i=1}^{p} {}_pC_i \, k^{p-i} - 1$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{p} {}_pC_i \, k^{p-i} - 1$$

$$= \sum_{i=1}^{p-1} {}_pC_i \, k^{p-i} + 1 - 1$$

$$= \sum_{i=1}^{p-1} {}_pC_i \, k^{p-i} \quad \text{—} (*)$$

さて.

$i \neq 0$, $i \neq p$ のとき

$${}_pC_i = \frac{p \cdot (p-1) \cdots (p-(i-1))}{i \cdot (i-1) \cdots 1}$$

は、分母の素因数に p は含まれない.

($\because$ $i < p$ かつ. p:素数)

$\therefore$ ${}_pC_i$ は p の倍数.

よって.

$\sum_{i=1}^{p-1} {}_pC_i \cdot k^{p-i}$ は p の倍数

i.e. $(*) \equiv 0 \pmod p$.

よって.

$(k+1)^p - (k+1)$ も p の倍数.

(i), (ii)より すべての自然数 n で

$n^p - n$ は p でわりきれる ∎

フェルマーの小定理の話!!

↳ n:自然数. p:素数. (ともに任意).

$n^p \equiv n \pmod p$. が成立.

入試問題が有名な定理につながることは多々ある。

二項定理!!

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i \, a^i b^{n-i}$$