1　複素数平面

1.1　複素数平面の考え方

複素数 $a+bi$ の実部を x 軸, 虚部を y 軸に対応させた平面を複素数平面という.

<u>例</u>

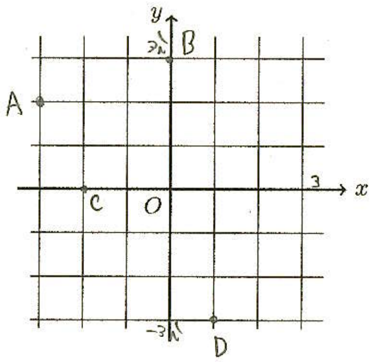
以下の複素数を複素平面上で表せ.

(1) $\mathrm{A}(-3+2i)$

(2) $\mathrm{B}(3i)$

(3) $\mathrm{C}(-2)$

(4) $\mathrm{D}(1-3i)$



<u>例</u>

以下の複素数を複素平面上で表せ.

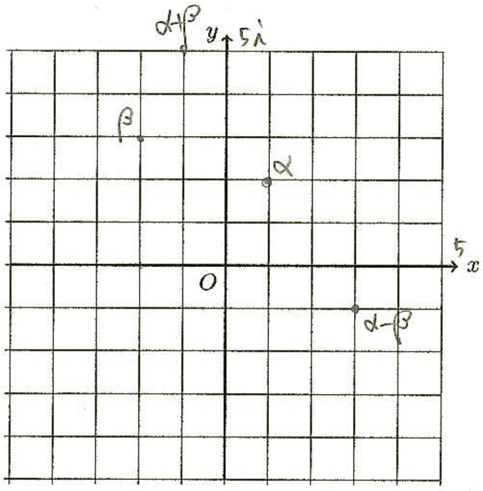
(1) $\alpha = 1+2i$

(2) $\beta = -2+3i$

(3) $\alpha+\beta$ $= -1+5i$

(4) $\alpha-\beta$ $= 3-i$

ベクトルの和・差と一致する。



<u>例</u>

以下の複素数を複素平面上で表せ.

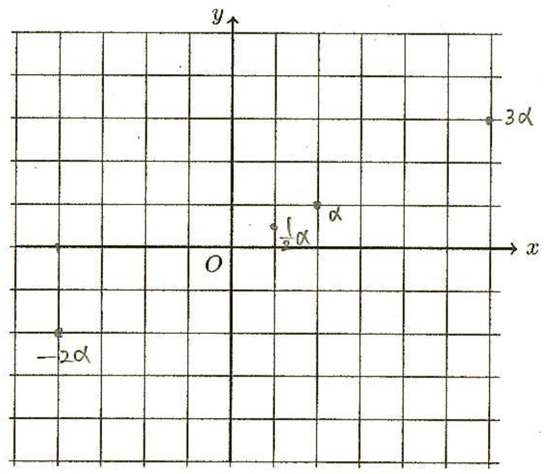
(1) $\alpha = 2+i$

(2) 3α $= 6+3i$

(3) -2α $= -4-2i$

(4) $\frac{1}{2}\alpha$ $= 1+\frac{1}{2}i$

定数倍は
すべて同一直線上.



<u>例</u>

$\alpha = 1+3i, \beta = x-9i$ とする. 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, と原点 O が一直線上にあるとき, 実数 x の値を求めよ.

A, B, O が同一直線上

$\Leftrightarrow$ $\alpha = k\beta$ $(k \in \mathbb{R})$

と書ける.

$k(1+3i) = x-9i$

実部・虚部を比較して

$\begin{cases} k = x \\ 3k = -9. \end{cases}$

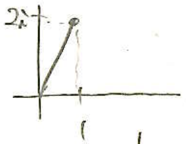
$k=-3.$ $\underline{x=-3}$

複素数 z について，複素数平面上での原点と点 $\mathrm{P}(z)$ の距離を，複素数 z の距離という．

例

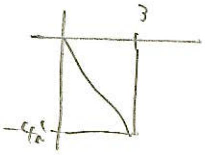
以下の複素数の絶対値を求めよ．

(1) $1+2i$



$|1+2i| = \sqrt{5}$ //

(2) $3-4i$



$|3-4i| = 5$ //

(3) $3i$

$|3i| = 3$ //

(4) -5

$|-5| = 5$ //

例

以下の 2 点間の距離を求めよ．

(1) $\mathrm{A}(1+2i)$, $\mathrm{B}(3+i)$

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}$$
$$= \sqrt{5}$$ //

(2) $\mathrm{A}(3-i)$, $\mathrm{B}(-2+i)$

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(-2-3)^2+(1+1)^2}$$
$$= \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$ //

虚部の符号を入れ替えたもの．

共役な複素数 $\cdots$ $z=a+bi$ に対し，$\overline{z} =$ $a-bi$

例

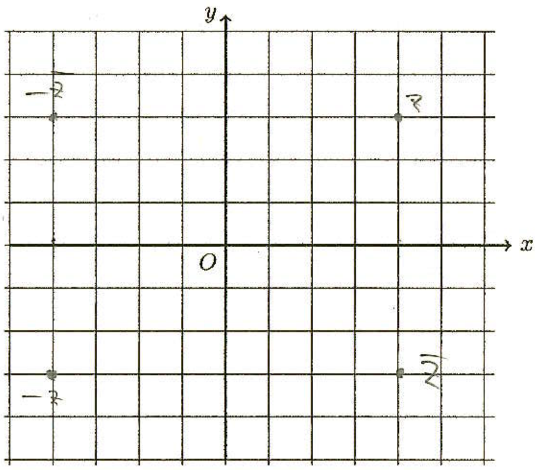
以下の複素数を複素平面上で表せ．

(1) $z=4+3i$

(2) $-z = -4-3i$　　zに対し，原点対称

(3) $\overline{z} = 4-3i$　　zに対し，x軸対称

(4) $-\overline{z} = -4+3i$　　zに対し，y軸対称



計算してみる

(1) $z+\overline{z} = (4+3i)+(4-3i)$
$= 8$

・必ず実数．

(2) $z\overline{z} = (4+3i)\cdot(4-3i)$
$= 16+9 = 25$

$$\boxed{|z|^2 = z\cdot\overline{z}}$$

共役な複素数の性質について考える.

$$\alpha = 3+2i, \quad \beta = -2+i$$

とする.

(1) $\overline{\alpha+\beta}$

$\alpha+\beta = 1+3i$

$\therefore\ \overline{\alpha+\beta} = \underline{1-3i}$

(2) $\overline{\alpha-\beta}$

$\alpha-\beta = (3+2i)-(-2+i)$

$= 5+i$

$\therefore\ \overline{\alpha-\beta} = \underline{5-i}$

(3) $\overline{\alpha\beta}$

$\alpha\beta = (3+2i)(-2+i)$

$= -6-4i+3i-2.$

$= -8-i$

$\therefore\ \overline{\alpha\beta} = \underline{-8+i}$

(4) $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}$

$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{3+2i}{-2+i} \times \dfrac{-2-i}{-2-i}$

$= \dfrac{-4-7i}{5}$

$\therefore\ \overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)} = \dfrac{-4+7i}{5}$

よって、$\bar{\alpha} = 3-2i$

$\bar{\beta} = -2-i.$

$\bar{\alpha}+\bar{\beta} = (3-2i)+(-2-i)$

$= \underline{1-3i}$

$\bar{\alpha}-\bar{\beta} = (3-2i)-(-2-i)$

$= \underline{5-i}$

$\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta} = (3-2i)\cdot(-2-i)$

$= -6+4i-3i-2$

$= \underline{-8+i.}$

$\dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} = \dfrac{3-2i}{-2-i} \times \dfrac{-2+i}{-2+i}$

$= \dfrac{-6+4i+3i+2}{4+1}$

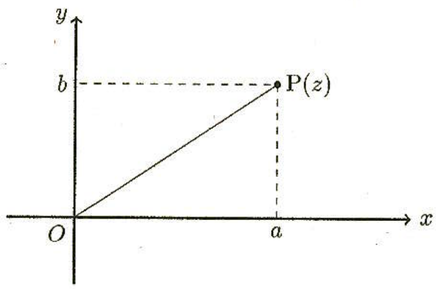
$= \underline{\dfrac{-4+7i}{5}}$

性質

$$\boxed{\begin{array}{ll} \overline{\alpha+\beta} = \bar{\alpha}+\bar{\beta}, & \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\cdot\bar{\beta} \\ \overline{\alpha-\beta} = \bar{\alpha}-\bar{\beta}, & \overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)} = \dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \end{array}}$$

2 極形式

2.1 極形式とは



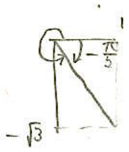
点の座標を、OPの長さと、OPとx軸のなす角θを用いて表したもの。

$$z = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

例 1

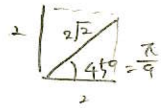
以下の複素数を極形式で表せ．ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(1) $1 - \sqrt{3}i$



$$= \underline{2\left(\cos\tfrac{5}{3}\pi + i\sin\tfrac{5}{3}\pi\right)}$$

(2) $2 + 2i$

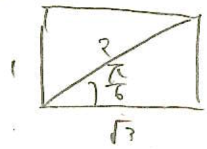


$$= \underline{2\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right)}$$

例 2

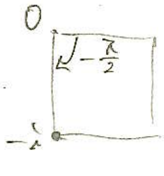
以下の複素数を極形式で表せ．ただし，偏角 θ の範囲は $-\pi < \theta \leqq \pi$ とする．

(1) $\sqrt{3} + i$



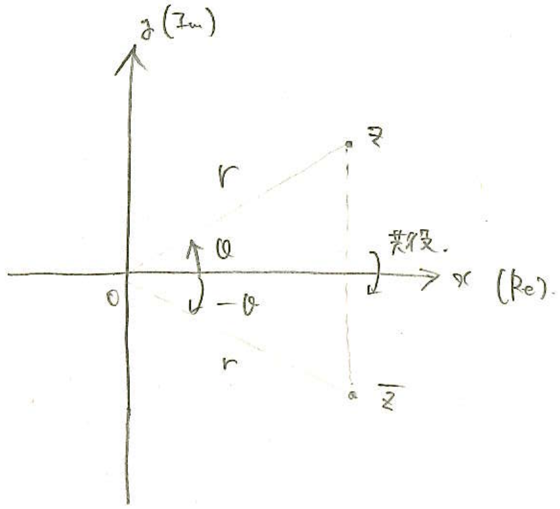
$$= \underline{2\left(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}\right)}.$$

(2) $-i$

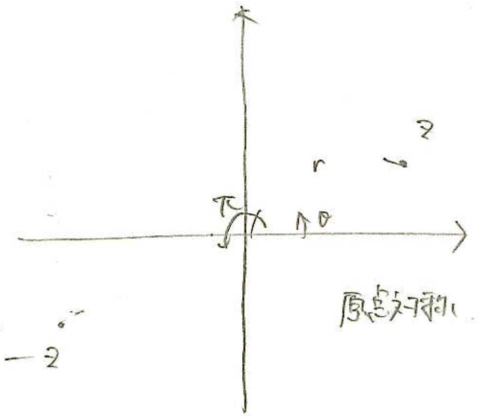


$$= \underline{\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)}$$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に対し, $\overline{z} = r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$ と表せる．このことを, 図を描いて確かめてみよう．



$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に対し, $-z = r\{\cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)\}$ と表せる．このことを, 図を描いて確かめてみよう．



2.2　極形式の複素数の積と商

具体例

$\alpha = 1+\sqrt{3}i, \beta = -\sqrt{3}+i$ のとき, 以下の値を求めよ.

(1) $\alpha\beta$

$= (1+\sqrt{3}i)\cdot(-\sqrt{3}+i)$

$= -\sqrt{3} - 3i + i - \sqrt{3}$

$= \underline{-2\sqrt{3} - 2i}$ //

(2) $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}+i} \times \dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}$

$= \dfrac{4i}{-4} = \underline{-i}$ //

図で見る積と商

α, β を極形式で表すと,

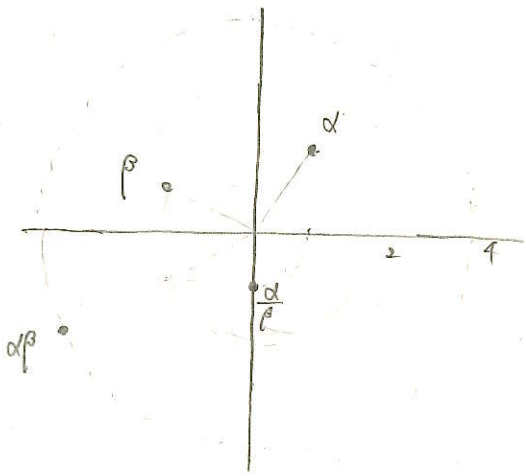
$\alpha = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\beta = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$

$\alpha\beta = -2\sqrt{3} - 2i$

$= 4\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$

$\frac{\alpha}{\beta} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$



角度, 半径にそれぞれ注目すると…

一般化

積と商

$\alpha = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \beta = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ のとき,

$$\alpha\beta = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

〈証明〉

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\ &= r_1 r_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right)\\ &= r_1 r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}\times\frac{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}\\ &= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 + \sin\theta_1\cdot\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\\ &= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right).\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Point!!

複素数の積・商は 回転と拡大・縮小!!

問題1 複素数 $\alpha = 1+i, \beta = 1+\sqrt{3}i$ について, $\alpha\beta$ を求めよ. また, この結果を用いて, $\cos\frac{7}{12}\pi, \sin\frac{7}{12}\pi$ の値を求めよ.

$$\alpha = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\beta = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right)\\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi\right)\end{aligned}$$

また. $(1+i)(1+\sqrt{3}i) = 1-\sqrt{3} + (1+\sqrt{3})i$.

実部, 虚部で比較して,

$$2\sqrt{2}\cos\frac{7}{12}\pi = 1-\sqrt{3}.$$

$$2\sqrt{2}\sin\frac{7}{12}\pi = 1+\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \cos\frac{7}{12}\pi = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin\frac{7}{12}\pi = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

問題2

以下の複素数 α, β について, $\alpha\beta, \dfrac{\alpha}{\beta}$ を求めよ. ただし, 偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする.

$$\alpha = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \beta = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{2}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

2.3　複素数平面上での積と商

$2(\cos\frac{1}{4}\pi + i\sin\frac{1}{4}\pi)z$ は, 点 z を, 原点を中心として $\frac{1}{4}\pi$ だけ回転し, 原点からの距離を 2 倍した点である.

拡大・縮小　　回転

以下の点は, 複素数 z をどのように移動した点か.

(1) $(\sqrt{3}+i)z$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)z$

zを, 原点中心に $\frac{\pi}{6}$ 回転し, 原点からのきょりを2倍した点.

(2) $(2-2i)z$

$2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)z$

zを、原点中心に $-\frac{\pi}{4}$ 回転し, 原点からのきょりを $2\sqrt{2}$倍した点.

(3) $3iz$

$= 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)z$

zを 原点中心に $\frac{\pi}{2}$ 回転し, 原点からのきょりを3倍した点.

例題

$z = 2 + 3i$ とする. 点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数 w を求めよ.

$$w = z \times \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= (2+3i)\cdot\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}i\right)$$
$$= 1 + \frac{3}{2}i + 2\sqrt{3}i - 3\sqrt{3}$$
$$= (1-3\sqrt{3}) + \left(\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right)i$$

問題

例題と同じ z に対し, 点 z を原点を中心として以下の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ.

(1) $\frac{1}{4}\pi$

$$z\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= (2+3i)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i + \frac{2}{\sqrt{2}}i - \frac{3}{\sqrt{2}}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}i$$

(2) $-\frac{2}{3}\pi$

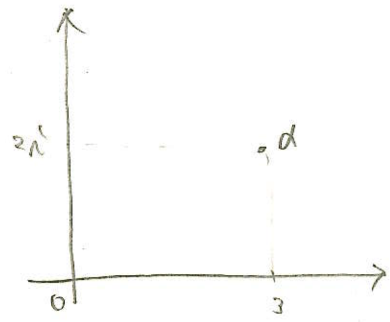
$$z\cdot\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)$$
$$= (2+3i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$= -1 - \frac{3}{2}i - \sqrt{3}i + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$= \left(-1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)i$$

(3) $\frac{1}{2}\pi$

$$z\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= (2+3i)\cdot i$$
$$= -3 + 2i$$

問題

$\alpha = 3 + 2i$ とする．複素数平面上の 3 点 $0, \alpha, \beta$ を頂点とする三角形が正三角形であるとき，β の値を求めよ．



3点 $0, \alpha, \beta$ を頂点とする三角形が

正三角形になるためには，

β が α を，原点中心に $\pm 60^\circ$ 回転させたもの

であればよい。

よって，

$$\beta = \left(\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right)\cdot\alpha$$

$$= \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot(3+2i)$$

$$= \left(\frac{3}{2} \mp \sqrt{3}\right) + \left(1 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$$

（複号同順）

3　ド・モアブルの定理

3.1　復習

以下を計算せよ．

(1) $\left(\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi\right)^2$

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ //

(2) $\left(\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi\right)^3$

$= i$ //

(3) $\left(\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi\right)^4$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ //

(4) $\left(\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi\right)^6$

$= -1$ //

3.2　定理

ド・モアブルの定理

n が整数のとき，

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

問題

以下の式を計算せよ．

(1) $(1+\sqrt{3}i)^4$

$= \left(2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^4$

$= 2^4 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^4$

$= 16\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = -8 - 8\sqrt{3}i$ //

(2) $(1-i)^5$

$= \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^5$

$= \sqrt{2}^5 \cdot \left(\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{4}\pi\right)\right)$

$= 4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -4+4i$ //

(3) $(1-\sqrt{3}i)^6$

$= \left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^6$

$= 2^6 \cdot \left(\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)\right)$

$= 64$ //

(4) $(\sqrt{3}+i)^{-4}$

$= \left(2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^{-4}$

$= 2^{-4} \cdot \left(\cos\left(-\frac{4}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{4}{6}\pi\right)\right)$

$= \frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= -\frac{1}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}i$ //

3.3 n 乗根

<u>復習</u>

1の3乗根を求めよ.

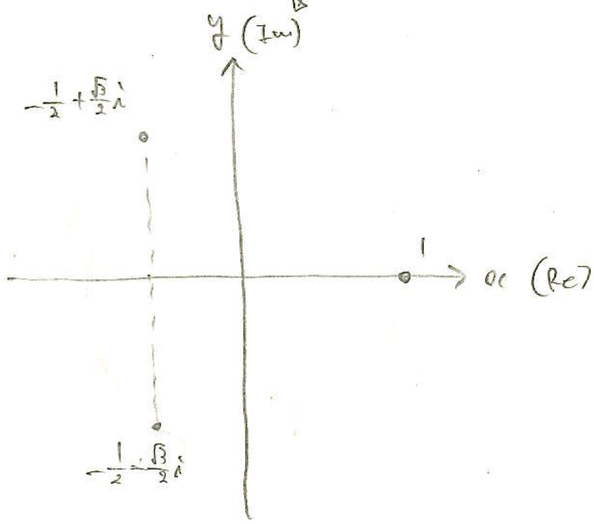
$$x^3 = 1.$$

$$x^3 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$x = 1,\ \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

複素平面上で表すと…



1の n 乗根

解を複素平面上に表すと、正n角形となる。

<u>問題</u>

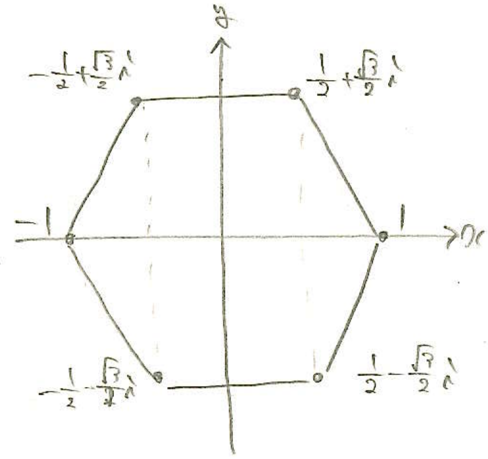
(1) 1の6乗根を求めよ.

$$x^6 = 1.$$

$$x^6 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+1) = 0.$$

$x=1$ が解の1つ.

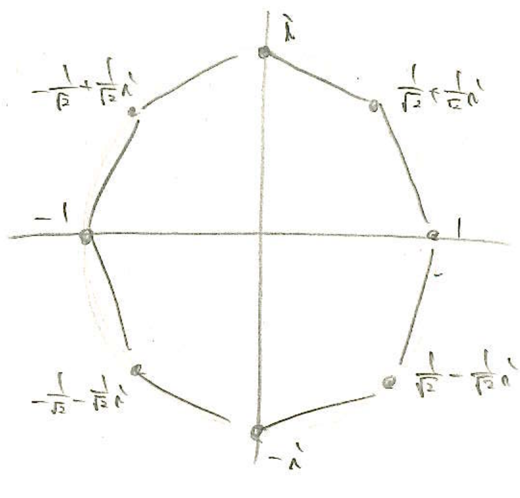


∴ 1の6乗根は $\pm 1,\ \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ //

(2) 1の8乗根を求めよ.

$$x^8 = 1$$

$x=1$ は解の1つ.



∴ 1の8乗根は

$\pm 1,\ \pm i,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i,\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$ //

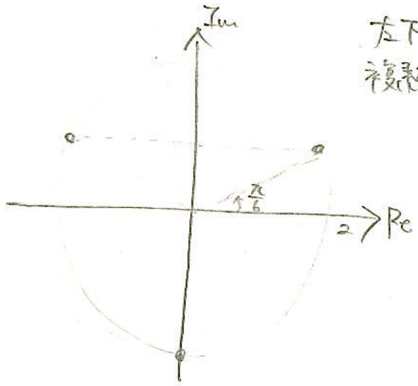
「半径」と「回転角」を分けて考える!

問題

(1) 方程式 $z^3 = 8i$ を解け

$$z^3 = 8i$$
$$= 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 2^3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3$$

解の1つは $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.



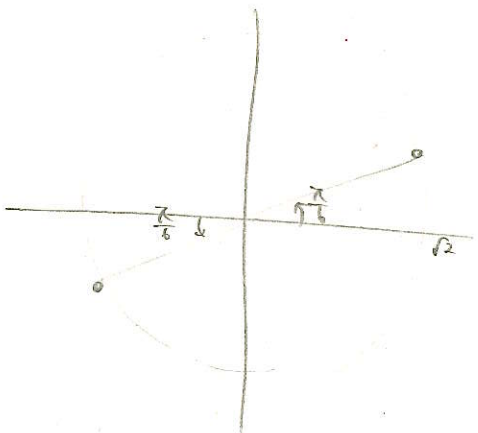
左下図の点で表す
複素数が求める解で.

$$z = -i,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

(2) 方程式 $z^2 = 1 + \sqrt{3}i$ を解け

$$z^2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \sqrt{2}^2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2$$

解の1つは
$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

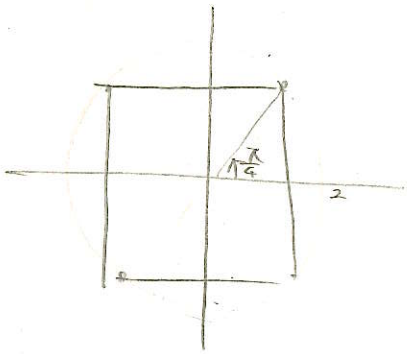


$$z = \frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

(3) 方程式 $z^4 = -16$ を解け

$$z^4 = -16$$
$$= 2^4\left(\cos\pi + i\sin\pi\right).$$
$$= 2^4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^4$$

解の1つは $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

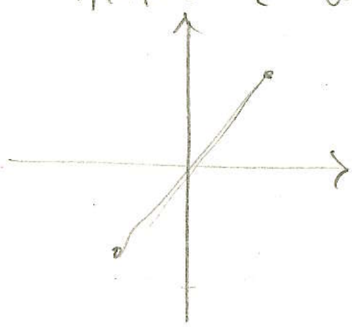


$$z = \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i,\ -\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$$

(4) 方程式 $z^2 = i$ を解け

$$z^2 = i$$
$$= \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^2$$

解の1つは $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$.



$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i,\ -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

ベクトルと同じ!!

4　複素数と図形

4.1　いろいろな図形

$\alpha = 2+3i, \beta = 4-i, \gamma = 3+i$ とする．A(α), B(β), C(γ) とする．

(1) 線分 AB の中点を表す複素数を求めよ．

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{(2+3i)+(4-i)}{2}$$

$$= 3+i$$

(2) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点を表す複素数を求めよ．

$$\frac{\alpha+2\beta}{2+1} = \frac{(2+3i)+2(4-i)}{3}$$

$$= \frac{10+i}{3}$$

(3) 線分 AB を 2 : 1 に外分する点を表す複素数を求めよ．

$$\frac{-(2+3i)+2(4-i)}{2-1} = 6-5i$$

(4) △ABC の重心を表す複素数を求めよ．

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \frac{(2+3i)+(4-i)+(3+i)}{3}$$

$$= 3+i$$

(5) $|z-\alpha| = 1$ を満たす z 全体の集合が表す図形は何か．

中心 A(α) 半径1の円．

(6) $|z-\alpha| = |z-\beta|$ を満たす z 全体の集合が表す図形は何か．

線分ABの垂直二等分線

4.2　問題

以下の方程式を満たす点 z 全体の集合は，どのような図形か.

(1) $|z-i|=2$

中心 点i. 半径2の円.

(2) $|z-3-i|=3$

$\Leftrightarrow \left|z-(3+i)\right|=3$

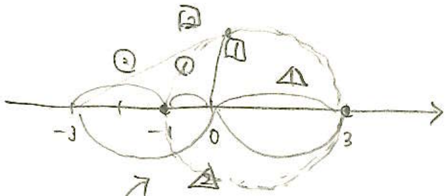
中心 点$3+i$. 半径3の円

(3) $|z+4|=|z-2i|$

$\Leftrightarrow \left|z-(-4)\right|=\left|z-2i\right|$

2点 -4, $2i$ の 垂直

4.3　アポロニウスの円



例題

以下の方程式を満たす点 z 全体の集合は，どのような図形か.

$$2|z|=|z+3|$$

「原点からのキョリ : −3からのキョリ」

= 1 : 2.

円になる

「アポロニウスの円」

という。

<Ans>

両辺を2乗して

$4|z|^2=|z+3|^2$

$4z\bar{z}=(z+3)(\bar{z}+3)$

$4z\bar{z}=z\bar{z}+3z+3\bar{z}+9$

$z\bar{z}-z-\bar{z}=3$

$(z-1)(\bar{z}-1)-1=3$

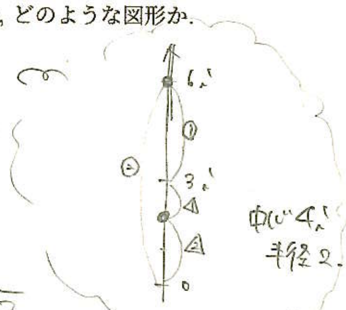
$|z-1|=2$

中心 点1, 半径2の円.

問題

以下の方程式を満たす点 z 全体の集合は，どのような図形か.

$$2|z-3i|=|z|$$



<Ans>

両辺を2乗して

$4(z-3i)(\bar{z}+3i)=z\bar{z}$

$4(z\bar{z}+3iz-3i\bar{z}+9)=z\bar{z}$

$z\bar{z}+4iz-4i\bar{z}+12=0$

$|z-4i|^2=4$

$|z-4i|=2$

中心 点$4i$, 半径2の円.

4.4 平行移動した円

例題

$w = iz + 2$ とする．点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，点 w はどのような図形を描くか．

〈Ans〉

条件より $|z| = 1$.

$z \cdot \bar{z} = 1$ である.

よって,

$w = iz + 2$. より

$w - 2 = iz$.

$$z = \frac{w-2}{i}$$

$$= (w-2)\cdot(-i)$$

$z \cdot \bar{z} = 1$ より

$(w-2)\cdot(-i)\cdot(\bar{w}-2)\cdot i = 1$.

$(w-2)(\bar{w}-2) = 1$.

$\therefore\ |w-2| = 1$.

wは 中心が点2, 半径1の円 //

問題

$w = i(z + 2)$ とする．点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，点 w はどのような図形を描くか．

〈Ans〉

条件より $|z| = 1$

$\therefore\ z \cdot \bar{z} = 1$.

よって

$w = i(z+2)$ より

$$z + 2 = \frac{w}{i}$$

$$= -wi$$

$z = -wi - 2$.

$\bar{z} = \bar{w}i - 2$.

$z \cdot \bar{z} = 1$ より

$(-wi-2)(\bar{w}i-2) = 1$

$w\bar{w} - 2\bar{w}i + 2wi + 4 = 1$.

$(w-2i)(\bar{w}+2i) = 1$.

$\therefore\ |w - 2i| = 1$

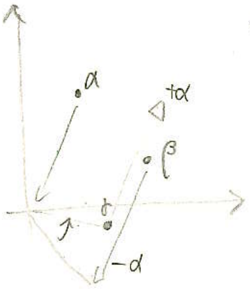
wは 中心点$2i$, 半径1の円を描く. //

アイデア.
① $\alpha \to 0$ になるように全体の平行移動.
② 回転
③ もどす.

4.5 回転

例題

$\alpha = 2+3i, \beta = 4+i$ とする．点 β を，点 α を中心として $\frac{1}{3}\pi$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ．



<Ans>

全体を $-\alpha$ だけ平行移動.

$\alpha \to \alpha - \alpha = 0$.

$\beta \to \beta - \alpha = (2-2i)$

これを, 原点中心に $\frac{\pi}{3}$ 回転すると

$$(2-2i) \times \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= (1-i)(1+\sqrt{3}i)$$
$$= (1+\sqrt{3}) + (\sqrt{3}-1)i$$

これを α だけ平行移動した点が γ.

$$\gamma = ((1+\sqrt{3}) + (\sqrt{3}-1)i) + (2+3i)$$
$$= (3+\sqrt{3}) + (\sqrt{3}+2)i$$

やっていることをまとめると… $\gamma = (\beta-\alpha)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) + \alpha$.

問題

$\alpha = 1+i, \beta = 5+3i$ とする．点 β を，点 α を中心として $\frac{1}{6}\pi$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ．

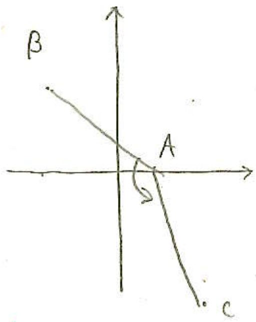
<Ans>

求めるγは.

$$\gamma = (\beta-\alpha)\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) + \alpha$$
$$= (4+2i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + (1+i)$$
$$= (2+i)(\sqrt{3}+i) + (1+i)$$
$$= (2\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+2)i + (1+i)$$
$$= 2\sqrt{3} + (3+\sqrt{3})i$$

例題 α β γ

3 点 A(1), B$(-2+2i)$, C$(2-5i)$ に対して，半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ を求めよ．ただし，$-\pi < \theta \leqq \pi$ とする．



<Ans>.

全体を −1 だけ平行移動.

B′$(-3+2i)$

C′$(1-5i)$

求めるθは. OB′からOC′までの回転角θ.

$$(1-5i) = r(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot(-3+2i)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-5i}{-3+2i} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$(\text{左辺}) = \frac{1-5i}{-3+2i} \times \frac{3+2i}{3+2i}$$
$$= \frac{13-13i}{-11}$$
$$= \frac{13}{11}(-1+i)$$
$$= \frac{13\sqrt{2}}{11}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$= \frac{13\sqrt{2}}{11}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$\therefore \theta = \frac{3}{4}\pi$$

$r(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$

問題

3 点 A$(1-i)$, B$(2+i)$, C$(2i)$ に対して，半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ を求めよ．ただし，$-\pi < \theta \leqq \pi$ とする．

<Ans>.

求めるθは.

$$r\cos\theta = \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} \text{ とかける.}$$

$\beta-\alpha = 1+2i$, $\gamma-\alpha = -1+3i$ なので

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{-1+3i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i}$$
$$= \frac{5+5i}{1+4} = 1+i$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

例題

3点 A$(-1+i)$, B$(3-i)$, C$(x+3i)$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 2直線 AB, AC が垂直に交わるように，実数 x の値を求めよ．

AB. ACのなす角θは．

$$r(\cos\theta+i\sin\theta)=\frac{(x+3i)-(-1+i)}{(3-i)-(-1+i)}$$

$$=\frac{(x+1)+2i}{4-2i}\times\frac{4+2i}{4+2i}$$

$$=\frac{4x+(2x+10)i}{20}$$

垂直に交わるには，実部が0．（$\because \cos\theta=0$）．

$\therefore \frac{4x}{20}=0$．$\underline{x=0}$

(2) 3点 A, B, C が一直線上にあるように，実数 x の値を求めよ．

(1)より

$$r(\cos\theta+i\sin\theta)=\frac{1}{20}(4x+(2x+10)i)．$$

一直線上にあるには，$\theta=0,\pi$

i.e. $\sin\theta=0$．つまり虚部 $=0$．

$2x+10=0$

$\underline{x=-5}$

問題

3点 A(i), B$(2+2i)$, C$(x-i)$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 2直線 AB, AC が垂直に交わるように，実数 x の値を求めよ．

AB. ACのなす角は

$$r(\cos\theta+i\sin\theta)=\frac{(x-i)-i}{(2+2i)-i}$$

$$=\frac{x-2i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}$$

$$=\frac{1}{5}\left((2x-2)+(-4-x)i\right)．$$

垂直に交わるには，実部が0．

（$\because \cos\theta=0$）

$\therefore 2x-2=0$．$\underline{x=1}$

(2) 3点 A, B, C が一直線上にあるように，実数 x の値を求めよ．

(1)より

$$r\cos\theta=\frac{1}{5}\left((2x-2)+(-4-x)i\right)．$$

一直線上にあるには，虚部0．（$\because \theta=0,\pi$）

$-4-x=0$　$\underline{x=-4}$

例題

3 点 A(α), B(β), C(γ) を頂点とする $\triangle$ABC について, 等式

$$\gamma = (1+\sqrt{3}i)\beta - \sqrt{3}i\alpha$$

が成立するとき, 以下のものを求めよ.

(1) 複素数 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値.

$$\gamma = (1+\sqrt{3}i)\beta - \sqrt{3}i\alpha$$

$$\Leftrightarrow \gamma - \alpha = (1+\sqrt{3}i)\beta - (1+\sqrt{3}i)\alpha$$

$$= (1+\sqrt{3}i)(\beta-\alpha)$$

$$\therefore \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = 1+\sqrt{3}i$$

(2) $\triangle$ABC の 3 つの角の大きさ.

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore \angle BAC = \frac{\pi}{3}$$

また、

$$\gamma = (1+\sqrt{3}i)\beta - \sqrt{3}i\alpha$$

$$\gamma - \beta = \sqrt{3}i(\beta-\alpha)$$

$$\gamma - \beta = -\sqrt{3}i(\alpha-\beta)$$

$$\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta} = -\sqrt{3}i$$

実部0なので $\angle ABC = \dfrac{\pi}{2}$

($\because \cos\theta = 0$)

残った $\angle ACB = \dfrac{\pi}{6}$

例題

3 点 A(α), B(β), C(γ) を頂点とする $\triangle$ABC について, 等式

$$\gamma = (1-i)\alpha + i\beta$$

が成立するとき, 以下のものを求めよ.

(1) 複素数 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値.

$$\gamma - \alpha = -i\alpha + i\beta$$

$$= i(\beta-\alpha)$$

$$\therefore \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = i$$

(2) $\triangle$ABC の 3 つの角の大きさ.

$\angle BAC$は $\dfrac{\pi}{2}$ ($\because \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の実部0).

また、

$$\gamma = (1-i)\alpha + i\beta$$

$$\gamma - \beta = (1-i)\alpha - (1-i)\beta$$

$$\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta} = 1-i$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\therefore \angle ABC = \frac{\pi}{4}$$

残った $\angle ACB = \dfrac{\pi}{4}$