1 3つの曲線

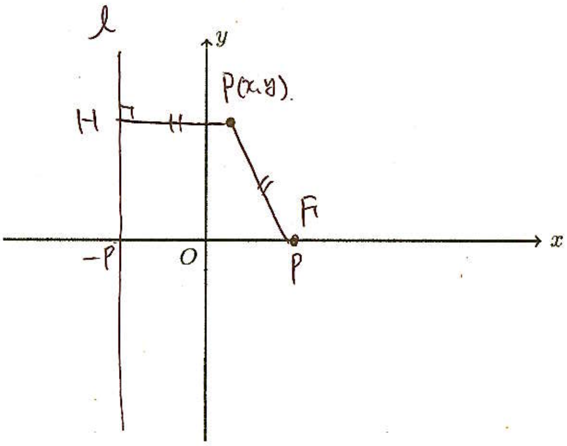
1.1 放物線の方程式

放物線とは

定点 F からの距離と、F を通らない定直線 ℓ からの距離が等しい点の軌跡.

焦点

準線



F(p, 0) を焦点, $\ell : x=-p$ を準線とする放物線について,

放物線上の点 P(x, y) は,

$$FP = PH$$ をみたす。

(ただし、H は点 P から ℓ へ下ろした垂線との交点)

$$FP^2 = PH^2$$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

$$y^2 = 4px$$

放物線の標準形

焦点 $(p, 0)$, 準線 $x=-p$

$$y^2 = 4px$$

軸: 焦点を通り、準線に垂直な直線

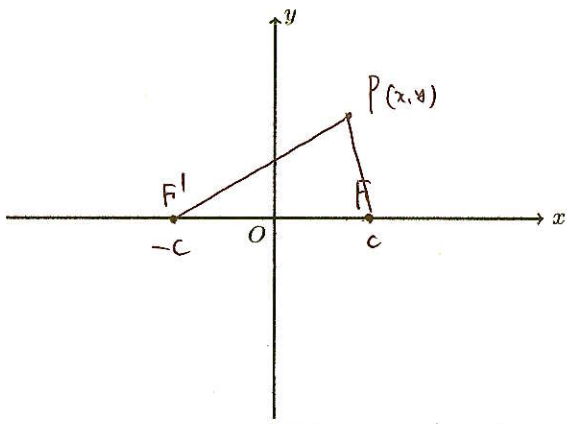
頂点: 放物線と軸の交点

1.2 楕円の方程式

楕円とは

2定点 F, F' からの距離の和が一定である点の軌跡

焦点



F(c, 0), F'(−c, 0) を焦点とし、距離の和を 2a とする. $(0 < c < a)$

楕円上の点 P(x, y) について,

$FP + PF' = 2a$ より.

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$(x-c)^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2 + \cancel{y^2}$$

$$\cancel{4}a^2 + \cancel{4}cx = \cancel{4}a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$(cx+a^2)^2 = a^2\left((x+c)^2 + y^2\right)$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2-c^2)} = 1$$

$b = \sqrt{a^2-c^2}$ とおくと. $a > b > 0$ で

楕円の標準形

焦点 $(c, 0)$, $(-c, 0)$. $c = \sqrt{a^2-b^2}$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

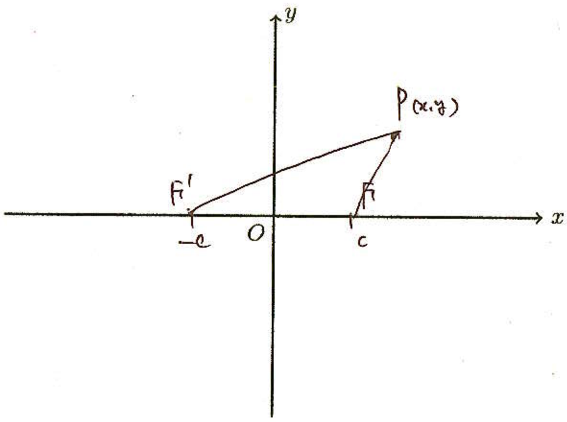
長軸の長さ $2a$.

短軸の長さ $2b$

1.3 双曲線の方程式

双曲線とは

2定点 F, F' からの距離の差が一定 (not 0) である点の軌跡。 焦点



F(c, 0), F'(−c, 0) を焦点とし、2定点からの距離の差が 2a である双曲線。

この曲線上の点 P(x,y) について、

$$FP - F'P = \pm 2a.$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a.$$

楕円と同様に、

$$\mp\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2+cx.$$

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2).$$

c > a より $b=\sqrt{c^2-a^2}$ とおいて.

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

双曲線の標準形

焦点 F(−c, 0), F(c, 0).

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

〈第一象限の概形について〉

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1.$$

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2$$

$$y=b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} \qquad (y>0 \text{より}).$$

第一象限は

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \quad \text{のグラフ.} \quad (x \geq a).$$

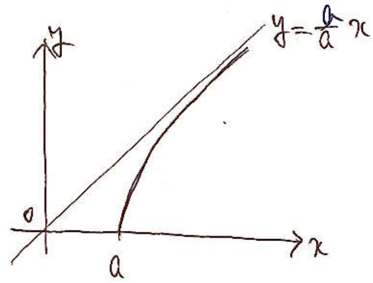
$y=\frac{b}{a}x$ が漸近線である.

〈証明〉

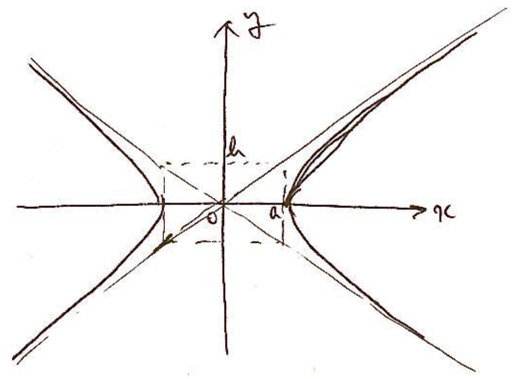
$$\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

$$=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\times\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\frac{b}{\cancel{a}}\cdot\frac{a^{\cancel{2}}}{x+\sqrt{x^2-a^2}} \to 0 \quad (as\ x\to\infty).$$



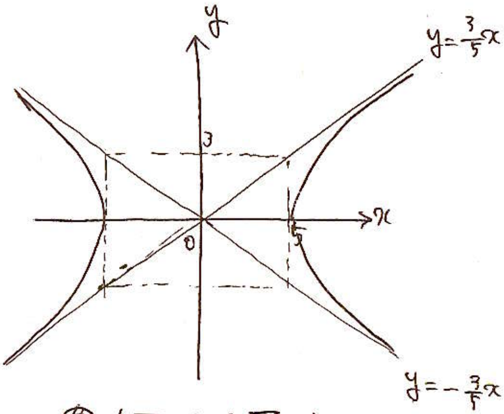
全体のグラフは、対称性より…



双曲線

以下の双曲線の概形を描け．また，焦点，頂点，漸近線を求めよ．

(1) $\dfrac{x^2}{5^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$

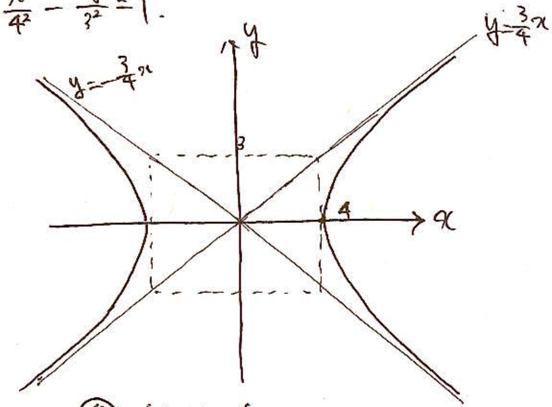


焦 $(\sqrt{34}, 0), (-\sqrt{34}, 0)$.

頂 $(5, 0), (-5, 0)$.　漸 $y = \pm\frac{3}{5}x$.

(2) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

$\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1.$

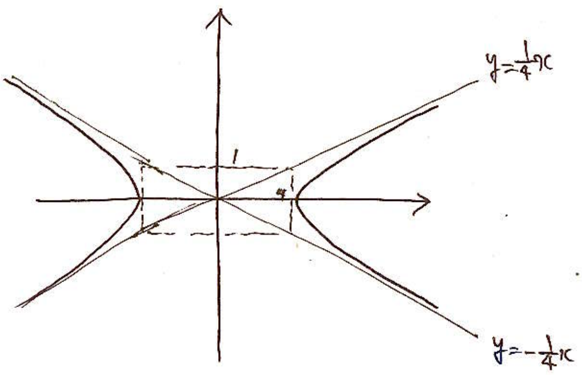


焦 $(5, 0), (-5, 0)$

頂 $(4, 0), (-4, 0)$.　漸 $y = \pm\frac{3}{4}x$

(3) $x^2 - 16y^2 = 16$

$\dfrac{1}{4^2}x^2 - y^2 = 1.$



焦 $(\sqrt{17}, 0), (-\sqrt{17}, 0)$.

頂 $(4, 0), (-4, 0)$.

漸 $y = \pm\frac{1}{4}x$.

1.4　練習問題

放物線

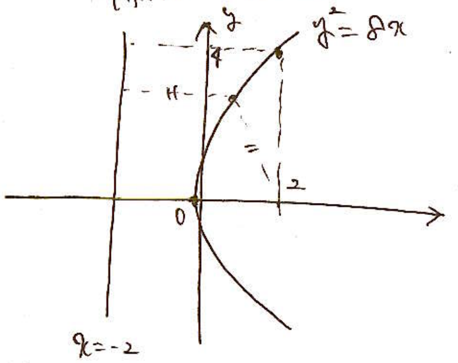
以下の放物線の概形を描け．また，焦点と準線を求めよ．

(1) $y^2 = 8x$

$y^2 = 4\cdot 2x$

焦点は $(2,0)$.

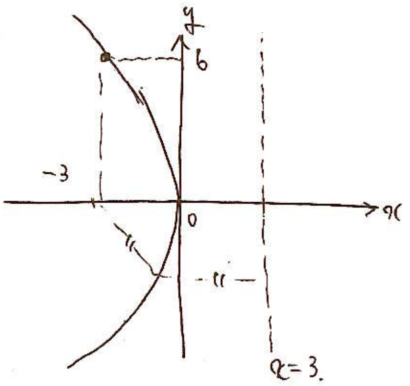
準線は $x=-2$



(2) $y^2 = -12x$

$y^2 = 4\cdot(-3)x$.

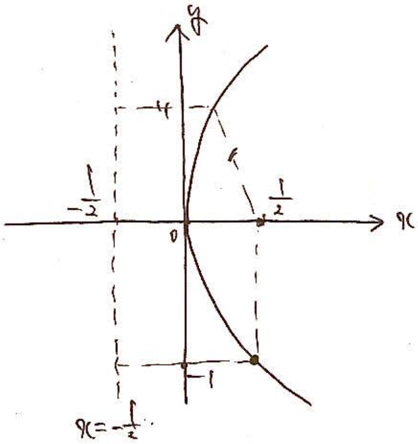
焦点 $(-3,0)$. 準線 $x=3$



(3) $y^2 = 2x$

$y^2 = 4\cdot\frac{1}{2}x$.

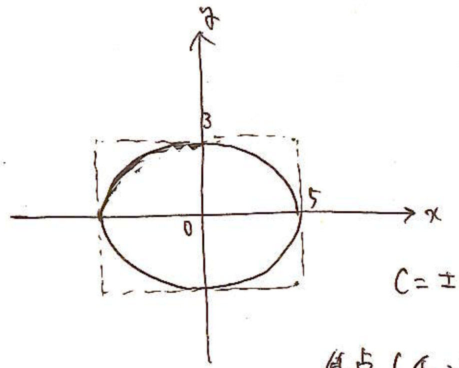
焦 $(\frac{1}{2},0)$. 準 $x=-\frac{1}{2}$



楕円

以下の楕円の概形を描け．また，焦点，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ．

(1) $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$



$c = \pm\sqrt{5^2-3^2} = \pm 4$

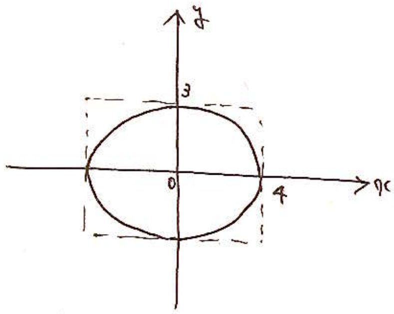
焦点 $(4,0)$. $(-4,0)$.

長軸の長さ 10

短軸の長さ 6

(2) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

$\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$.



$c = \pm\sqrt{4^2-3^2} = \pm\sqrt{7}$.

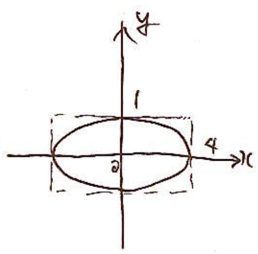
焦 $(\sqrt{7},0)$, $(-\sqrt{7},0)$.

長軸の長さ 8

短軸の長さ 6

(3) $x^2 + 16y^2 = 16$

$\dfrac{x^2}{4^2} + y^2 = 1$.



$c = \pm\sqrt{4^2-1^2} = \pm\sqrt{15}$

焦 $(\sqrt{15},0)$, $(-\sqrt{15},0)$.

長軸の長さ 8

短軸の長さ 2

1.5　練習問題 2

1.5.1　y 軸が軸となる放物線

数学 I で学んだ放物線

$$y = ax^2$$

について，焦点と準線を求めよ．

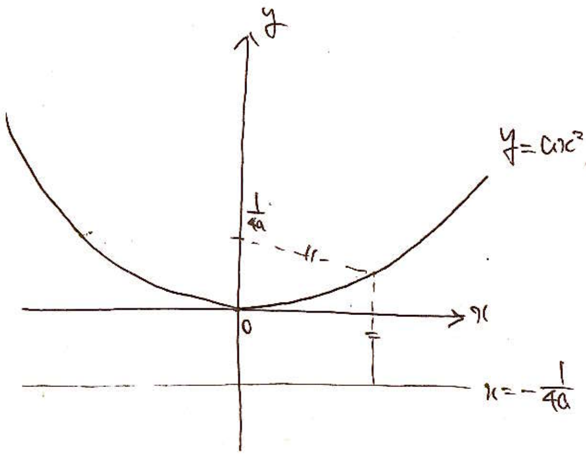
$$y = ax^2$$

$$x^2 = \frac{1}{a}y$$

$$x^2 = 4 \cdot \frac{1}{4a}y$$

焦 $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$.

準 $y = -\frac{1}{4a}$



練習

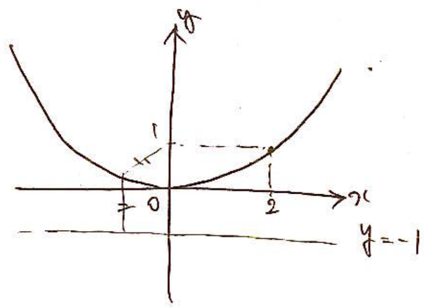
以下の放物線の概形を描け．また，焦点と準線を求めよ．

(1) $x^2 = 4y$

$$x^2 = 4 \cdot 1y.$$

焦 $(0, 1)$

準 $y = -1$.

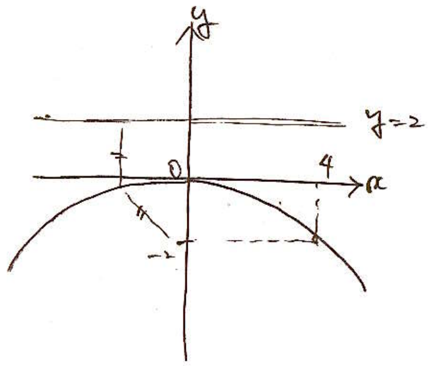


(2) $x^2 = -8x$

$$x^2 = 4 \cdot (-2)x$$

焦 $(0, -2)$

準 $y = 2$

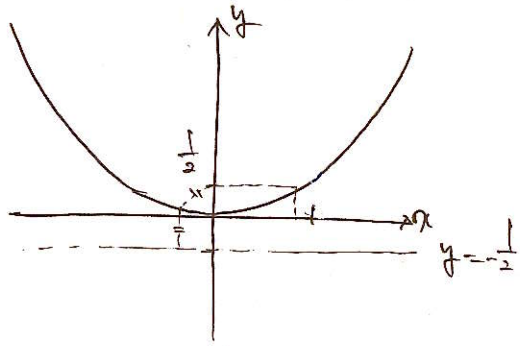


(3) $y = \frac{1}{2}x^2$

$$x^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}y$$

焦 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

準 $y = -\frac{1}{2}$

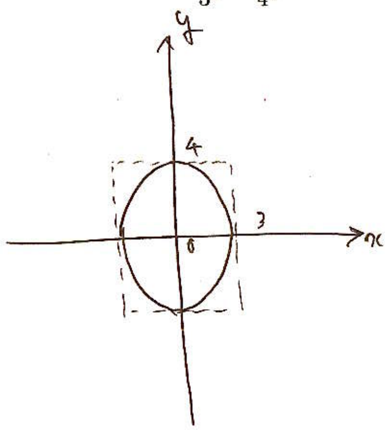


1.5.2 軸が y 軸上にある楕円

問い

以下は楕円の方程式である．どのような楕円か．

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$$



長軸の長さ 8

短軸の長さ 6.

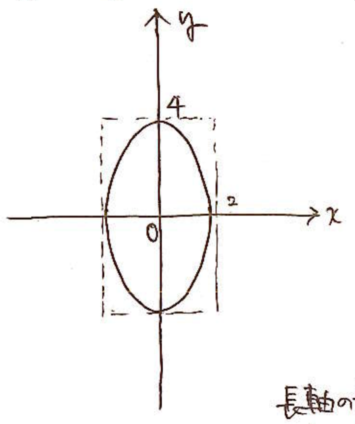
焦点 $(0, \sqrt{7}), (0, -\sqrt{7})$.

問題

以下の楕円の概形を描け．また，焦点，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ．

(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{4^2}=1.$$



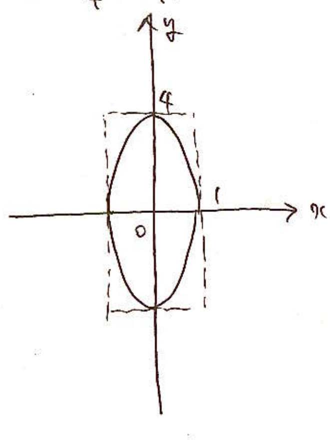
長軸の長さ 8

短軸の長さ 4

焦点 $(0, 2\sqrt{3}), (0, -2\sqrt{3})$

(2) $16x^2+y^2=16$

$$x^2+\frac{y^2}{4^2}=1.$$



長軸の長さ 8

短軸の長さ 2.

焦点 $(0, \sqrt{15}), (0, -\sqrt{15})$

1.6　焦点と距離から楕円

確認

楕円はどのような点の集合か.

2定点からの距離の和が一定である点の集合.

問題

2点 $(0,3),(0,-3)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が10である楕円の方程式を求めよ.

楕円上の点 $P(x,y)$ とする.

条件から.

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{x^2+(y+3)^2}=10.$$

⋮

でもOKだけど…

〈Ans〉.

焦点からの距離の和が10より.

長軸の長さ10.

焦点がy座標上なので，求める楕円は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$$ とおける.

また，焦点について

$$\pm3=\pm\sqrt{5^2-a^2}\qquad \therefore\ a^2=4^2$$

∴ 求める方程式は

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$$ //

練習問題

2点 $(\sqrt{3},0),(-\sqrt{3},0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が4である楕円の方程式を求めよ.

焦点がx軸上にあり，焦点からの距離の和4より

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ とおける.

焦点について.

$$\pm\sqrt{3}=\sqrt{4-b^2}$$

$$b^2=1.$$

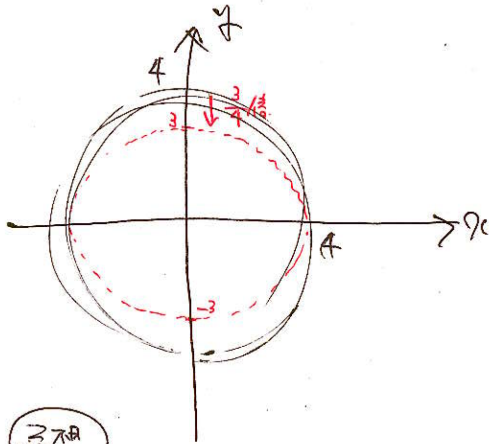
∴ 求める楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1$$ //

1.6.1 円と楕円

考える

円 $x^2+y^2=16$ を, x 軸を基準にして y 軸方向へ $\dfrac{3}{4}$ 倍して得られる曲線の方程式を求めよ.



予想

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1.$$

〈Ans〉.

求める曲線上の点 $P(x,y)$ とおく.

円 $x^2+y^2=16$ 上の点 $Q(\alpha,t)$ をとると.

$$\alpha^2+t^2=16. \quad \text{—①}$$

P は Q を y軸方向 $\frac{3}{4}$ 倍にする点なので

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=\frac{3}{4}t \end{cases}$$

$$\therefore \alpha=x. \quad t=\frac{4}{3}y$$

①に代入して

$$x^2+\frac{16}{9}y^2=16$$

よって求める方程式は

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1.$$

問題

円 $x^2+y^2=9$ を以下のように拡大・縮小して得られる楕円の方程式を求めよ.

(1) x 軸を基準に y 軸方向に $\dfrac{4}{3}$ 倍

求める曲線上の点を $P(x,y)$ とおく.

円 $x^2+y^2=9$ 上の点 $Q(\alpha,t)$ をとると

$$\alpha^2+t^2=9. \quad \text{—①}$$

P は Q を y軸方向 $\frac{4}{3}$ 倍した点なので

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=\frac{4}{3}t \end{cases}$$

$$\alpha=x. \quad t=\frac{3}{4}y$$

①に代入.

$$x^2+\frac{9}{16}y^2=9.$$

よって求める方程式は

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$$

(2) y 軸を基準に x 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ 倍

求める曲線上の点を $P(x,y)$ をおく.

円 $x^2+y^2=9$ 上の点 $Q(\alpha,t)$ をとると

$$\alpha^2+t^2=9.$$

P は Q を x軸方向 $\frac{2}{3}$ 倍した点なので

$$\begin{cases} x=\frac{2}{3}\alpha \\ y=t \end{cases}$$

$$\therefore \alpha=\frac{3}{2}x, \ t=y$$

①に代入.

$$\frac{9}{4}x^2+y^2=9.$$

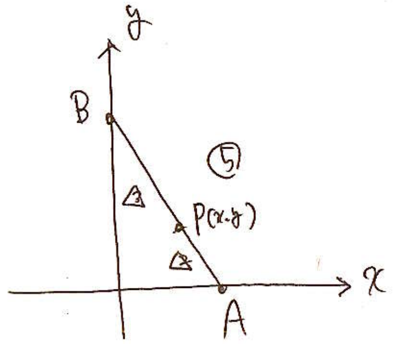
よって求める方程式は

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

1.6.2　軌跡と楕円

例題

座標平面上において，長さが 5 の線分 AB の端点 A は x 上を，端点 B は y 軸上を動くとき，線分 AB を 2 : 3 に内分する点 P の軌跡を求めよ．



$A(s,0)$，$B(0,t)$ とおく．

P は AB を 2:3 に内分する点．

$$x = \frac{3s+2\cdot 0}{5} = \frac{3}{5}s$$

$$y = \frac{3\cdot 0+2t}{5} = \frac{2}{5}t \quad \text{—①}$$

また AB = 5 より

$$s^2+t^2=25 \quad \text{—②}$$

①，②より

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1.$$

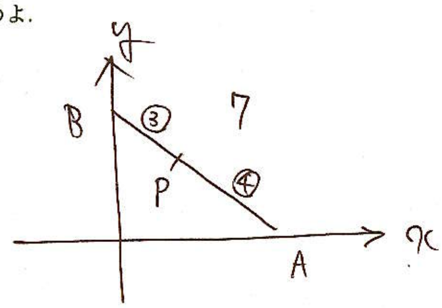
$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1.$$

∴ 点Pは 楕円

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$ 上を動く．

問題

座標平面上において，長さが 7 の線分 AB の端点 A は x 上を，端点 B は y 軸上を動くとき，線分 AB を 4 : 3 に内分する点 P の軌跡を求めよ．



$A(s,0)$，$B(0,t)$ とおく．

P は AB を 4:3 に内分する点．

$$x = \frac{3s+4\cdot 0}{4+3} = \frac{3}{7}s$$

$$y = \frac{3\cdot 0+4t}{4+3} = \frac{4}{7}t \quad \text{—①}$$

また AB = 7 より

$$s^2+t^2=7^2 \quad \text{—②}$$

①，②より

点Pは 楕円 $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ 上をうごく

$\frac{y^2}{3^2}-\frac{x^2}{5^2}=1$

と捉えると x軸y軸反転とわかりやすい？

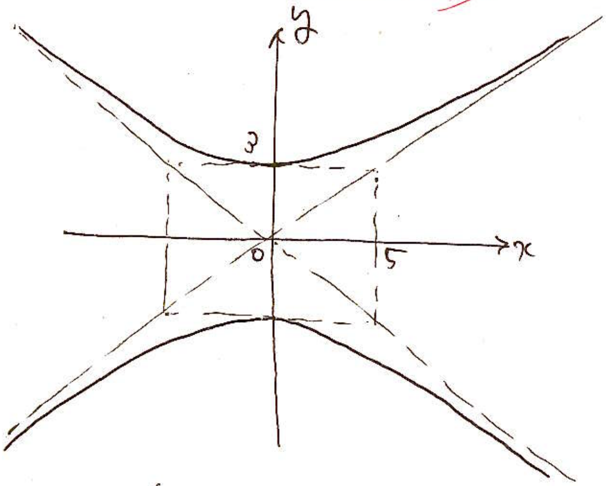
1.6.3 焦点が y 軸上の双曲線

例題

以下の双曲線の概形を描け．また，焦点，頂点，漸近線を求めよ．

注意!!

$$\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{3^2}=-1$$



焦 $(0, \pm\sqrt{34})$.

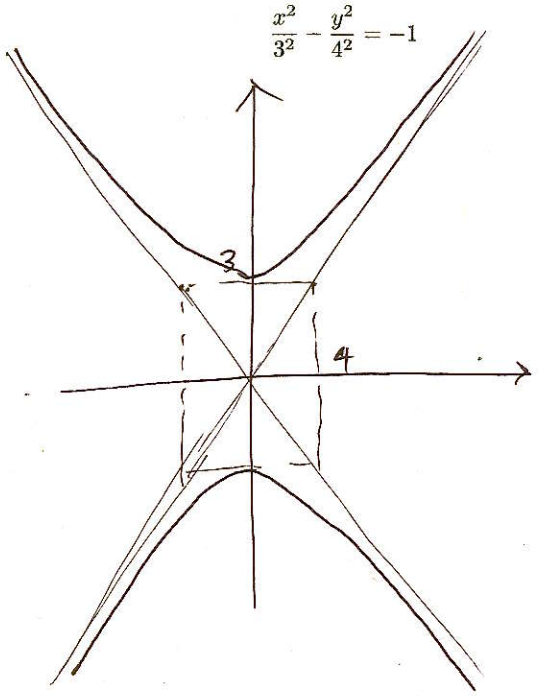
頂 $(0, \pm 3)$.

漸 $y=\pm\frac{3}{5}x$

問題

以下の双曲線の概形を描け．また，焦点，頂点，漸近線を求めよ．

$$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=-1$$



焦 $(0, \pm 5)$

頂 $(0, \pm 7)$

漸 $y=\pm\frac{3}{4}x$

問題

(1) 2点 $(0,4),(0,-4)$ を焦点とし，焦点からの距離の差が6である双曲線の方程式を求めよ．

求める双曲線を $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ と表せる.

焦点からのきょりの差が 6 で.

焦点 y軸上より $b^2=3^2$.

また、焦点 $(0, \pm 4)$ より

$$4^2=3^2+b^2$$

$$b^2=7.$$

∴ 求める双曲線は

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{7}=-1$$

(2) 2点 $(5,0),(-5,0)$ を焦点とし，焦点からの距離の差が8である双曲線の方程式を求めよ．

求める双曲線を $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ と表せる.

焦点からのきょりの差が 8 で.

焦点 x軸上より

$$a^2=4^2.$$

また、焦点 $(\pm 5, 0)$ より

$$5^2=4^2+b^2.$$

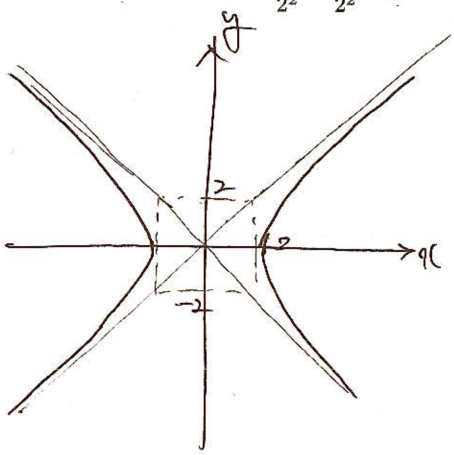
$$b^2=3^2$$

∴ 求める双曲線は

$$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=-1$$

(3) 以下の双曲線の概形を描け．また，焦点，頂点，漸近線を求めよ．

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$



焦 $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$

頂 $(\pm 2, 0)$

漸 $y = \pm x$.

→ 漸近線が直角に交わる双曲線

→「直角双曲線」という.

(4) 2 点 $(0, 6), (0, -6)$ を焦点とする直角双曲線の方程式を求めよ．

求める直角双曲線は，

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1 \quad \text{とおける.}$$

焦点 $(0, \pm 6)$ より

$$6 = a^2 + a^2$$

$$a^2 = 3$$

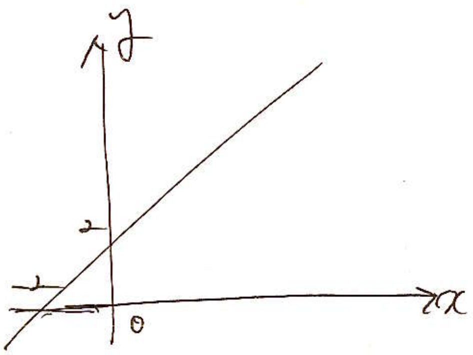
$$\therefore \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = -1$$

2 平行移動

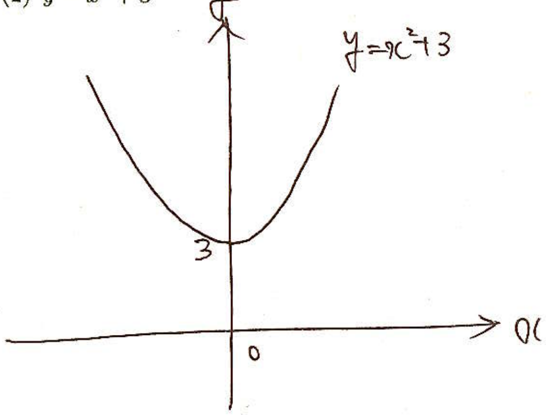
2.1 復習

以下の方程式が表す図形の概形を描け.

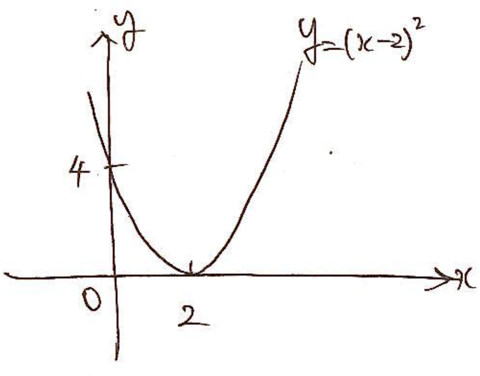
(1) $y = x + 2$



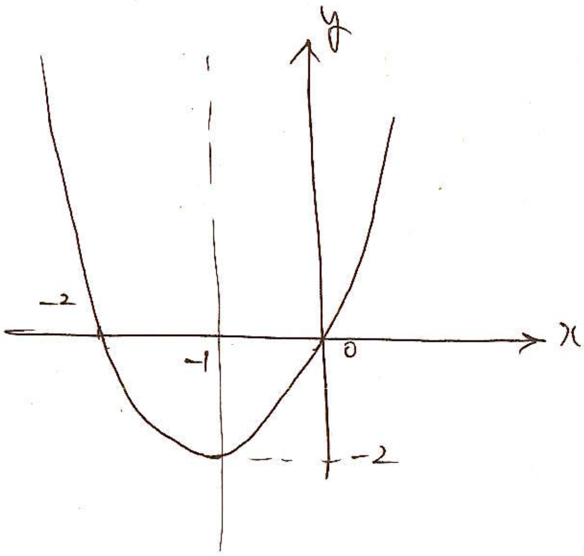
(2) $y = x^2 + 3$



(3) $y = (x-2)^2$



(4) $y = 2(x+1)^2 - 2$

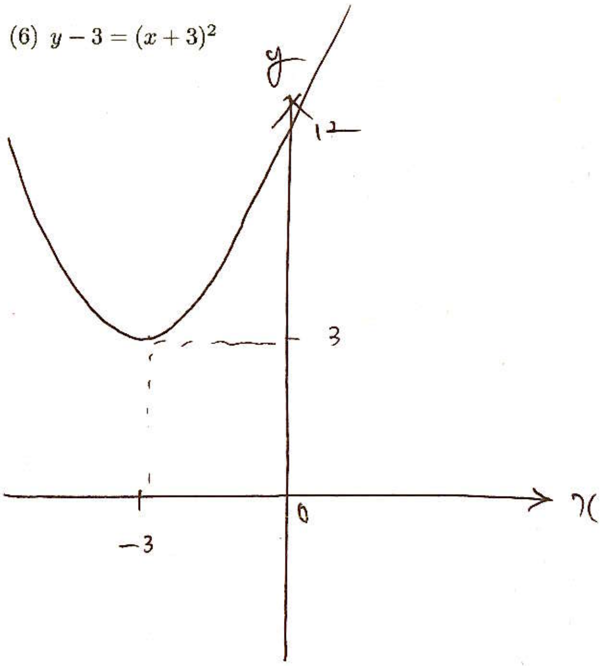


(5) $y = 2x^2 + 4x$

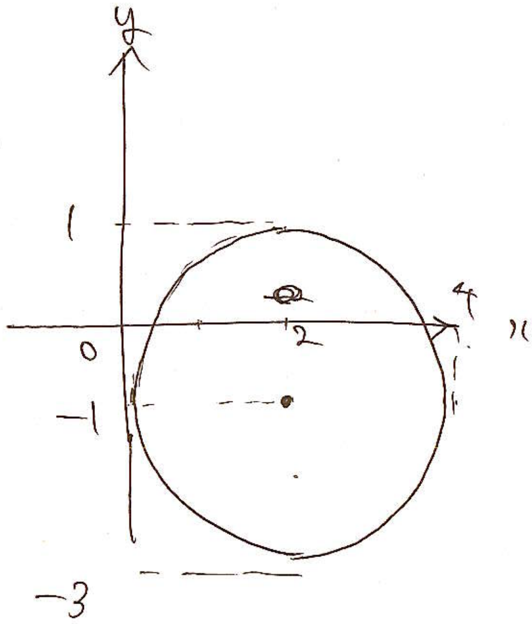
$= 2(x+1)^2 - 2.$

同上.

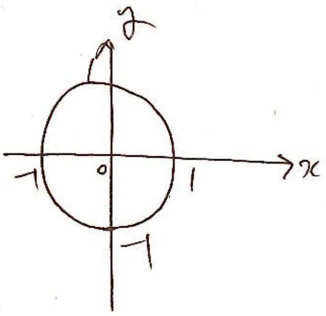
(6) $y - 3 = (x + 3)^2$



(8) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$

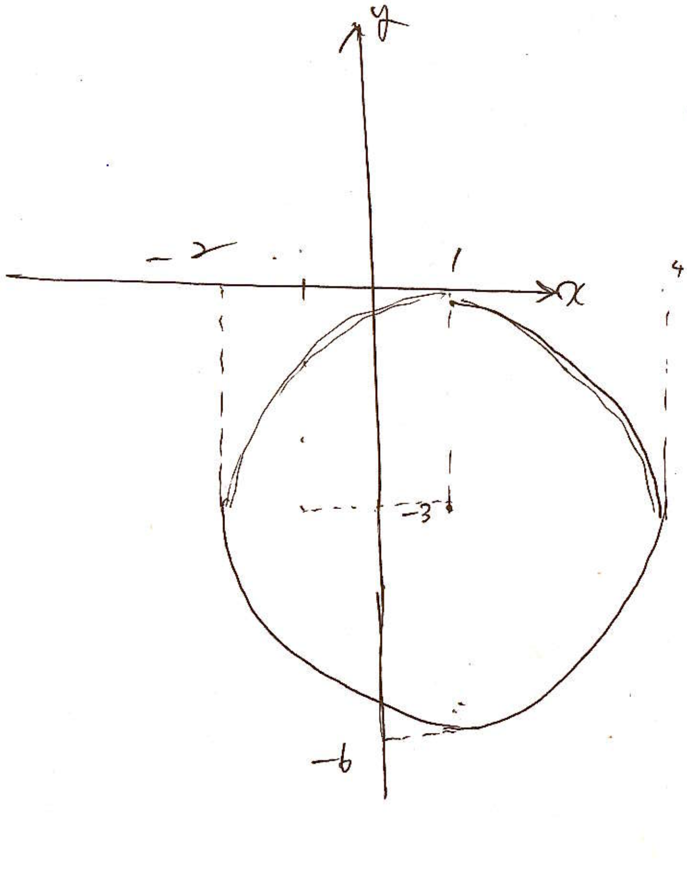


(7) $x^2 + y^2 = 1$

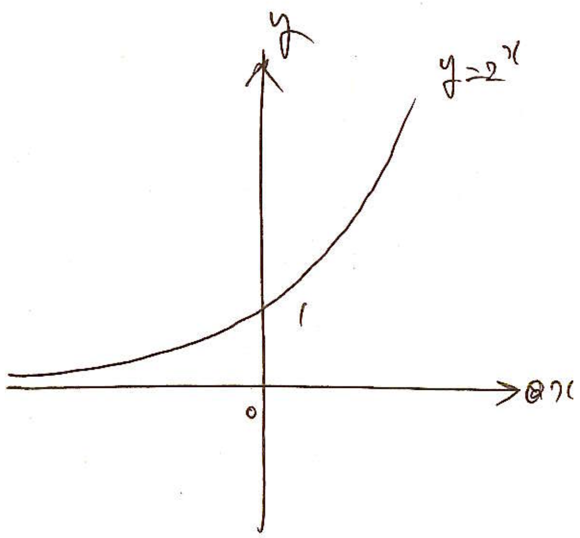


(9) $x^2 - 2x + y^2 + 6\overset{y}{\cancel{x}} + 1 = 0$

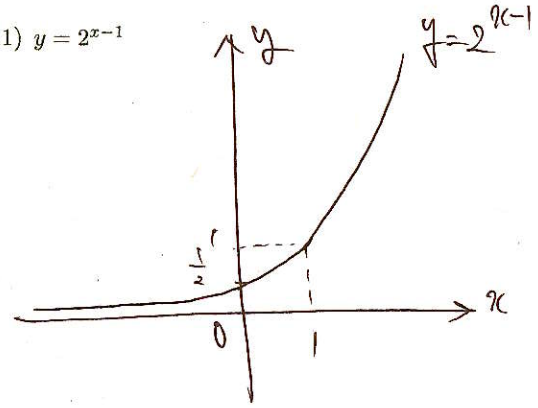
$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 9.$



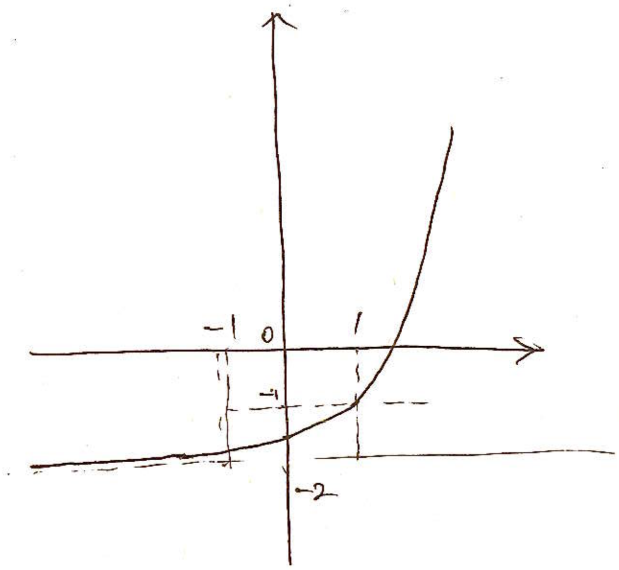
(10) $y = 2^x$



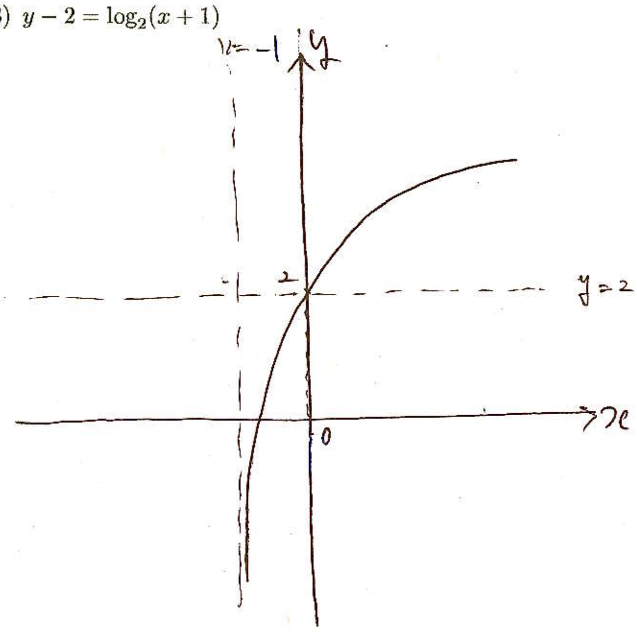
(11) $y = 2^{x-1}$



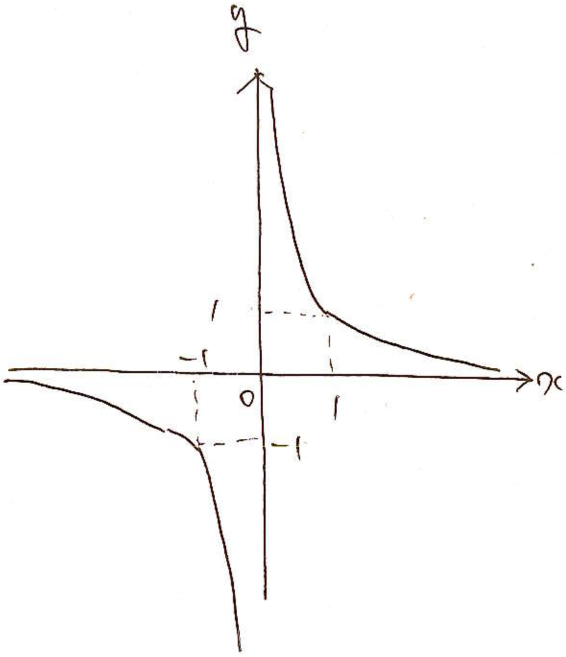
(12) $y + 2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$



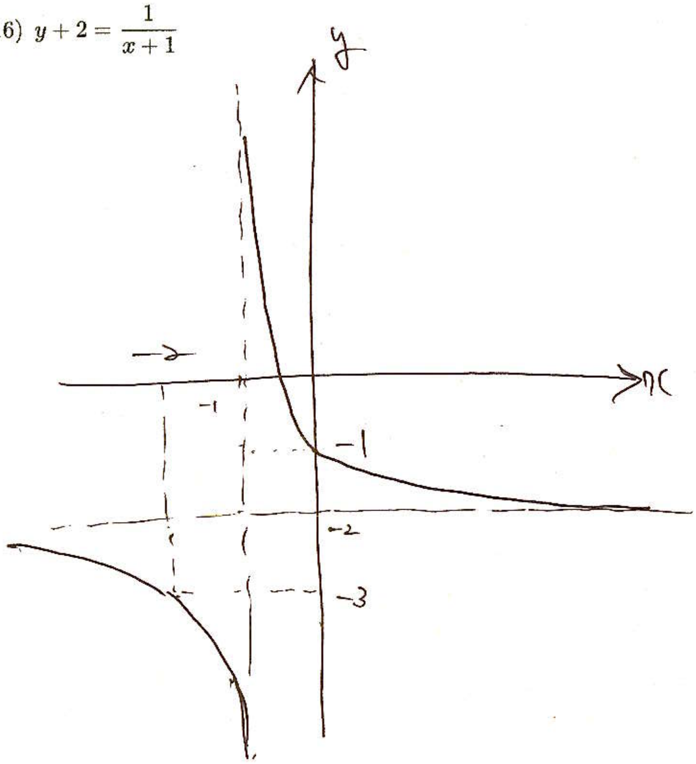
(13) $y - 2 = \log_2(x+1)$



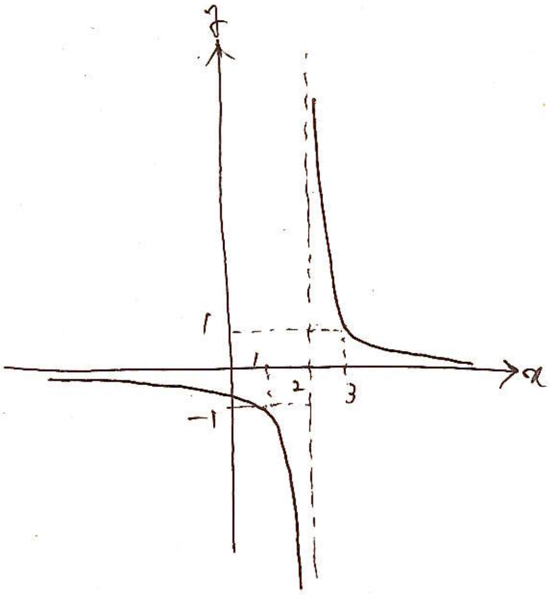
(14) $y = \frac{1}{x}$



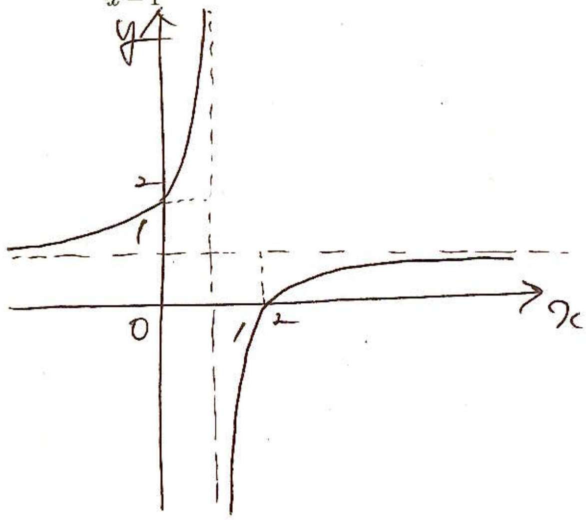
(16) $y + 2 = \frac{1}{x+1}$



(15) $y = \frac{1}{x-2}$



(17) $y - 1 = -\frac{1}{x-1}$



2.2　二次曲線の平行移動一般化

変数 x, y を含む式を $F(x,y)$ を書くことがある．
これまでに学んださまざまな曲線の方程式は，$F(x,y)=0$ の形で表すことができる．

曲線 $F(x,y)=0$ の平行移動

曲線 $F(x,y)=0$ を，x 軸方向へ p, y 軸方向へ q だけ平行移動した後の曲線の方程式は,

$$F(x-p,\ y-q)=0.$$

例
円 $x^2+y^2=4$ を，x 軸方向へ 3, y 軸方向へ -2 だけ平行移動させたグラフの方程式を求めよ．

$$(x-3)^2+(y+2)^2=4$$

練習問題

(1) 放物線 $y^2=4x$ を，x 軸方向へ 2, y 軸方向へ 3 だけ平行移動するとき，その放物線の方程式と焦点，準線を求めよ．また，概形を描け．

もとのグラフは.

$y^2=4x$　焦 $(0,1)$.　準 $y=-1$.

↓ x軸方向 2. y軸方向 3.

$(y-3)^2=4(x-2)$

焦 $(2,4)$.　準 $y=2$

(2) 放物線 $x^2=2y$ を，x 軸方向へ -1, y 軸方向へ 1 だけ平行移動するとき，その放物線の方程式と焦点，準線を求めよ．また，概形を描け．

もと　$x^2=2y$
$=4\cdot\frac{1}{2}y$　焦 $(0,\frac{1}{2})$.　準 $y=-\frac{1}{2}$

↓ x軸方向 -1. y軸方向 1.

$(x+1)^2=2(y-1)$

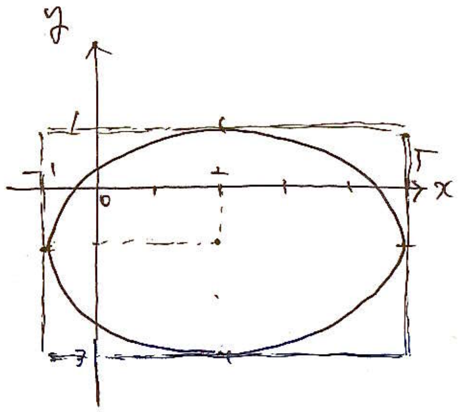
焦 $(1,-\frac{1}{2})$.　準 $y=\frac{1}{2}$

(3) 楕円 $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ を, x 軸方向へ -1, y 軸方向へ 2 だけ平行移動するとき，その放物線の方程式と焦点を求めよ．また，概形を描け．

もと $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$. 焦 $(\sqrt{5},0),(-\sqrt{5},0)$

↓ x軸：-1
　y軸：2.

$$\frac{(x+1)^2}{3^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2}=1.$$ 焦 $(\sqrt{5}-1,2)$ $(-1-\sqrt{5},2)$

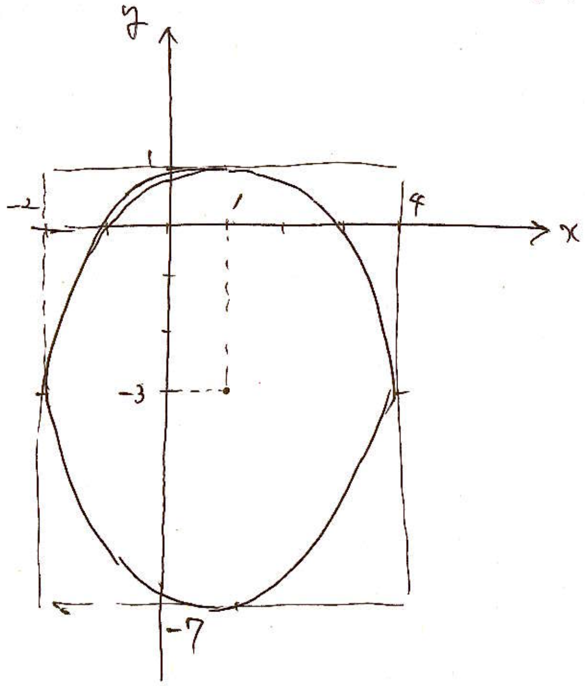


(4) 楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ を, x 軸方向へ 1, y 軸方向へ -3 だけ平行移動するとき，その放物線の方程式と焦点を求めよ．また，概形を描け．

もと $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$. 焦 $(0,\sqrt{7}),(0,-\sqrt{7})$.

↓ x軸：1
　y軸：-3.

$$\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y+3)^2}{4^2}=1.$$ 焦 $(1,\sqrt{7}-3)$ $(1,-\sqrt{7}-3)$

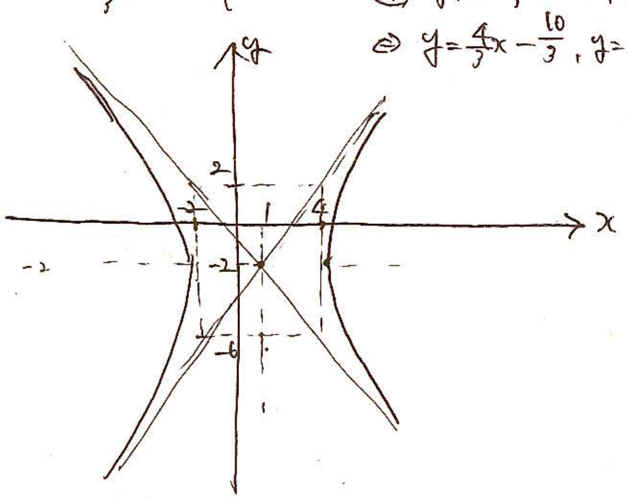


(5) 双曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ を, x 軸方向へ 1, y 軸方向へ -2 だけ平行移動するとき，その放物線の方程式と焦点，漸近線を求めよ．また，概形を描け．

$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1.$ 焦 $(5,0)$ $(-5,0)$.
漸 $y=\frac{4}{3}x$, $y=-\frac{4}{3}x$

↓ x軸：1
　y軸：-2

$$\frac{(x-1)^2}{3^2}-\frac{(y+2)^2}{4^2}=1.$$
焦 $(6,-2),(-4,-2)$
漸 $y+2=\frac{4}{3}(x-1)$, $y+2=-\frac{4}{3}(x-1)$
⇔ $y=\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}$, $y=-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

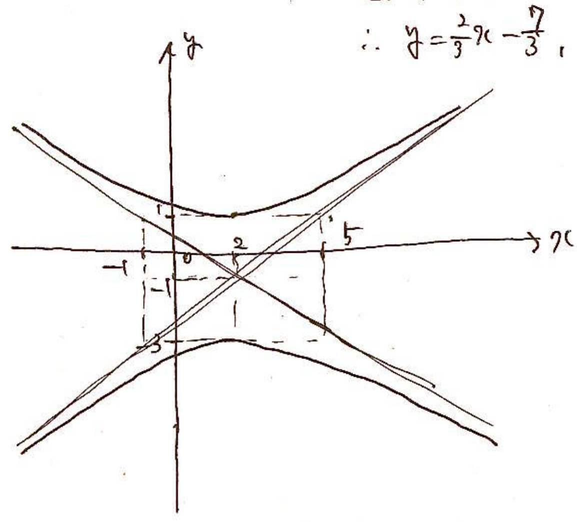


(6) 双曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=-1$ を, x 軸方向へ 2, y 軸方向へ -1 だけ平行移動するとき，その放物線の方程式と焦点，漸近線を求めよ．また，概形を描け．

もと $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=-1.$ 焦 $(0,\sqrt{13}),(0,-\sqrt{13})$
漸 $y=\frac{2}{3}x$, $y=-\frac{2}{3}x$

↓ x軸：2
　y軸：-1

$$\frac{(x-2)^2}{3^2}-\frac{(y+1)^2}{2^2}=-1$$
焦 $(2,\sqrt{13}-1),(2,-\sqrt{13}-1)$
漸 $y+1=\frac{2}{3}(x-2)$, $y+1=-\frac{2}{3}(x-2)$
∴ $y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$, $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$



2.3　変形して図形を求める

復習

以下の方程式はどのような図形を表すか．また，その概形を描け．

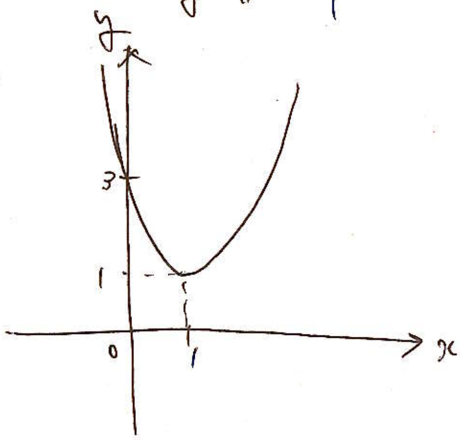
(1) $y = 2x^2 - 4x + 3$

$= 2(x-1)^2 + 1.$

放物線 $y = 2x^2$ を

x軸方向 1.

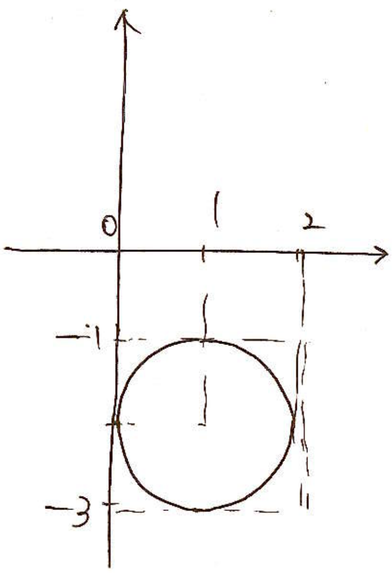
y 〃 1　平行移動したもの.



(2) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 4 = 0$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1.$

中心$(1, -2)$ 半径 1の円.



練習

以下の方程式はどのような図形を表すか．また，その概形を描け．

(1) $x^2 - 2x + 4y^2 + 8y + 1 = 0$

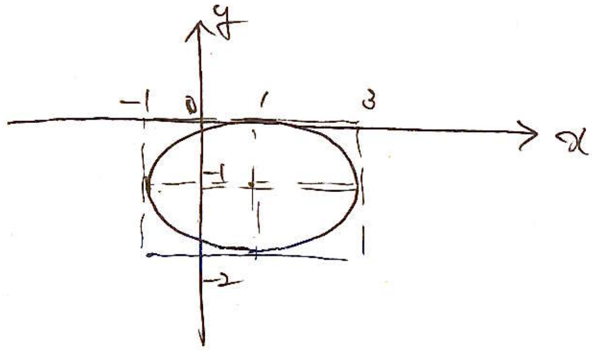
$(x-1)^2 - 1 + 4(y+1)^2 - 4 + 1 = 0$

$\frac{(x-1)^2}{2^2} + (y+1)^2 = 1.$

これは楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を

x軸: 1.　平行移動したもの

y軸: -1



(2) $x^2 - 4y^2 + 2x + 16y - 19 = 0$

$(x+1)^2 - 1 - 4(y-2)^2 + 16 - 19 = 0$

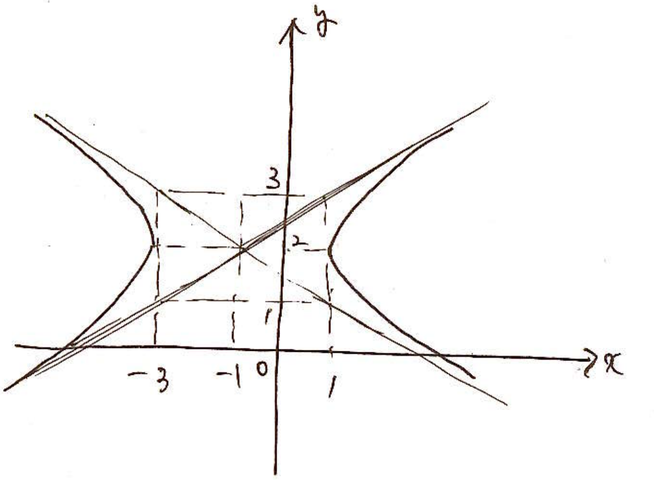
$\dfrac{(x+1)^2}{4} - (y-2)^2 = 1.$

双曲線 $\dfrac{x^2}{2^2} - y^2 = 1$ を

x軸：-1.

y軸：2

平行移動したもの.



(3) $y^2 + 8y - 16x = 0$

$(y+4)^2 - 16 - 16x = 0$

$(y+4)^2 = 16(x+1)$

$(y+4)^2 = 4 \cdot 4(x+1).$

これは

放物線 $y^2 = 4 \cdot 4x$ を

x軸：-1

y軸：-4

平行移動したもの.

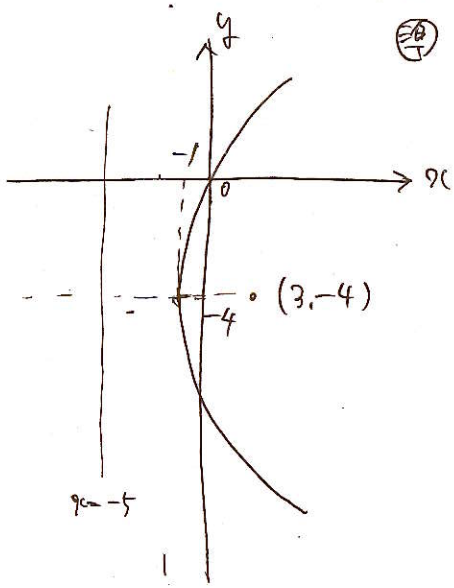
もと 焦 $(4, 0).$

準 $x = -4$

$\downarrow$

あと 焦 $(3, -4)$

準 $x = -5$



3　曲線と直線

3.1　復習

(1) 放物線 $y = x^2 - 4x + 1$ と直線 $y = x - 5$ の共有点の座標を求めよ.

共有点のx座標は

$$x^2 - 4x + 1 = x - 5$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(x-2)(x-3) = 0$$
$$\therefore x = 2, 3.$$

$x=2$のとき $y=-3$

$x=3$のとき $y=-2$

$\therefore$ 交点は $(2,-3), (3,-2)$

(2) 円 $x^2 + y^2 = 5$ と直線 $y = x - 1$ の共有点の座標を求めよ.

共有点のx座標は

$$x^2 + (x-1)^2 = 5$$
$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$
$$x = -1, 2$$

$x=-1$のとき $y=-2$

$x=2$のとき $y=1.$

$\therefore$ 交点は $(-1,-2), (2,1)$

以下, k は定数とする.

(3) 放物線 $y = x^2 + 3x$ と直線 $y = 2x + k$ の共有点の個数を調べよ.

共有点のx座標は

$$2x + k = x^2 + 3x$$
$$x^2 + x = k.$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = k. \quad — ※$$

共有点の個数は、※の実数解の個数で、

これは $y = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ と $y=k$ の共有点の個数.

$\therefore$ $k > -\frac{1}{4}$で 2コ

$k = -\frac{1}{4}$で 1コ

$k < -\frac{1}{4}$で 0コ

(4) 円 $x^2 + y^2 = 10$ と直線 $x + y + k = 0$ の共有点の個数を調べよ.

共有点のx座標は

$$x^2 + (x+k)^2 = 10$$
$$2x^2 + 2kx + k^2 - 10 = 0$$

判別式Dとおくと

$$\frac{D}{4} = k^2 - 2(k^2 - 10)$$
$$= -k^2 + 20$$
$$= -(k - 2\sqrt{5})(k + 2\sqrt{5})$$

$D>0$で 2コ.

$\therefore$ $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$で 2コ

$D=0$で 1コ

$\therefore$ $k = \pm 2\sqrt{5}$で 1コ

$D<0$で 0コ

$\therefore$ $k < -2\sqrt{5}$, $2\sqrt{5} < k$で 0コ

3.2 新しく学んだ曲線へ適用

以下の問いに答えよ．

(1) 放物線 $y^2 = 4x$ と直線 $2x - y = 4$ の共有点の座標を求めよ．

共有点のy座標は

$$y^2 = 2(y+4)$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$(y-4)(y+2) = 0$$

$$y = -2,\ 4$$

$y=-2$のとき $x=3$

$y=4$のとき $x=4$

$\therefore\ (3, -2),\ (4, 4)$

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ と直線 $x - y = 3$ の共有点の座標を求めよ．

共有点のx座標は

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(x-3)^2}{9} = 1$$

$$9x^2 + 4(x-3)^2 = 36$$

$$13x^2 - 24x = 0$$

$$x = 0,\ \frac{24}{13}$$

$x=0$とき $y=-3$

$x=\dfrac{24}{13}$とき $y=\dfrac{-15}{13}$

$\therefore\ (0, -3),\ \left(\dfrac{24}{13}, \dfrac{-15}{13}\right)$

以下, k は定数とする．

(3) 楕円 $x^2 + 4y^2 = 20$ と直線 $y = x + k$ の共有点の個数を調べよ．

共有点のx座標は

$$x^2 + 4(x+k)^2 = 20$$

$$5x^2 + 8kx + 4k^2 - 20 = 0$$

判別式をDとおくと

$$\frac{D}{4} = 16k^2 - 5(4k^2 - 20)$$

$$= -4(k^2 - 25)$$

$D>0$で2コ

$\therefore\ -5 < k < 5$で2コ

$D=0$で1コ

$\therefore\ k = \pm 5$で1コ

$D<0$で0コ

$\therefore\ k < -5,\ 5 < k$で0コ

(4) 双曲線 $x^2 - 2y^2 = 4$ と直線 $y = x + k$ の共有点の個数を調べよ．

共有点のx座標は

$$x^2 - 2(x+k)^2 = 4$$

$$-x^2 - 4kx - 2k^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + 4kx + 2k^2 + 4 = 0$$

判別式をDとする

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - (2k^2 + 4)$$

$$= 2k^2 - 4$$

$$= 2(k - \sqrt{2})(k + \sqrt{2})$$

$D>0$で2コ

$\therefore\ k < -\sqrt{2},\ \sqrt{2} < k$で2コ

$D=0$で1コ

$\therefore\ k = \pm\sqrt{2}$で1コ

$D<0$で0コ

$\therefore\ -\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$で0コ

3.3 接線 (復習)

(1) 点 $(0,-4)$ から放物線 $y = x^2 - 4x + 5$ に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ．また，接点の座標を求めよ．

直線の傾きを m とすると

$y = mx+4$ と表せる ①

共有点の x 座標は

$mx+4 = x^2-4x+5$

$x^2-(4+m)x+1=0$ ②

判別式 D とすると

$D = (4+m)^2-4$

$= m^2+8m+12$

$=(m+6)(m+2)$

接するので $D=0$． $\therefore$ $m=-2, -6$．

①，②より

接線 $y=-2x+4$，接点 $(1,2)$．

接線 $y=-6x+4$，接点 $(-1,10)$

(2) 点 $(0,5)$ から円 $x^2+y^2=5$ に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ．また，接点の座標を求めよ．

直線の傾きを m とすると

$y=mx+5$ と表せる． ①

共有点の x 座標は．

$x^2+(mx+5)^2=5$

$(1+m^2)x^2+10mx+20=0$ ②

判別式 D とする

$\frac{D}{4} = 25m^2-20\cdot(1+m^2)$

$=5m^2-20$

$=5(m-2)(m+2)$．

接するので $m=-2, 2$ $(\because D=0)$

①，②より

接線 $y=-2x+5$，接点 $(2,1)$

接線 $y=2x+5$，$(-2,1)$

3.4 接線 (練習)

(1) 点 $(0,3)$ から楕円 $x^2+2y^2=2$ に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ．また，接点の座標を求めよ．

直線を $y=mx+3$ とおく． ①

共有点の x 座標は

$x^2+2(mx+3)^2=2$

$(1+2m^2)x^2+12mx+16=0$ ②

判別式 D とすると

$\frac{D}{4} = 36m^2-16\cdot(1+2m^2)$．

$=4m^2-16 = 4(m-2)(m+2)$

接するので $D=0$． $\therefore$ $m=2, -2$

①，②より

接線 $y=2x+3$．接点 $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$

接線 $y=-2x+3$，接点 $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(2) 点 $(4,0)$ から放物線 $y^2=-4x$ に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ．また，接点の座標を求めよ．

接線を $y=m(x-4)$ とおく．

共有点の x 座標は

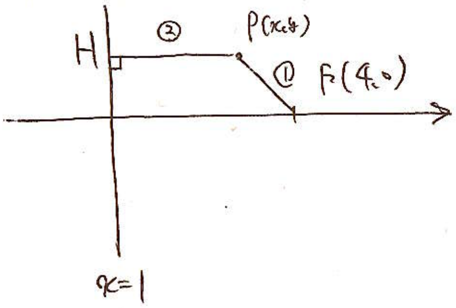
4 離心率

4.1 軌跡の復習

問題

点 $F(4,0)$ からの距離と, 直線 $x=1$ からの距離の比が以下を満たす点 P の軌跡を求めよ.

(1) $1:2$



点Pと $x=1$ の垂線を PH とする.

$PH^2 = (x-1)^2$

$PF^2 = (x-4)^2 + y^2$

条件より

$FP : PH = 1 : 2.$

$4PF^2 = PH^2.$

$4((x-4)^2 + y^2) = (x-1)^2$

$4y^2 + 4(x-4)^2 - (x-1)^2 = 0$

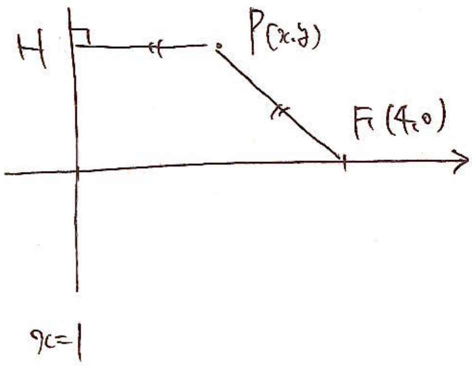
$4y^2 + 3x^2 - 30x + 63 = 0$

$4y^2 + 3(x-5)^2 - 12 = 0$

$\frac{y^2}{3} + \frac{(x-5)^2}{4} = 1.$

楕円 $\frac{y^2}{3} + \frac{(x-5)^2}{4} = 1$ //

(2) $1:1$



(1)と同様にして,

条件より

$FP = PH.$

$PF^2 = PH^2$

$(4-x)^2 + y^2 = (x-1)^2$

$y^2 = 6x - 15$

点Pは 放物線

$y^2 = 6x - 15$ 上をうごく //

(3) 2 : 1

(1)、(2)と同様に、

条件より

$FP : PH = 2 : 1$

$4PH^2 = PF^2$

$4(x-1)^2 = (4-x)^2 + y^2$

$3x^2 - y^2 - 12 = 0$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

求める軌跡は 双曲線

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

4.2 離心率について

定点 F からの距離と、F を通らない定直線 l からの距離 の比が $e : 1$ である点の軌跡は、

(i) $0 < e < 1$ のとき
F が1つの焦点である楕円

(ii) $e = 1$ のとき
F が焦点、l が準線である放物線

(iii) $1 < e$ のとき
F を焦点の1つとする双曲線

e：離心率 という。

5 媒介変数表示

5.1 復習

点 A$(2,-1)$ を通り, $\vec{d}=(-4,3)$ に平行な直線を媒介変数表示せよ. また, 媒介変数を消去した式で表せ.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 2-4t \\ y = 1+3t \end{cases}$$

tを消去して,

$$3x+4y-10=0$$

5.2 媒介変数について

曲線C上の点P(x,y)で,

$x=f(t)$
$y=g(t)$ の形で表すことを

媒介変数表示という。

また, tは媒介変数（パラメータ）という。

5.3 例

以下のように媒介変数表示された曲線について考える.

$$x = t-1$$
$$y = t^2+t$$

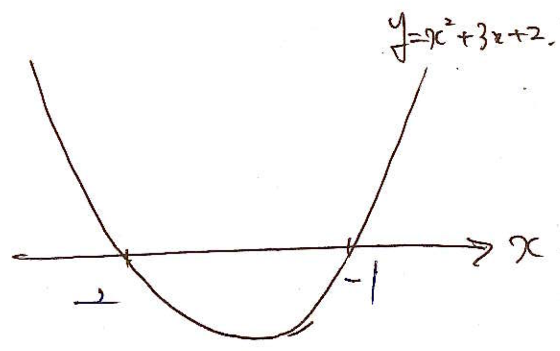
(1) $t=0,1,2,3$ のとき, 点 (x,y) はどのような値をとるか.

t	0	1	2	3
x	-1	0	1	2
y	0	2	6	12

(2) 媒介変数表示された曲線について, t を消去して x, y の式で表し, 概形を描く.

$x=t-1$.
$t=x+1$ より

$$y=(x+1)^2+(x+1)$$
$$=x^2+3x+2$$



5.4 放物線の頂点の軌跡

例題

放物線 $y = x^2 + 2tx - 2t$ の頂点は，t の値が変化するときどのような曲線を描くだろうか．

(1) 頂点を $\mathrm{P}(x, y)$ とおくとき，x, y をそれぞれ t を用いて表せ．

$$y = x^2 + 2tx - 2t$$

$$= (x+t)^2 - t^2 - 2t$$

$$\therefore \begin{cases} x = -t \\ y = -t^2 - 2t \end{cases}$$

(2) 放物線の頂点が描く曲線を求めよ．

(1) の結果から，t を消去

$$y = -x^2 + 2x.$$

問題

放物線 $y = -x^2 + 4tx + 2t$ の頂点は，t の値が変化するときどのような曲線を描くだろうか．

$$y = -x^2 + 4tx + 2t$$

$$= -(x-2t)^2 + 4t^2 + 2t.$$

$\therefore$ 頂点 $\mathrm{P}(x, y)$ は

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t^2 + 2t \end{cases}$$

t 消去して

$$y = x^2 + x.$$

$\therefore$ 頂点は 放物線 $y = x^2 + x$ 上を動く．

アイデア $\boxed{\begin{aligned}&\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.\\&\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}\end{aligned}}$

思考

どのように θ を消すか?

5.5 一般角 θ を媒介変数に含む曲線

例題

以下の媒介変数表示は，どのような図形を表すか.

(1) $x = 2\sin\theta, y = 2\cos\theta$

$$\sin\theta = \frac{1}{2}x$$
$$\cos\theta = \frac{1}{2}y.$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から.

$$x^2 + y^2 = 4.$$

$\therefore$ 中心 原点，半径2の円

(2) $x = 2\sin\theta, y = 3\cos\theta$

$$\frac{1}{2}x = \sin\theta.$$
$$\frac{1}{3}y = \cos\theta.$$

よって $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

$\therefore$ 楕円 $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

(3) $x = \dfrac{3}{\cos\theta}, y = 2\tan\theta$

$$\frac{1}{3}x = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \frac{1}{2}y = \tan\theta.$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta} + 1 = \tan^2\theta \text{ より}$$

$$\frac{x^2}{3^2} + 1 = \frac{y^2}{2^2}$$

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = -1.$$

双曲線
$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = -1$$

5.6 逆算的に...

(1) 円 $x^2+y^2=4^2$

$$\begin{cases} x = 4\sin\theta \\ y = 4\cos\theta \end{cases}$$

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases}$$

(3) 双曲線 $\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$

$$\frac{x^2}{2^2} = \frac{y^2}{3^2} + 1.$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{\cos\theta} \\ y = 3\tan\theta \end{cases}$$

5.7 平行移動

以下の媒介変数表示は，どのような図形を表すか答えよ．また，概形を描け．

(1) $x = 2\cos\theta - 1, y = 2\sin\theta + 3$

変形して

$$\cos\theta = \frac{x+1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y-3}{2}.$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$$\frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1.$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 2^2.$$

中心 $(-1, 3)$. 半径2の円

(2) $x = 3\cos\theta + 1, y = 2\sin\theta - 2$

変形して

$$\cos\theta = \frac{x-1}{3}.$$

$$\sin\theta = \frac{y+2}{2}.$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$$\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y+2)^2}{2^2} = 1$$

楕円 $\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y+2)^2}{2^2} = 1$

(3) $x = \dfrac{2}{\cos\theta} + 1, y = \tan\theta - 3$

変形して

$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{2}(x-1).$$

$$\tan\theta = y+3.$$

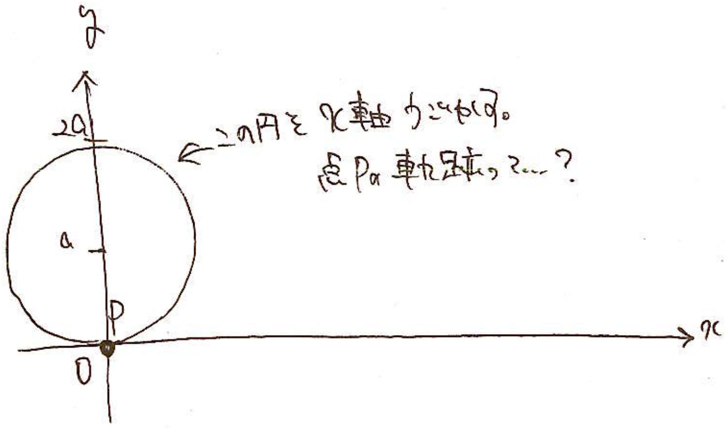
$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ より

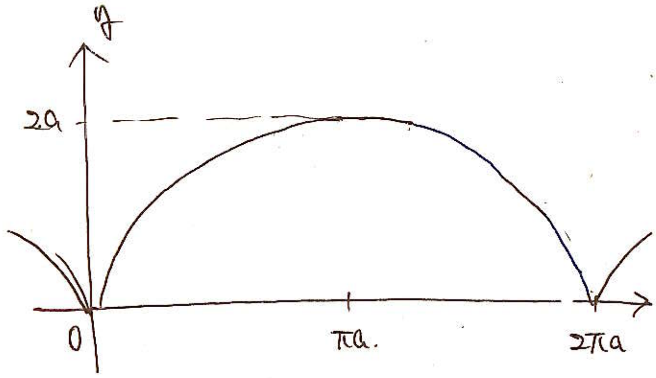
$$(y+3)^2 + 1 = \frac{(x-1)^2}{2^2}$$

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} - (y+3)^2 = 1.$$

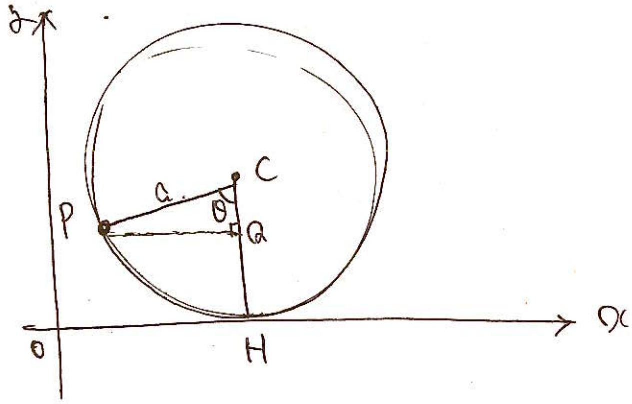
双曲線 $\frac{(x-1)^2}{2^2} - (y+3)^2 = 1$

5.8 サイクロイド





これを媒介変数表示してみる。



点P(x, y)とおく。

$$PQ = a\sin\theta$$
$$CQ = a\cos\theta$$
$$CH = a$$
$$PH = a\theta = OH$$

より

$$x = OH - PQ = a\theta - a\sin\theta$$

$$y = CH - CQ = a - a\cos\theta$$

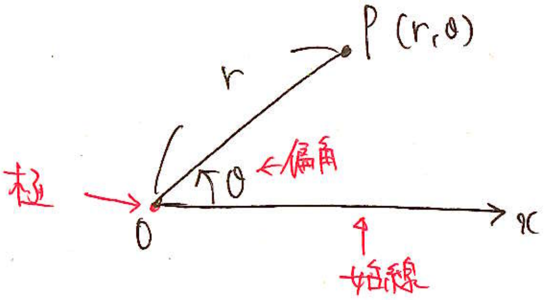
サイクロイド

$$\therefore \boxed{\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}}$$

がサイクロイドの媒介変数表示。

6 極座標と極方程式

6.1 極座標とは



座標を、OPの長さ、x軸と半直線OPのなす角θ で P(r, θ) と表すことができる。

これを 極座標 という。

$(r \in \mathbb{R})$

6.2 直交座標とは

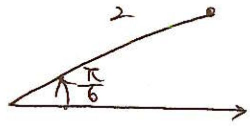
今までの x軸、y軸 で考える

(x, y) のこと

問題

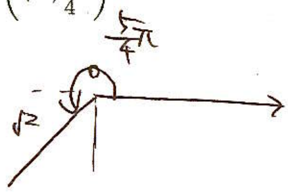
極座標が次のような点の直交座標を求めよ.

(1) $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$



$(1, \sqrt{3})$

(2) $\left(\sqrt{2}, \frac{5}{4}\pi\right)$



$(-1, -1)$

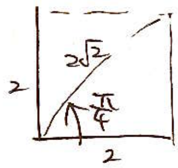
(3) $(3, \pi)$

$(-3, 0)$

問題

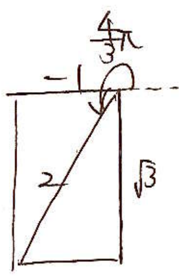
直交座標が次のような点の極座標を求めよ.

(1) $(2, 2)$



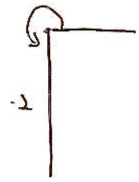
$\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

(2) $(-1, \sqrt{3})$



$\left(2, \frac{4}{3}\pi\right)$

(3) $(0, -2)$



$\left(2, \frac{3}{2}\pi\right)$

6.3 極方程式

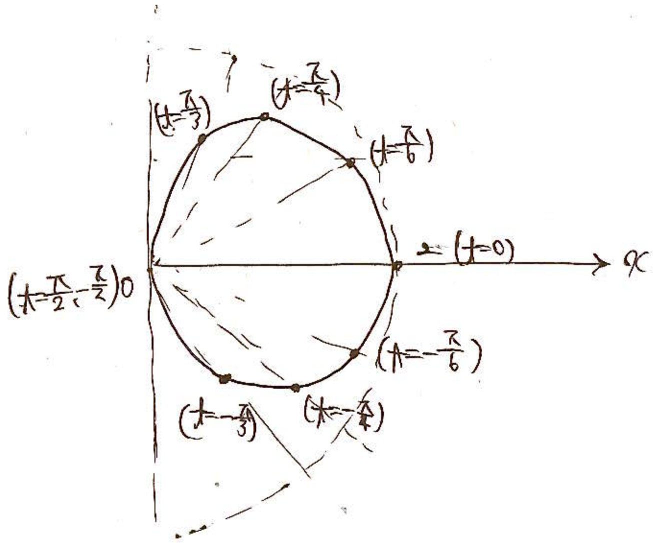
以下の方程式について考えてみる.

$$r = 2\cos\theta$$

まずは, 表を埋めていく.

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0

この表を元に, グラフを描こう.



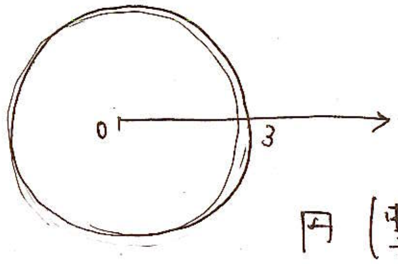
曲線 $F(r,\theta)=0$, や $r=f(\theta)$.

極方程式という.

問題

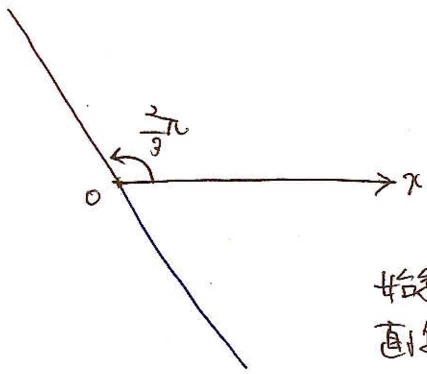
以下の曲方程式で表される曲線について調べよう.

(1) $r = 3$



円 (中心 O, 半径 3).

(2) $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$

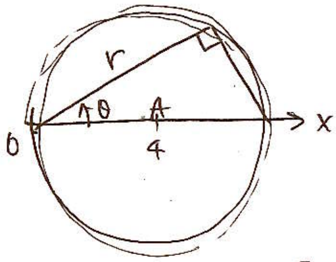


始線 Ox となす角 $\frac{2}{3}\pi$ の直線

問題

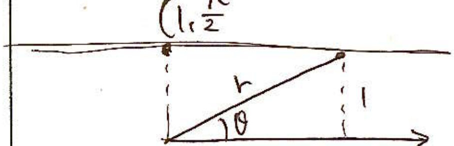
平面上の曲線を曲方程式で表す.

(1) 中心 A の極座標が $(4, 0)$ である半径 4 の円を, 極方程式で表せ.



$$r = 4\cos\theta$$

(2) 極方程式が $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ である点 A を通り, 始線に平行な直線を, 極方程式で表せ.



$$\frac{1}{r} = \sin\theta$$

$$r\sin\theta = 1.$$

6.4 さまざまな曲線

直交座標の x, y の方程式で表された曲線を極方程式で表せ.

(1) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を極方程式で表せ.

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$ より

$r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$

$r^2\cos 2\theta = 1$ //

(2) 双曲線 $x^2 - 2y^2 = 4$ を極方程式で表せ.

同上.

$r^2\cos^2\theta - 2r^2\sin^2\theta = 4$

$\Leftrightarrow r^2(1 - \sin^2\theta) - 2r^2\sin^2\theta = 4$

$\Leftrightarrow r^2(1 - 3\sin^2\theta) = 4$

$\Leftrightarrow r^2\left(1 - \frac{3}{2}(1 - \cos 2\theta)\right) = 4$

$\Leftrightarrow r^2(2 - 3(1 - \cos 2\theta)) = 8$

$\Leftrightarrow r^2(3\cos 2\theta - 1) = 8$ //

(3) 楕円 $x^2 + 2y^2 = 4$ を極方程式で表せ.

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$ より

$r^2\cos^2\theta + 2r^2\sin^2\theta = 4$

$r^2(1 + \sin^2\theta) = 4$

$r^2(3 - \cos 2\theta) = 8$ //

(4) 楕円 $4x^2 + y^2 = 4$ を極方程式で表せ.

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$ より

$4r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 4$

$r^2(4 - 3\sin^2\theta) = 4$

$r^2\left(4 - \frac{3}{2}(1 - \cos 2\theta)\right) = 4$

$r^2(3\cos 2\theta + 5) = 8$ //

問題

以下の極方程式の表す曲線を，直交座標の x, y の方程式で表せ．

(1) $r = 2(\cos\theta + \sin\theta)$

両辺にrかけて

$r^2 = 2(r\cos\theta + r\sin\theta).$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ より

$x^2 + y^2 = r^2$

$\therefore x^2 + y^2 = 2x + 2y$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2.$ //

(2) $r(\cos\theta + \sin\theta) = 1$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$ より

$x + y = 1$ //

(3) $r = 2\sin\theta$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$. より $x^2 + y^2 = r^2$

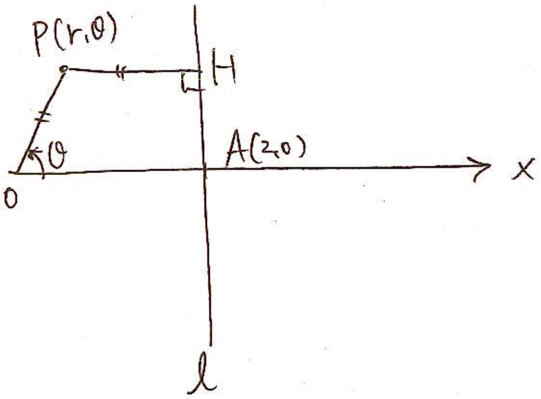
$r^2 = 2r\sin\theta$ より

$x^2 + y^2 = 2x.$

$(x-1)^2 + y^2 = 1$ //

問題

(1) 始線 OX 上の点 A(2,0) を通り，始線に垂直な直線を l とする．極 O を焦点，l を準線とする放物線の極方程式を求めよ．



図のように，P，Hをとると．

OP=PH.

ここで OP=r.

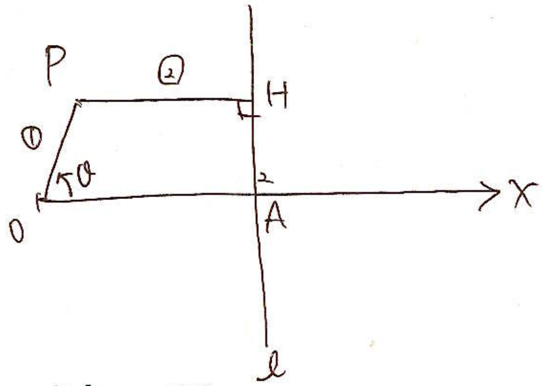
$PH=2-r\cos\theta$

$\therefore\ r=2-r\cos\theta$

$$r=\frac{2}{1+\cos\theta}$$

//

(2) 始線 OX 上の点 A(2,0) を通り，始線に垂直な直線を l とする．点 $P(r,\theta)$ から l に下ろした垂線を PH とするとき，$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}=\dfrac{1}{2}$ であるような点 P の軌跡を，極方程式で表せ．



$P(r,\theta)$ とする．

$OP=r$.

$PH=2-r\cos\theta$.

$\dfrac{OP}{PH}=\dfrac{1}{2}$ より

$$\frac{r}{2-r\cos\theta}=\frac{1}{2}$$

$$2r=2-r\cos\theta$$

$$r=\frac{2}{2+\cos\theta}$$

//