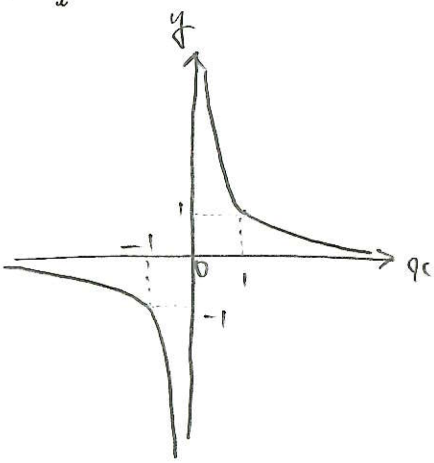
1　2つの関数

すべて復習と思えるように．

1.1　分数関数

グラフを描け．また，定義域と値域を求めよ．

(1) $y = \dfrac{1}{x}$

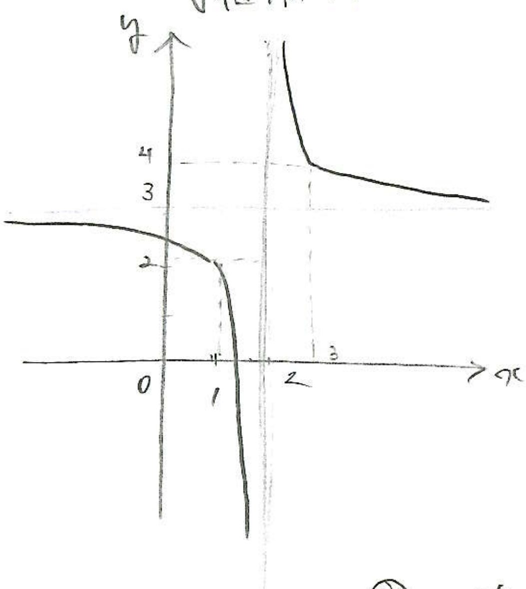


定 0を除く全ての実数

値 0を除くすべての実数

(2) $y = \dfrac{1}{x-2} + 3$

$y = \frac{1}{x}$ を　x軸方向：2
　　　　　　　y軸方向 3．

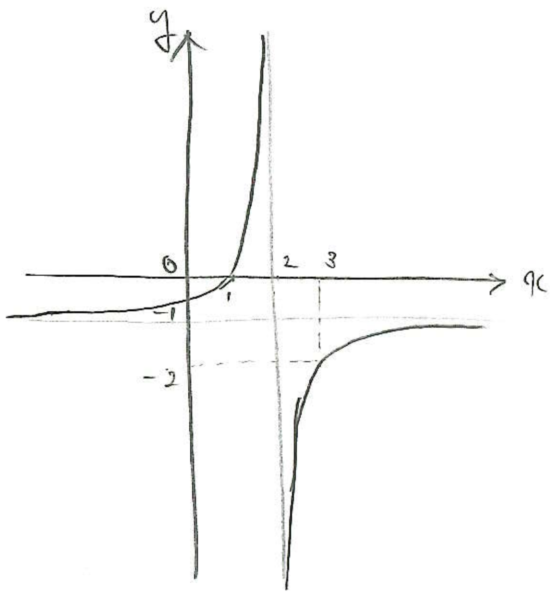


定 2を除くすべての実数

値 3を除くすべての実数．

(3) $y = -\dfrac{1}{x-2} - 1$

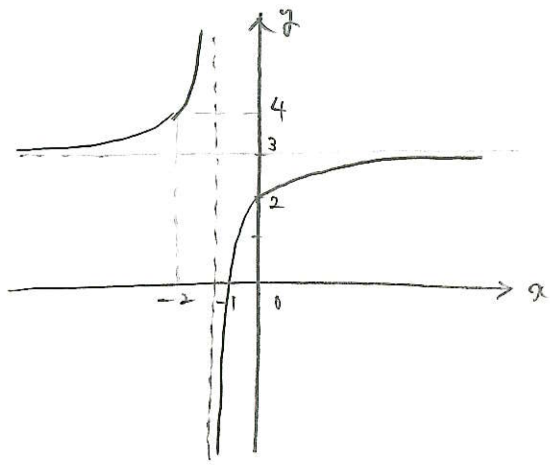
$y = -\frac{1}{x}$ を　x軸方向 2
　　　　　　　y軸方向 −1．



(4) $y = \dfrac{3x+2}{x+1}$

$= \dfrac{3(x+1)-1}{x+1} = -\dfrac{1}{x+1} + 3.$

$y = -\frac{1}{x}$ を　x軸 −1
　　　　　　　y軸 3．



定 −1を除くすべての実数

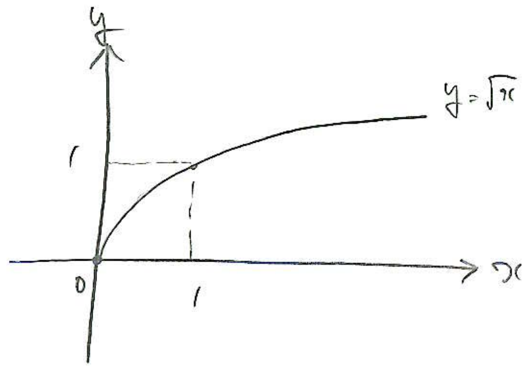
値 3を除くすべての実数．

1.2　無理関数

グラフを描け．また，定義域と値域を求めよ．

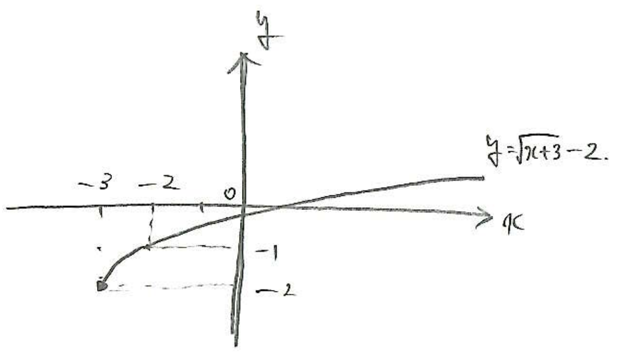
(1) $y = \sqrt{x}$

定　$0 \leq x$　　値　$0 \leq y$



(2) $y = \sqrt{x+3} - 2$

$y = \sqrt{x}$ のグラフを　x軸方向 -3
　　　　　　　　　　　　y軸方向 -2

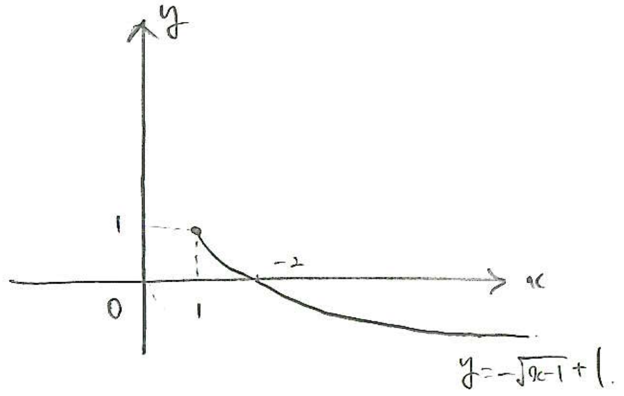


定　$-3 \leq x$

値　$-2 \leq y$

(3) $y = -\sqrt{x-1} + 1$

$y = -\sqrt{x}$ を　x軸方向 1.
　　　　　　　y軸方向 $+1$



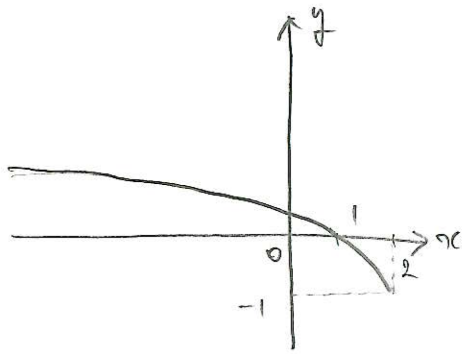
定　$1 \leq x$

値　$y \leq 1$.

(4) $y = \sqrt{-x+2} - 1$

$y = \sqrt{-(x-2)} - 1$.

$y = \sqrt{-x}$ を　x軸方向 2
　　　　　　　y軸方向 -1.



定　$x \leq 2$.

値　$-1 \leq y$.

1.3 関数の値域

(1) 関数 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ $(-1 \leqq x < 2)$ のグラフを描き, 値域を求めよ.

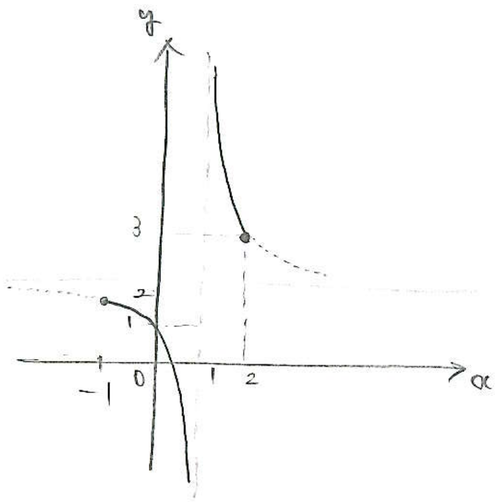
$$y=\frac{2x-1}{x-1}$$

$$=\frac{2(x-1)+1}{x-1}$$

$$=\frac{1}{x-1}+2.$$

これは $y=\frac{1}{x}$ のグラフを

x軸方向 : 1.
y軸 〃 : 2
平行移動したもの.



さて, $x=-1$ のとき $y=\frac{3}{2}$.
$x=2$ のとき $y=3$.

∴ 値域は

$x \leq \frac{3}{2}$, $3 \leq x$

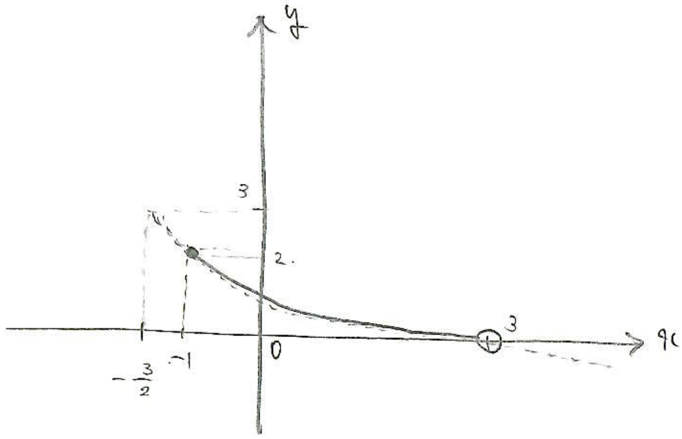
(2) 関数 $y=-\sqrt{2x+3}+3$ $(-1 < x \leqq 3)$ のグラフを描き, 値域を求めよ.

$$y=-\sqrt{2x+3}+3$$

$$=-\sqrt{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}+3.$$

これは $y=-\sqrt{2x}$ のグラフを

x軸方向 : $-\frac{3}{2}$
y軸方向 : 3
平行移動したもの.



さて $x=-1$ のとき $y=2$
$x=3$ のとき $y=0$.

値域は

$0 < x \leq 2$

1.4 グラフの共有点, 不等式

(1) 関数 $y = \dfrac{1}{x-2}$ のグラフと直線 $y = x$ の共有点の x 座標を求めよ.

共有点の x 座標は

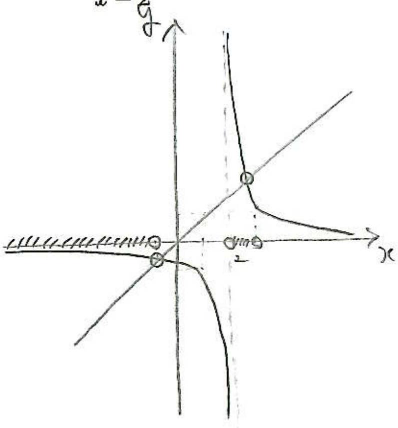
$$\frac{1}{x-2} = x$$

$$1 = x(x-2)$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\underline{x = 1 \pm \sqrt{2}}$$

(2) 不等式 $\dfrac{1}{x-2} > x$ を解け.



グラフより

$$\underline{x < 1 - \sqrt{2}, \quad 2 < x < 1 + \sqrt{2}}$$

$1 > x(x-2)$ とはしない!!

(because.. $x-2$ って正・負どっち?)

必ずグラフで考える!

(3) 関数 $y = \sqrt{x+6}$ のグラフと直線 $y = x$ の共有点の x 座標を求めよ.

共有点の x 座標は

$$\sqrt{x+6} = x.$$

両辺2乗して

$$x + 6 = x^2$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x = 3, -2.$$

$x = -2$ は不適

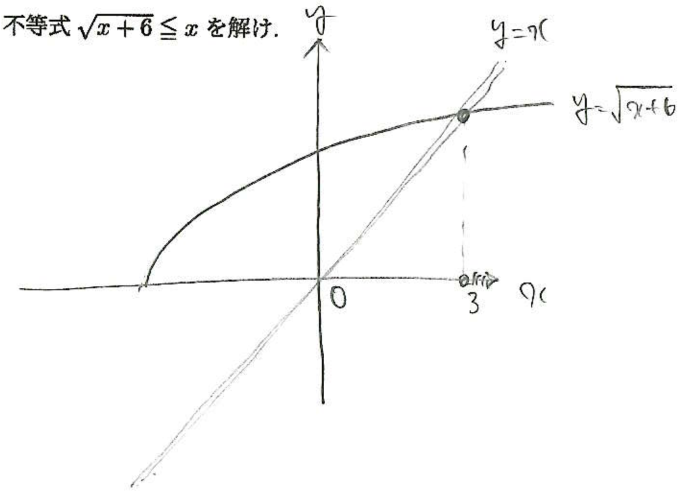
$$\therefore \underline{x = 3}$$

$\sqrt{x+6} = x \Rightarrow x + 6 = x^2$ は真

$\Leftarrow$ は偽.

「2乗する」という操作をする際は必ず逆の確認を!!

(4) 不等式 $\sqrt{x+6} \leqq x$ を解け.



グラフより

$$\underline{3 \leqq x}$$

1.5 方程式, 不等式

(1) 方程式 $\dfrac{2}{x(x+2)} = \dfrac{x}{2(x+2)}$ を解け.

条件から, $x \neq 0, -2$.

$$\frac{2}{x(x+2)} = \frac{x}{2(x+2)}$$

$$\iff \frac{2}{x(x+2)} - \frac{x}{2(x+2)} = 0$$

$$\iff \frac{1}{x+2}\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\iff \frac{1}{x+2} \cdot \frac{4-x^2}{2x} = 0$$

$$\iff \frac{(2-x)\cancel{(2+x)}}{2x\cancel{(x+2)}} = 0$$

$$\therefore x = 2$$

(2) 方程式 $\sqrt{10-x^2} = x+2$

条件から $10 - x^2 \geq 0$, $x+2 \geq 0$.

$x^2 - 10 \leq 0$, $x \geq -2$.

$-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$. $x \geq -2$.

$\therefore -2 \leq x \leq \sqrt{10}$. —(*)

ここで.

$$\sqrt{10-x^2} = x+2.$$

両辺を2乗して

$$10 - x^2 = (x+2)^2$$

$$2x^2 + 4x - 6 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$x = -3, 1.$$

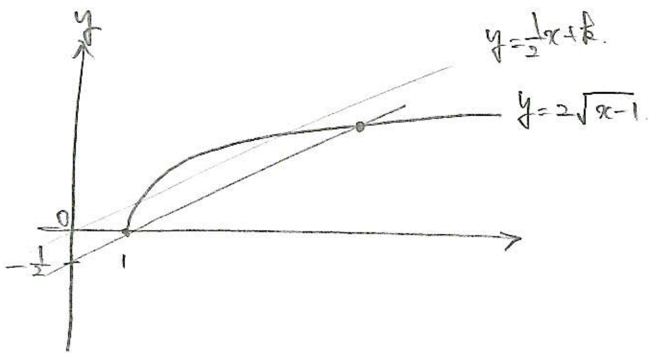
$x=-3$は(*)を満たさないので

$$x = 1$$

1.6 解の個数

(1) 方程式 $2\sqrt{x-1} = \dfrac{1}{2}x + k$ が異なる 2 つの実数解をもつように, 実数 k の値の範囲を求めよ.

$y = 2\sqrt{x-1}$ と $y = \frac{1}{2}x + k$ のグラフは下図



$k = -\frac{1}{2}$ のとき、

2曲線は $y = 2\sqrt{x-1}$ の端点を含み
2点で交わる。

図から、

$k < -\frac{1}{2}$ では 1コの共有点。

$2\sqrt{x-1} = \frac{1}{2}x + k$ について

$4\sqrt{x-1} = x + 2k$

$x^2 + (4k-16)x + 4k^2 + 16 = 0$

判別式をDとすると

$\frac{D}{4} = (2k-8)^2 - (4k^2+16)$

$= -32k + 48$

接するのは $\frac{D}{4} = 0$ 　∴ $k = \frac{3}{2}$

以上より

$\frac{3}{2} < k$ で 0コ

$k = \frac{3}{2}$, $k < -\frac{1}{2}$ で 1コ

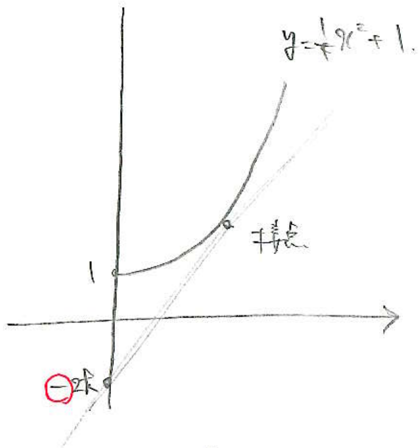
$-\frac{1}{2} \leq k < \frac{3}{2}$ で 2コ

<別解作れない…?> try.

$y = 2\sqrt{x-1}$, $y = \frac{1}{2}x + k$ について、逆関数は

$y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ 　　$y = 2(x-k)$

$(x \geq 0)$



$y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ 　$(x \geq 0)$

$y' = \frac{1}{2}x$

傾き2となるのは $x = 4$ のとき。

このときの接点は $(4, 5)$ で、

$y = 2(x-k)$ が接するのは

$5 = 2\cdot(4-k)$ 　$k = \frac{3}{2}$ のとき。

また $y = 2(x-k)$ が $(0, 1)$ 通るのは

$1 = 2(-k)$ 　$k = -\frac{1}{2}$ のとき。

よって図から、

$\frac{3}{2} < k$ で 0コ

$k = \frac{3}{2}$, $k < -\frac{1}{2}$ で 1コ

$-\frac{1}{2} \leq k < \frac{3}{2}$ で 2コ

できた。

切片マイナスk に注意!!

2 逆関数と合成関数

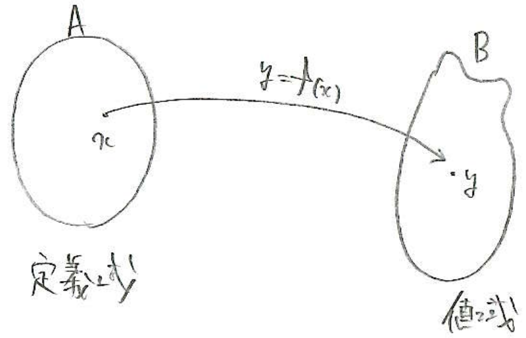
2.1 復習

そもそも, 関数って...

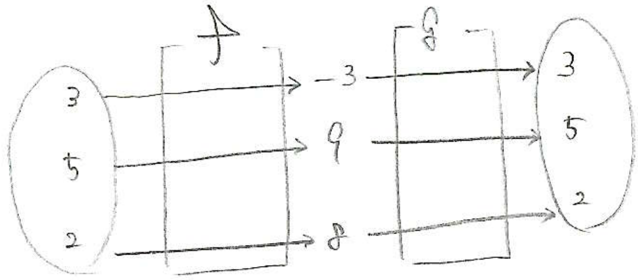
関数 $y=f(x)$ とは、

「ある x の値に対し、y の値を対応させる」

という関係のこと。



2.2 逆関数



「関数 $y=g(x)$ は

関数 $y=f(x)$ の逆関数」

逆関数とは…

f で飛ばしてた値を、もとにもどすような関数のこと。

例) $y=2x+1$ の逆関数は…

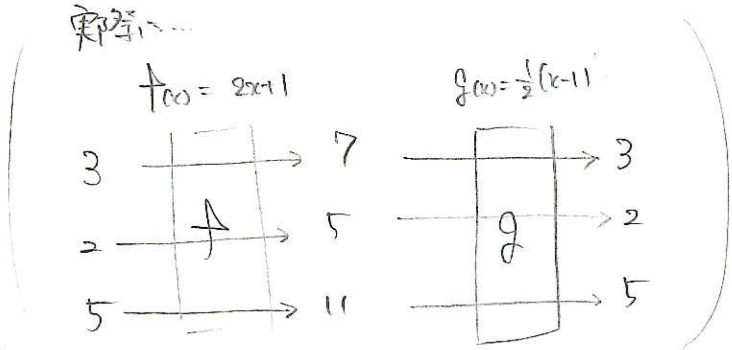
「x の値を2倍して1たす。」

☆ 逆の操作をすればいい

1引いて $\frac{1}{2}$ 倍.

i.e. $y=(x-1)\cdot\frac{1}{2}$

実際に…



$y=f(x)$ の逆関数 $y=g(x)$ を $y=f^{-1}(x)$ と書く.

性質

- $y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ では、定義域と値域が入れ替わる。
- $y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフは $y=x$ に関して対称。

☆ 2つ目の性質から、

$y=f^{-1}(x)$ を求めるには、$y=f(x)$ の x と y を

入れ替えて、$y=$◯ の形にすればいい。

2.3 問題

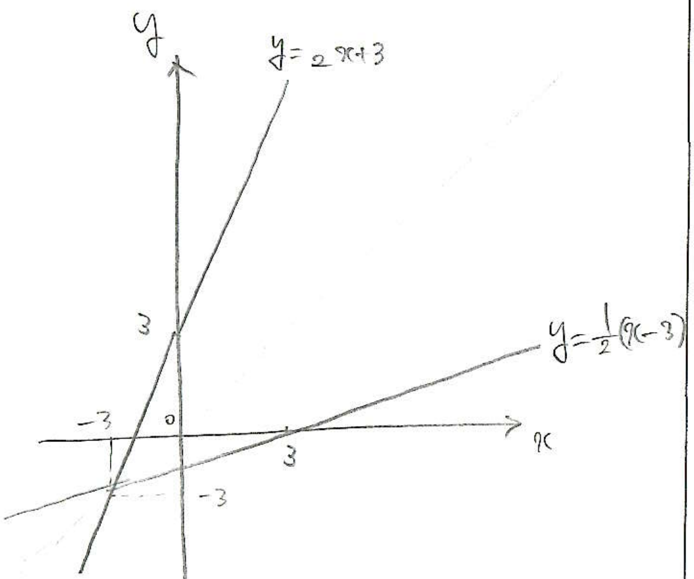
逆関数を求めよ．また，(1)~(3) については，もとのグラフと逆関数のグラフを同一座標平面上に表せ．

(1) $y=2x+3$

式変形して

$x=\frac{1}{2}(y-3)$.

∴ 逆関数は　$y=\frac{1}{2}(x-3)$.

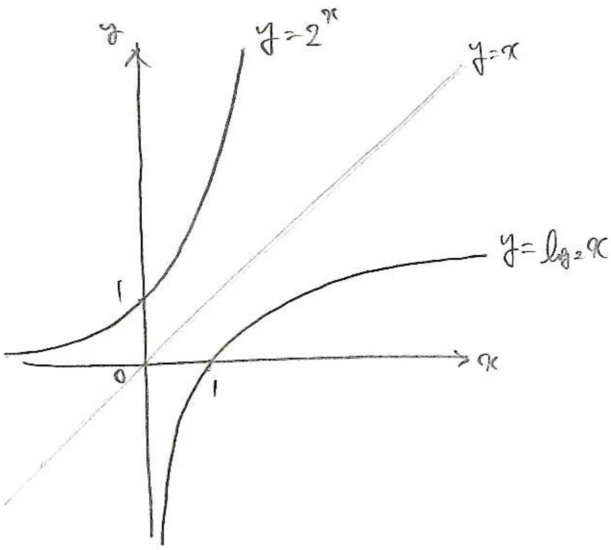


(2) $y=2^x$

式変形して

$x=\log_2 y$.

∴ 逆関数は　$y=\log_2 x$



(3) $y=x^2+1$ $(x\geqq 0)$

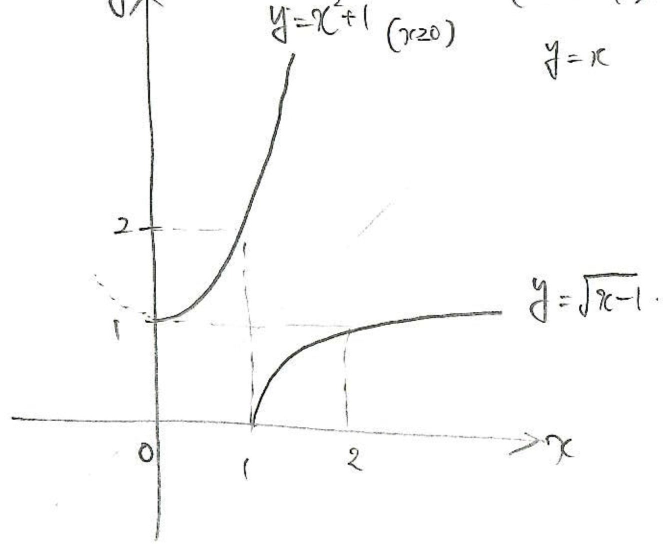
式変形して.

$x^2=y-1$.

$x=\sqrt{y-1}$　($x\geq 0$ より).

∴ 逆関数は　$y=\sqrt{x-1}$.

($x\geq 1$).



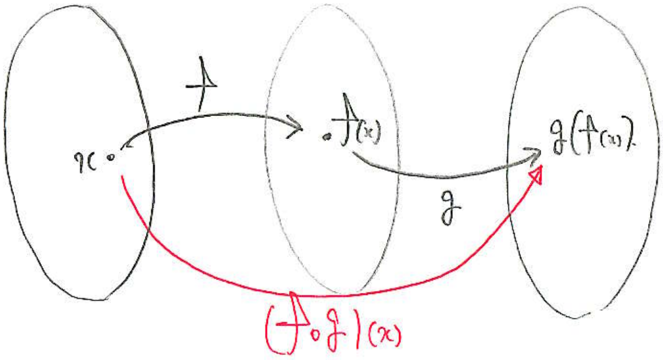
(4) $y=\dfrac{x+2}{3x-1}$

式変形して.　$x=\dfrac{y+2}{3y-1}$　($y\neq\frac{1}{3}$).

∴ 逆関数は

$y=\dfrac{x+2}{3x-1}$　($x\neq\frac{1}{3}$).

2.4 合成関数



一般に..

・交換法則は成立するとは限らない.

・結合法則は成立

2.5 問題

$f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2 - 3$, $h(x) = 2^x$ とする. 以下の合成関数を求めよ.

(1) $(f \circ g)(x)$

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= f(x^2-3) \\
&= (x^2+3)+2 \\
&= \underline{x^2+5}
\end{aligned}
$$

(2) $(g \circ f)(x)$

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= g(x+2) \\
&= (x+2)^2-3 \\
&= \underline{x^2+4x+1}
\end{aligned}
$$

(3) $(h \circ (g \circ f))(x)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x^2+4x+1$ より

$$
\begin{aligned}
(h \circ (g \circ f))(x) &= h(x^2+4x+1) \\
&= \underline{2^{x^2+4x+1}}
\end{aligned}
$$

(4) $((h \circ g) \circ f)(x)$

$(h \circ g)(x) = 2^{x^2-3}$ より

$$
\begin{aligned}
((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) \\
&= 2^{(x+2)^2-3} \\
&= \underline{2^{x^2+4x+1}}
\end{aligned}
$$

2.6 問題

(1) $ab \neq 1$ を満たす定数 a, b について，関数 $y = \dfrac{bx+1}{x+a}$ が，その逆関数と一致するための条件を求めよ．

$$y = \frac{bx+1}{x+a}$$

$$y(x+a) = bx+1.$$

$$(y-b)x = 1-ay$$

$$\therefore x = \frac{1-ay}{y-b}$$

$\therefore$ 逆関数は $y = \dfrac{1-ax}{x-b}$

一致するには，すべての x で（定義域内）

$\dfrac{bx+1}{x+a} = \dfrac{1-ax}{x-b}$ をみたす

$$(bx+1)(x-b) = (1-ax)(x+a).$$

$$(a+b)x^2 + (a^2-b^2)x - (a+b) = 0.$$

$$(a+b)(x^2 + (a-b)x - 1) = 0.$$

恒等式より $a+b=0$

ここで，$ab \neq 1$ より

$-a^2 \neq 1$ で ok

$\therefore$ $a = -b$

(2) 関数 $y = \dfrac{ax+b}{x+2}$ のグラフは点 $(1,1)$ を通り，また，この逆関数はもとの関数と一致する．定数 a, b の値を求めよ/

$(x \neq -2)$

$(1,1)$ 通るので

$$1 = \frac{a+b}{1+2}$$

$a+b=3$. —※

また，$f(x) = \dfrac{ax+b}{x+2}$ とおくと

$$(f \circ f)(x) = x.$$

$$\frac{a\frac{ax+b}{x+2} + b}{\frac{ax+b}{x+2} + 2} = x$$

$$\iff \frac{a(ax+b) + b(x+2)}{ax+b+2(x+2)} = x$$

$$\iff a(ax+b) + b(x+2) = x(ax+b+2x+4)$$

$$(a+2)x^2 + (4-a^2)x - ab - 2b = 0$$

$$(a+2)(x^2 + (2-a)x - b) = 0.$$

恒等式なので $a+2=0$.

$\therefore a = -2$.

※より $b=5$