あみだくじと数学

Takenaga Koudai

2021 年 6 月 30 日

1　あみだくじと数学

1.1　あみだくじについて

日本では決め事をするときによくあみだくじを使う．ここで，次の疑問点にぶつかる．

疑問

あみだくじはどんなパターンでも再現できるのか？

疑問

あみだくじは行先が被ることはないのか？

疑問

あみだくじでの決め事は公平なのか？

この疑問を数学的に解決していく．
まずは，あみだくじとは何なのかを定義することから始める．

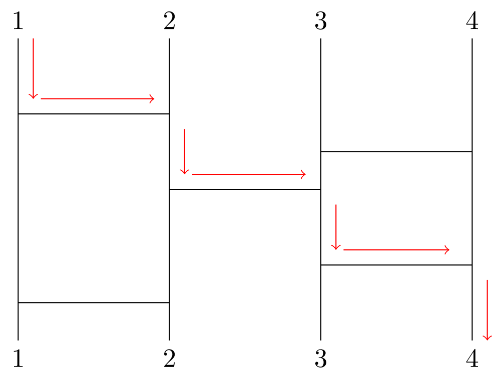
定義

n 本の長さの等しい線分を縦に平行になるように引く．
隣接する縦線間に任意の数 n だけ，縦線とは垂直に線分を引く．ただし，異なる横線分は交わらないように配置し，各々の高さは異なるように配置しておく．
$1 \sim n$ の n 個の異なる数字を各縦線に与える．i 番の縦線に対し上から下に，以下の条件を満たすようにたどる．

縦線につながった場合は必ず，その横線に従いとなりの縦線に移る．

結果として最下段に辿り着き，左から j 番目であったとき，i を j に対応させる写像を σ とする．
この対応 $\sigma : M_n \to M_n$ をあみだくじという．

例



$1 \to 4$
$2 \to 2$
$3 \to 3$
$4 \to 4$

1.2　あみだくじがどんな組み合わせも実現できる

定理 1

どんな組み合わせのあみだくじも実現可能である．

＜証明＞

初めの縦線の番号割り当てを左から順に行うことにする (これは一般性を失わない)．

このとき，任意の番号を最下段の 1 に移すことができることを示せば良い．

実際に，これを示せば，上記操作で加えた横線よりも下で，任意の数を 2 に移し，同じ操作で $3, 4, \cdots, n$ に移すことができ，任意の組み合わせのあみだくじが作成できる．

さて，

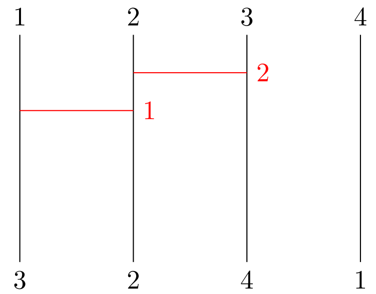
- 1 は横線を引くことなく 1 に移すことができる．
- 2 は，1 と 2 の間に 1 本の横線を引くことで 1 に移すことができる．
- 3 は，1 と 2 の間に 1 本，その横線より上で，2 と 3 の間に 1 本引くことで 1 に移すことができる．
- i は，1 と 2 の間に 1 本，その線より上で 2 と 3 の間に 1 本，$\cdots$，それより上に $i-1$ と i の間に 1 本引くことで 1 に移すことができる．

よって，任意の数字を 1 に移すことができることが示たので，証明は終了．

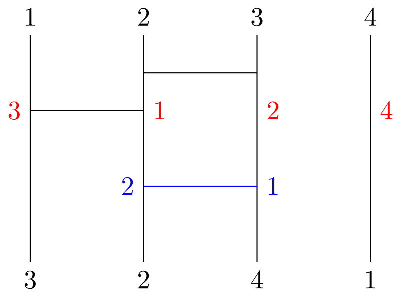
□

以下で，実際に好きな組み合わせのあみだくじの作成を行なってみる．

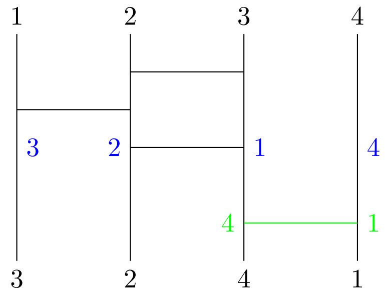
(1)　3 を最左へ



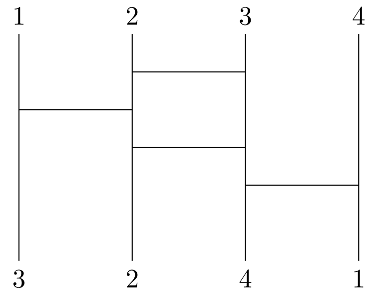
(1)　2 を左から 2 番目へ



(3)　4 と 1 を入れ替え

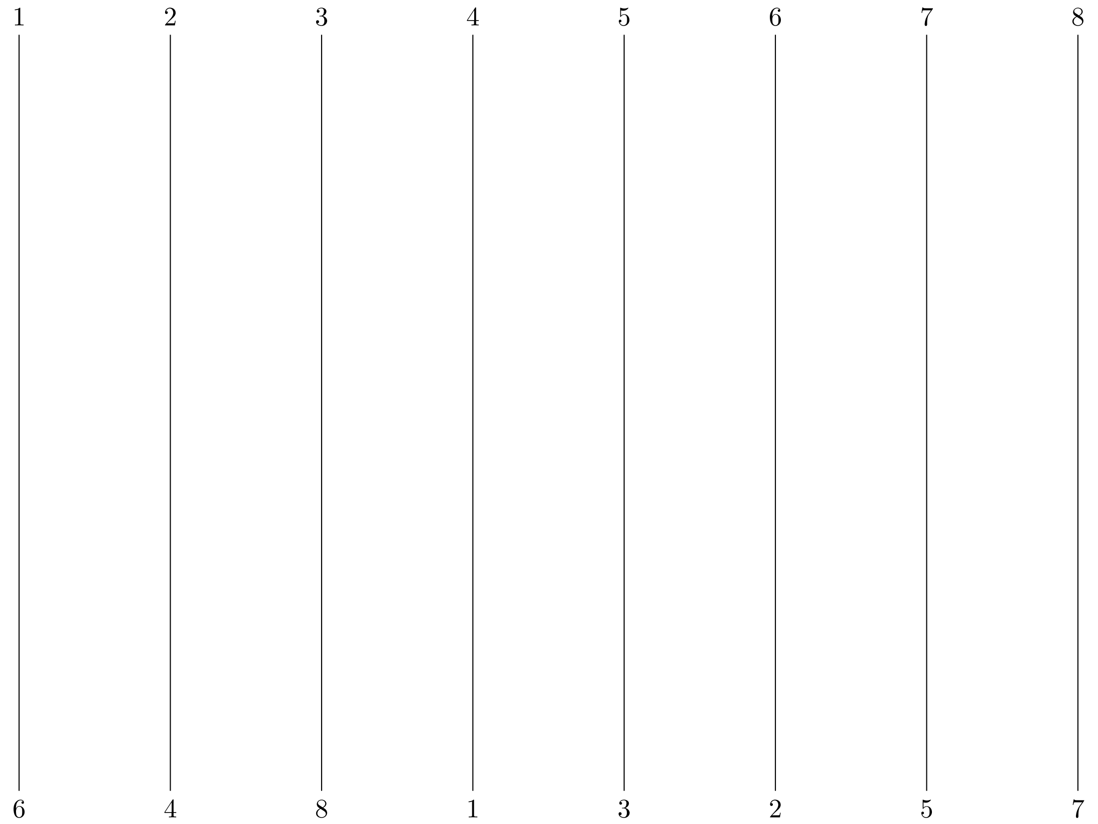


(4)　完成



問題

下のあみだくじを完成させよ．



これを解いてわかるように，スタートとゴールが分かっていればうまくあみだくじの結果操作ができてしまう．つまり，インチキが起こりうるのである．

1.3　あみだくじで行き先は被らない

さて，このことは当たり前であると感じるものではあるが，もし成立しなかったら大変なことでもある．例えば席替えであみだくじをするとしたときに，選んだスタートが違うのに席が一致してしまったら席替えが成立しない．ここでは，数学できちんと証明してみる．

定理 2

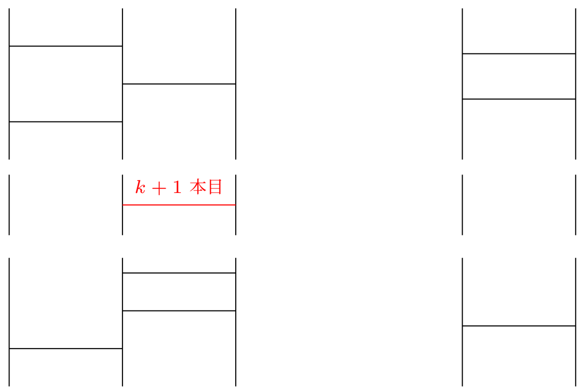
あみだくじの対応は一対一である (i.e. 行き先が被ることはない).

＜証明＞

スタートの数字の割り当ては左から順に行うことにする．

横線の数 m による帰納法で示す．

1. $m=0$ のとき．
   となりの縦線に移ることがなく，i を i に移すので，一対一である．
2. $m=k$ で成立すると仮定する．
   $k+1$ 本目を加えて，その上下であみだくじを分解する．



   分解したあみだくじに対し，上から順に $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ とする．帰納法の仮定から，それぞれは一対一対応である．一対一対応を組み合わせても性質は保たれることから，$k+1$ でも成立する．

よって，あみだくじの対応は一対一である．

□

1.4 あみだくじは公平？

問題設定

縦線の数を $m+1$ 本，横線の数を n 本とする．
スタート地点の番号は左から順に $0, 1, \cdots, m$ とする (ゴールも同様)．
地点 a からスタートして b に到着する確率を $P_{m,n}(a,b)$ で表すことにする．

上の問題設定で実現され得るあみだくじは m^n 通りある (簡単にわかるので，なぜか考えよ)．
横線の本数を 0 本から徐々に増やしながら具体例を考える．

1. $n=0$ のとき
   このときは，横線が 1 本も引かれていない状況であるので，同じ番号に行く確率は 1，違う番号に行く確率は 0 である．つまり，

$$\begin{aligned} P_{m,0}(a,a) &= 1 \\ P_{m,0}(a,b) &= 0 \quad (a \neq b) \end{aligned}$$

2. $n=1$ のとき
   0-1 間，$(m-1)$-m 間に横線が引かれる確率が $\dfrac{1}{m}$ であるので，

$$P_{m,1}(0,0) = P_{m,1}(m,m) = 1 - \frac{1}{m}$$

   2 本の縦線の間に横線が引かれる確率が $\dfrac{1}{m}$ なので，$0 < a < m$ に対しては

$$P_{m,1}(a,a) = 1 - \frac{2}{m}$$

   さて，スタートとゴールの縦線が異なる場合を求めるが，横線は 1 本しか引かれないので，1 つ隣にしか移ることはできない．
   また，隣にうつる確率は，スタートとゴールの縦線の間に横線が 1 本引かれる確率になる．まとめると，

$$\begin{aligned} P_{m,1}(a,a) &= 1 - \frac{2}{m} \quad (0 < a < m) \\ P_{m,1}(a,a+1) &= \frac{1}{m} \quad (0 \leq a < m) \\ P_{m,1}(a,a-1) &= \frac{1}{m} \quad (0 < a \leq m) \end{aligned}$$

   上記以外では確率 0 である．これを，行列表示することを考える．
   i 行 j 列で i 地点をスタートに j 地点にゴールする確率を表す．P_m で $n=1$ の時の確率とする．

$$P_m = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{m} & \frac{1}{m} & 0 & & \\ \frac{1}{m} & 1-\frac{2}{m} & \frac{1}{m} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{m} & 1-\frac{2}{m} & \frac{1}{m} \\ & & & \frac{1}{m} & 1-\frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

ここで，$P_{m,n}(a,b) = \sum_{c=0}^{m} P_{m,n-1}(a,c)P_{m,1}(c,b)$ であることと，行列積の定義から，P_m の n 乗の各成分を求めることが $P_{m,n}(a,b)$ を求めることになる．
では，実際に計算してみて，公平なものになるのか確かめてみよう．
ただし，手で計算するのはめんどくさいので，計算機に計算させることにする．ここでは，縦線の数を 10 本で考える．

1. $n = 100$

$$P^{100} = \begin{pmatrix} 0.174 & 0.166 & 0.151 & 0.130 & 0.107 & 0.085 & 0.065 & 0.048 & 0.037 & 0.031 \\ 0.166 & 0.159 & 0.146 & 0.128 & 0.108 & 0.087 & 0.069 & 0.053 & 0.043 & 0.037 \\ 0.151 & 0.146 & 0.136 & 0.123 & 0.108 & 0.091 & 0.076 & 0.063 & 0.053 & 0.048 \\ 0.130 & 0.128 & 0.123 & 0.116 & 0.107 & 0.096 & 0.086 & 0.076 & 0.069 & 0.065 \\ 0.107 & 0.108 & 0.108 & 0.107 & 0.105 & 0.101 & 0.096 & 0.091 & 0.087 & 0.085 \\ 0.085 & 0.087 & 0.091 & 0.096 & 0.101 & 0.105 & 0.107 & 0.108 & 0.108 & 0.107 \\ 0.065 & 0.069 & 0.076 & 0.086 & 0.096 & 0.107 & 0.116 & 0.123 & 0.128 & 0.130 \\ 0.048 & 0.053 & 0.063 & 0.076 & 0.091 & 0.108 & 0.123 & 0.136 & 0.146 & 0.151 \\ 0.037 & 0.043 & 0.053 & 0.069 & 0.087 & 0.108 & 0.128 & 0.146 & 0.159 & 0.166 \\ 0.031 & 0.037 & 0.048 & 0.065 & 0.085 & 0.107 & 0.130 & 0.151 & 0.166 & 0.174 \end{pmatrix}$$

これをみると，10 人でのあみだくじで 100 本の横線を引いても確率のばらつきは大きいことがわかる．
実際に最大となるのが 0 番の人が 0 を引く (逆の 9 番が 9 を引く) 確率の 17% であり，最小となるのが 0 番が 9 を引く (9 番が 0 を引く) 確率の 3% である．これは流石に公平とは言い難い．

2. $n = 400$

$$P^{100} = \begin{pmatrix} 0.103 & 0.103 & 0.102 & 0.101 & 0.100 & 0.099 & 0.098 & 0.097 & 0.096 & 0.096 \\ 0.103 & 0.103 & 0.102 & 0.101 & 0.100 & 0.099 & 0.098 & 0.097 & 0.096 & 0.096 \\ 0.102 & 0.102 & 0.101 & 0.101 & 0.100 & 0.099 & 0.098 & 0.098 & 0.097 & 0.097 \\ 0.101 & 0.101 & 0.101 & 0.100 & 0.100 & 0.099 & 0.099 & 0.098 & 0.098 & 0.098 \\ 0.100 & 0.100 & 0.100 & 0.100 & 0.100 & 0.099 & 0.099 & 0.099 & 0.099 & 0.099 \\ 0.099 & 0.099 & 0.099 & 0.099 & 0.099 & 0.100 & 0.100 & 0.100 & 0.100 & 0.100 \\ 0.098 & 0.098 & 0.098 & 0.099 & 0.099 & 0.100 & 0.100 & 0.101 & 0.101 & 0.101 \\ 0.097 & 0.097 & 0.098 & 0.097 & 0.099 & 0.100 & 0.101 & 0.101 & 0.102 & 0.102 \\ 0.096 & 0.096 & 0.097 & 0.098 & 0.099 & 0.100 & 0.101 & 0.102 & 0.103 & 0.103 \\ 0.096 & 0.096 & 0.097 & 0.098 & 0.099 & 0.100 & 0.101 & 0.102 & 0.103 & 0.103 \end{pmatrix}$$

400 本ほど引くことでゴールする地点はほぼ均等な確率 (10%) になっている．
たった 10 人のあみだくじでも，公平に行うためには膨大な数の横線を引く必要があることがわかった．

1.5 (発展) 大学数学との関わり

まず，定理 2 を以下のように言い換える．

定理 2'

あみだくじは置換である．

＜証明＞

全射であることはあみだくじの定義からすぐにわかるので良い．

単射であることも，定理 2 の証明とほぼ同じ．あみだくじを分割して合成し直す際に，全単射の合成写像も全単射であることを用いれば良い．

□

群という概念を定義する．

定義 (群)

集合 G が群であるとは，演算 $G \times G \to G$ が定義されていて，以下の公理を満たすときをいう．

1. 結合法則
   $(xy)z = x(yz)$
2. 単位元
   ${}^{\exists}e \in G,\ s.t.\ xe = ex = x$
3. 逆元
   ${}^{\forall}x \in G,\ \exists x^{-1} \in G,\ s.t.\ xx^{-1} = x^{-1}x = e$

上記の条件にさらに交換法則 $(xy = yx)$ が成立するときに G をアーベル群 (交換群) という．

さて，以下が成立．

定理

あみだくじは群である．

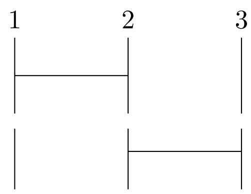
＜証明＞

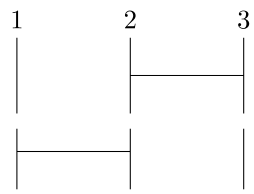
演算をあみだくじの合成とする．全単射であるので演算で閉じている．

1. 結合する順に関係なく同じあみだくじが生成される．
2. 横線が 0 本となるものが単位元に当たる．
3. あみだくじのスタートとゴールをひっくり返したものが逆元に当たる．

□

残念ながら交換法則は成立しないので，アーベル群ではない (下図を参照)．





1.6 さまざまな問題

以下に面白い問いかけを載せておくので，考えてみてほしい．

あみだくじの横線の偶奇は，与えられたスタートとゴールの数字により一意に決定するのか．

自分でスタートとゴールの数字を設定し，それを実現させるあみだくじにおいて，横線の本数を最小にするにはどうしたら良いか．
実際に自分で作成して検討してみよ．

あみだくじと置換の理論は 15 パズルに応用可能であるが，以下の問題を検討してみよ．

1. 初期配置に対し，14 と 15 のみを入れ替えたものを考える．これは，解けないことを示せ．
2. ランダムに配置されたピースに対し解けるか否かの判定法を検討せよ．