mathematics

Takenaga Koudai

2020年8月23日

はじめに

学校における数学教育において,「なんのために数学をやるのか？」と疑問に思う生徒が多いのは現実である。多くの生徒が持つこの疑問に答えようとしたのがこの本である。中学，高校で学習する範囲で理解できるようにまとめているが，一部範囲を逸脱しているものもあるかもしれない。また，高校で学習する範囲でも高難度のものも含まれることもある。そのようなものに出くわした際に目を背けるのではなく，内容が理解できなくても「ここにも数学が使われているのか」と『数学』が使われていることを実感していただけると幸いである。

Part 1 では，謎解き問題を扱っている。色々な謎解きを用意しているので，まずは，背景の数学を理解しようとせず挑戦してほしい。

Part 2,3 では，自然・日常と数学の関わりを扱っている。日常で見かける何気無いものにも数学が使われていることを知ってもらいたい。

それぞれ，余裕のある人は背景の数学について読んで理解して見てもらいたい。また，ここに書いてあることが全てではない。さらに深く学びたいという意欲のある人には，各自で様々なコンテンツを利用して調べることを勧める。

この本を読むことで，読者の社会での視野が少しでも広がることを願う。

目次

第 I 部

謎解き問題

1 小町算

数学パズルの一種

問題 1

以下の数式の □ の中に $+$, $-$, 空白 のいずれかを 1 つずつ入れて正しい数式を完成させよ。

$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 = 100$$

なぜ小町算と呼ぶの？

$\cdots$ 小町の名称は小野小町に由来する。その由来としては

- 小野小町のように美しい数式である
- はまってしまうと結構面白くて時間の経つのを忘れてしまう[*1]

など諸説ある。

小町算は条件を変えて出題もできる。

(1) $\times$, $\div$ の使用許可。
(2) 括弧，べき乗，平方根の使用許可。
(3) 左辺を逆順にする。($9 \square 8 \square 7 \square 6 \square 5 \square 4 \square 3 \square 2 \square 1 = 100$)

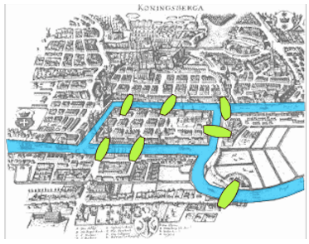
など $\cdots$

問題 1 の解答は合計で 12 個あることが知られている。
条件を変えた問題でもやってみてください。

[*1] 小野小町の和歌「花の色は うつりにけりな いたづらに　わが身世にふる ながめせしまに」から

2　ケーニヒスベルク問題

18 世紀初めプロイセン王国のケーニヒスベルクでのお話。
この都市を流れるプレーゲル川には右図のように橋がかけられていた。あるとき，街の人が問いかけた。



問題１
プレーゲル川に架かる 7 つの橋を二度通らずに，全てを渡り，元の場所に帰ってくることはできるか？
ただし，どこから出発してもよい。

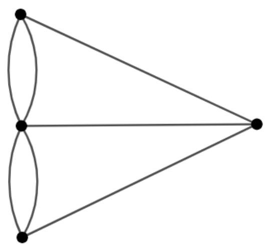
考え方:

土地を「点」，橋を「線分」と捉え，結んでできた図が一筆書きできるかどうか調べる。

一筆書きの定義:

- ペンを紙から離さない。
- 同じ線分を二度なぞらない。

さて，問題１における図を，点と線分で描くと以下のようになる。



よって問題１は以下の問いに置き換えられる。
上記の図は一筆書きできますか？

定義

奇点：点から出る線分の数が奇数な点。

偶点：点から出る線分の数が偶数な点。

また，点を線分で結んだものをグラフという。

定理

連結したグラフが一筆書き可能であるのは以下の条件のいずれかのときのみである。

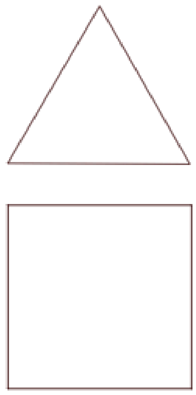
- 奇点が 0 個
- 奇点がちょうど 2 個

また，上の条件を満たすグラフは必ず一筆書き可能である。

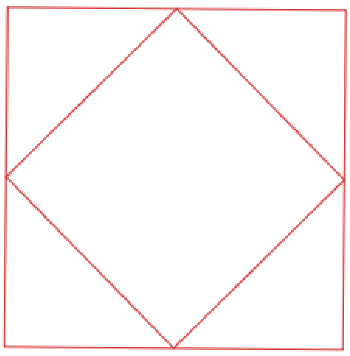
問題 2

以下の (1)∼(4) の図は一筆書きできるか？

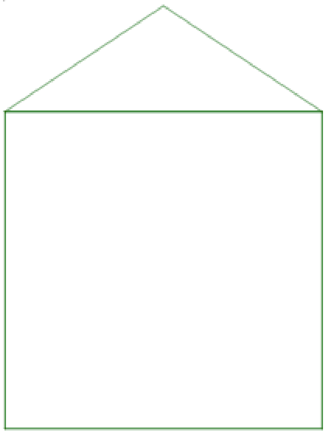
(1)



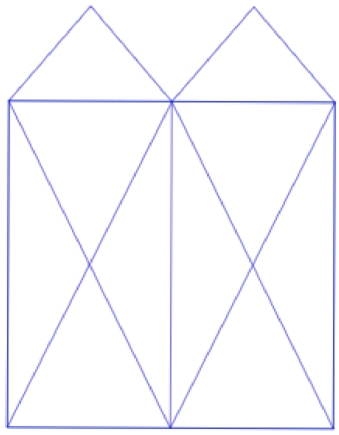
(2)



(3)



(4)



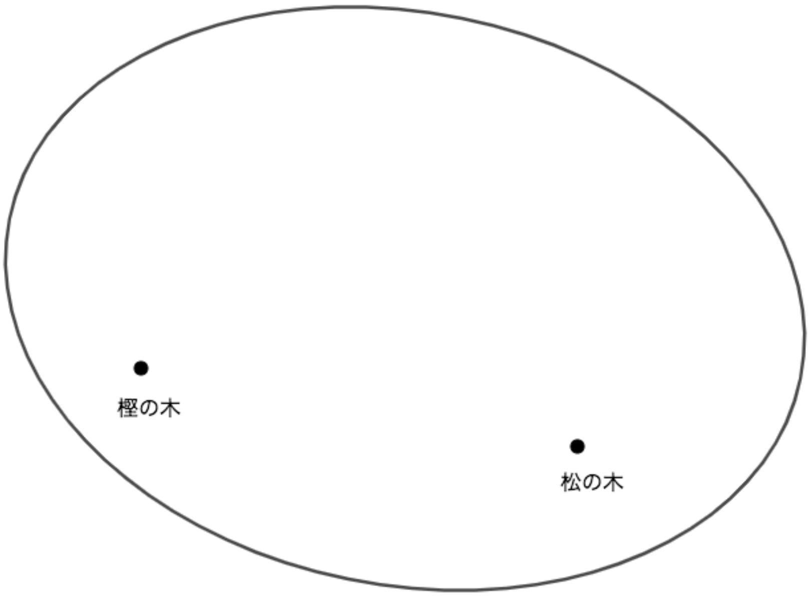
3　ガモフの問題

問題

無人島に，宝が埋まっている。その宝のありかを示した古文書には，次のように書かれている。

『島には，裏切り者を処刑するための絞首台と，１本の樫の木，そして松の木がある。
　まず，絞首台の前に立ち，樫の木に向かって歩数を数えながらまっすぐ歩け。樫の木にぶつかったら直角に右へと曲がり，同じ歩数だけ歩いたらそこに第一の杭を打て。
　絞首台にもどり，今度は松の木に向かって歩数を数えながらまっすぐ歩け。松の木にぶつかったら，直角に左へ曲がり，同じ歩数だけ歩いたらそこに第二の杭を打て。宝は，第一の杭と第二の杭の中間点に埋めてある。』

この島に行ってみたが，松の木と樫の木はあったが，肝心の絞首台が朽ち果てて無くなっていた。さて，宝のありかはどこでしょうか？



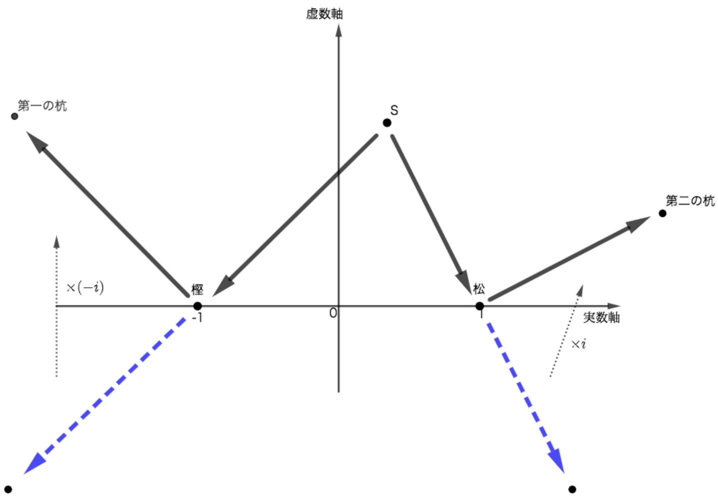
この問題の解法は複数存在する。
１つの解法で解けた方でも，別の解法を考えていただきたい。

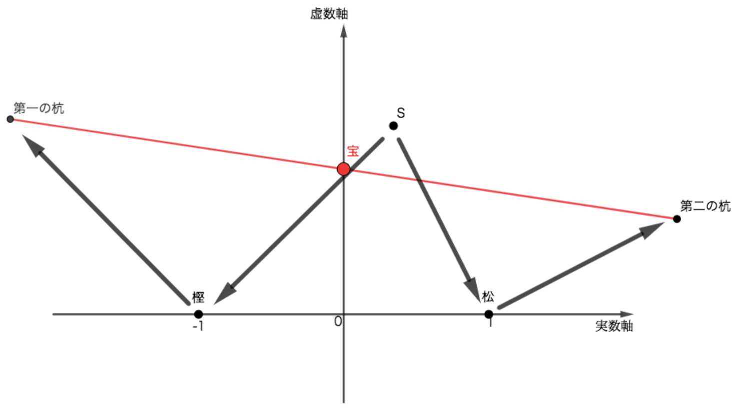
【解答】

今回は複素数で解いてみた。

複素数平面上の実軸上に，松の木の座標を実数の 1，樫の木の座標を実数の-1 とする。スタート地点 (絞首台) を複素数 S とおく。

第一の杭を複素数 K_1，第二の杭を複素数 K_2 で表す。S から樫に向かう矢印は，1 から S を引いたものに等しいので，
複素数 (-1-S) と表せる。
また，樫から杭 K_1 に向かう矢印は，S から樫に向かう矢印を樫から伸ばし，それを時計回りに 90 度回転したものなので，
複素数 $(-1-s)\times i$ とかける。
したがって
$K_1=S+(-1-S)+(-1-S)\times(-i)=-1+i+iS$
となる。　同様にして，
$K_2=S+(1-S)+(1-S)\times i=1+i-iS$

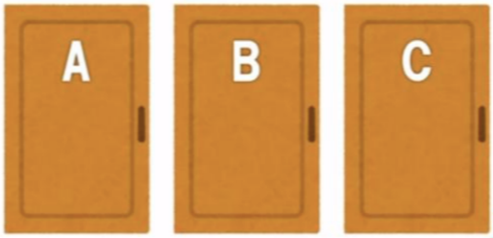




宝のありかである第一の杭と第二の杭の中間点は，複素数 $(K_1+K_2)\div 2$ で表せる。
よって，$(K_1+K_2)\div 2=(2i)\div 2=i$ となる。
したがって，虚数 i の位置が宝のありかである。

この結論より，宝の位置は絞首台の位置に関係なく一意に定まることがわかる。

4　モンティ・ホール問題



問題

A, B, C の扉のうち 1 つが当たり，残りはハズレとする。司会者は当たりの扉を知っている。挑戦者は 1 つの扉を選ぶ。司会者は，選ばれなかったハズレの扉を 1 つ開ける。司会者は言った「選択した扉を変更してもいいですよ」と。さて，あなたは選択を変更する方が良いのでしょうか？

このゲームは 1960 年代のアメリカのテレビ番組で実際に行われていたものである。番組の司会者の名前から「モンティ・ホール問題」と呼ばれる。

【解答】

最初に挑戦者が A を選んだ時の全てのパターンを以下の表に示す。

あ：当たり，は：ハズレ，$\boxed{\text{あ}}$,$\boxed{\text{は}}$：箱に入った状態　を示す。

(A,B,C)			(A,B,C)	確率
$\boxed{\text{あ}}$, $\boxed{\text{は}}$, $\boxed{\text{は}}$	$\frac{1}{3}$	$\xrightarrow{\text{確率}\frac{1}{2}}$	$\boxed{\text{あ}}$, は , $\boxed{\text{は}}$	$\frac{1}{6}$
		$\xrightarrow{\text{確率}\frac{1}{2}}$	$\boxed{\text{あ}}$, $\boxed{\text{は}}$, は	$\frac{1}{6}$
$\boxed{\text{は}}$, $\boxed{\text{あ}}$, $\boxed{\text{は}}$	$\frac{1}{3}$	$\xrightarrow{\text{確率 }1}$	$\boxed{\text{は}}$, $\boxed{\text{あ}}$, は	$\frac{1}{3}$
$\boxed{\text{は}}$, $\boxed{\text{は}}$, $\boxed{\text{あ}}$	$\frac{1}{3}$	$\xrightarrow{\text{確率 }1}$	$\boxed{\text{は}}$, は , $\boxed{\text{あ}}$	$\frac{1}{3}$

よって，箱を変えない方が当たりとなるのは $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

箱を変えない方が当たりとなるのは $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

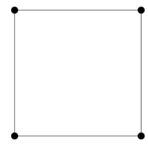
よって当たる確率が 2 倍になるので，箱を変えるべきである。

5　最短経路問題

5.1　最短経路問題

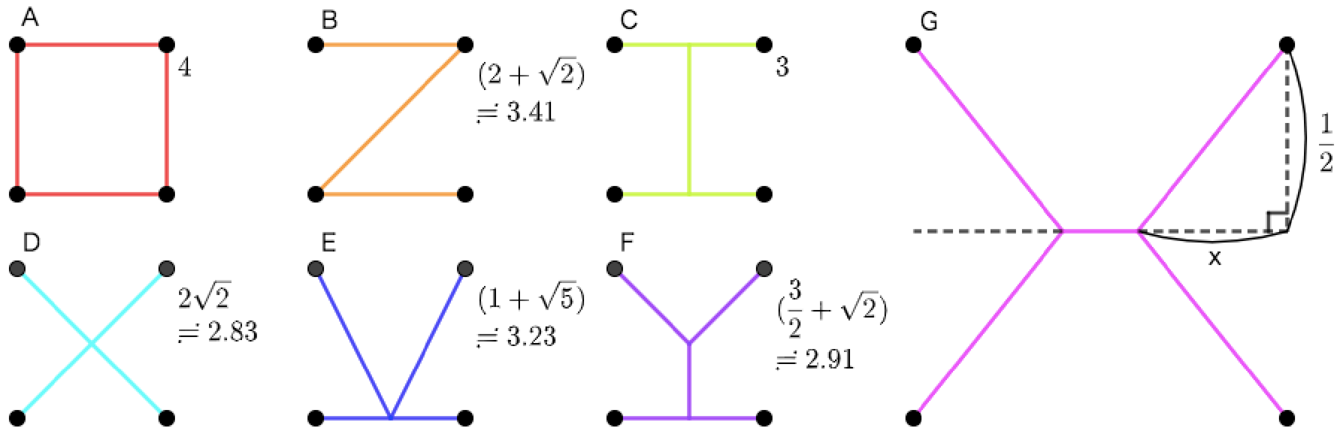
最短経路問題とは，複数の地点を全て道路で結び，その道路の総延長を最小にするにはどのようにすれば良いかを考える問題。

問題
右の図において，4 点を結ぶ線の総延長を最小にする経路はどのようなもので，またその経路長はいくらか？
ただし，この 4 点は一辺が 1 の正方形の頂点である。



このような問題は，実社会でもよく直面する問題であり，「最短シュタイナー問題」や「最短ネットワーク問題」と呼ばれる。
スイスの数学者ヤーコブ・シュタイナー (1796 1863) が考えた。

４つの点を全てつなぐ線分の結び方は以下のようなものが考えられる。



A∼F については，三平方の定理などから計算して経路長を求めることができる．
この A∼F の中では D が最短であり，長さは $2\sqrt{2}$ で，約 2.83 cm である。
しかし，実際に最短となるのは G に記したように結んだときである。では，このときの最小値はいくらになるのか。また，そのときの図に何か特徴があるのか調べてみましょう。

【解答】

まず，G の線の総延長を求める。総延長を $L(x)$ とおく。

各頂点から伸びる一つの線分は，三平方の定理より

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}$$

また，頂点に触れていない線分の長さは $1-2x$ なので，

$$L(x)=4\times\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+(1-2x)$$

となる。この関数の最小値を求める。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}L(x)&=4\times\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\times 2x-2\\&=4x\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}-2\end{aligned}$$

$\frac{d}{dx}L(x)=0$ とおくと，

$$\begin{aligned}4x\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}-2=0\\2x\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=1\\2x&=\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\\4x^2&=x^2+\frac{1}{4}\\3x^2&=\frac{1}{4}\\x&=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}\quad(\because 0<x<\frac{1}{2})\end{aligned}$$

増減表は，

x	0	$\cdots$	$\sqrt{3}/6$	$\cdots$	1
L'	/	$-$	0	$+$	/
L	3	$\searrow$	$1+\sqrt{3}$	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$

よって，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ で最小値を取り，その値は $1+\sqrt{3}\fallingdotseq 2.73$

【この結果からわかる特徴】

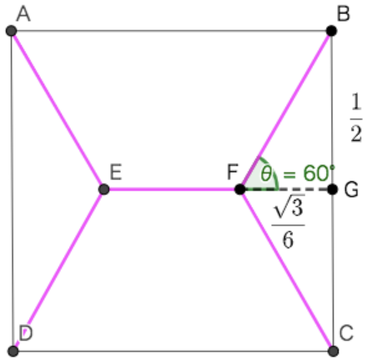
三角形 BCF は $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形である。

したがって ∠CFB=120° となる。

同様にして ∠AED=120° である。

また，∠BFE= ∠CFE= ∠AEF= ∠DEF=120°

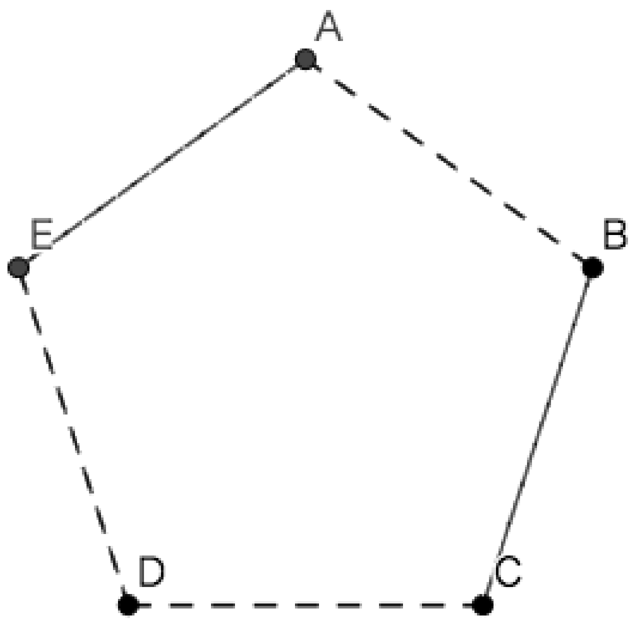
よって，線分 AE, DE, EF, BF, CF によって作られる角度が全て 120° となる。



ここで，$L(x)$ の式の EF の長さ $(1-2x)$ を見てみる。

この式を微分すると定数の 1(辺の長さ) は消える。つまり AB の長さによらず最小となる x のときの角度は 120° である。このことより，長方形においても最短距離を作る線分は正方形と同じように 120° を作るように結べば良い。

> 問題
>
> 正五角形の 5 つの頂点を結ぶとき，どのようにすれば総延長は最短となるか？



実際に上の図に書いてみましょう。

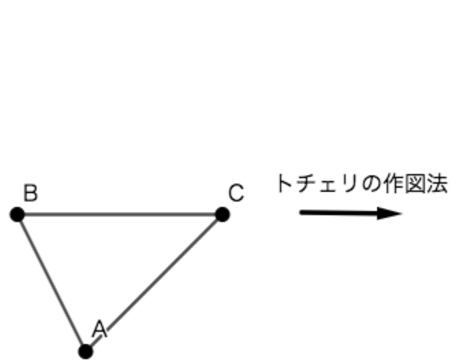
5.2 (発展) シュタイナー木

定義

点集合 X に対し，X の全てを結ぶ線分の集合を X のシュタイナー木という。また，あるグラフのすべての頂点とそのグラフを構成する辺の一部分のみで構成される木のことを全域木といい，全域木のうち，総長が最短のものを最小シュタイナー木 (必要なら新たな点の付加が可能であり，付加した点をシュタイナー点という。) という。

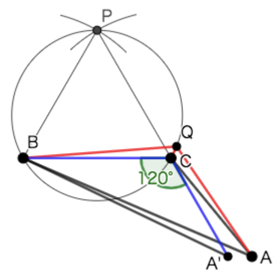
トチェリの作図法

平面上の 3 点 A, B, C(△ ABC の内角はすべて 120° 未満) を結ぶ最小シュタイナー木を作図する。
辺 BC に関して，A と反対側に点 P を，△PBC が正三角形であるようにとる。
△PBC の外接円 O と線分 AP の交点を Q とする。2 点 A, P を結ぶ線分が最短の距離を与える。
この事実より，AP+PQ=AQ+BQ+CQ であり，長さが最小になるのは，Q が線分 AP 上にあるとき。



上の図が，トチェリの作図法を適用した図であり，右図が最小シュタイナー木を与え，点 Q がシュタイナー点である。
トチェリの作図法では，点 B, C が点 P に代替されている。つまり，3 点からの距離が最小という問題から 2 点からの距離が最小という問題に簡約されている。

120° を超えた場合，右の図のように点 Q から 3 本結んだ線分の総長よりも △A’BC の短い 2 辺を結んだ方線分の総長の方が短くなる。このことから，120° 未満ではトチェリの作図法を利用し，それより大きい場合は短い 2 辺を結んで最小シュタイナー木を作成する。

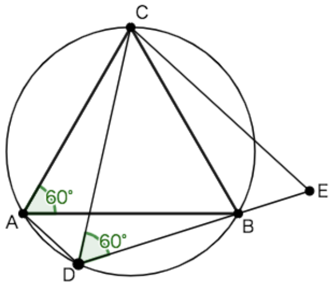


トチェリの作図法が成立する理由は，以下の事実が用いられている。

定理

$\triangle$ABC が正三角形，AD=BE(直線 DB 上に E をとる) のとき以下が成立。

$$\mathrm{AD+DB=CD}$$



【証明】

AD+DB=CD を示す。

円周角の定理と $\triangle$ABC:正三角形より

$$\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{ABC} = 60^\circ, \quad \angle\mathrm{ACD} = \angle\mathrm{DBA}$$

よって

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{CBE} &= 180^\circ - (\angle\mathrm{ABC} + \angle\mathrm{DBA})\\ \angle\mathrm{CAD} &= 180^\circ - (\angle\mathrm{ACD} + \angle\mathrm{ADC})\end{aligned}$$

より

$$\angle\mathrm{CBE} = \angle\mathrm{CAD}$$

AC=BC より，二辺とその間の角が等しいので

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ACD} \equiv \triangle\mathrm{BCE} &\Rightarrow \mathrm{CP} = \mathrm{CE}\\ &\Rightarrow \triangle\mathrm{CDE} : \text{正三角形}\end{aligned}$$

ゆえ,

$$\begin{aligned}\mathrm{CD} = \mathrm{DE} &= \mathrm{DB} + \mathrm{BE}\\ &= \mathrm{DB} + \mathrm{AD}\end{aligned}$$

これにより，AB に対し D と逆に C を $\triangle$ABC が正三角形になるようにとれば，D の位置にかかわらず AD+DB=DC となり，AD+DB の最小問題を DC の最小問題に置き換えることができる。

トチェリの作図法を活用し，三角形だけでなく他の多角形でも最小シュタイナー木を作図したい。

メルザクのアルゴリズム

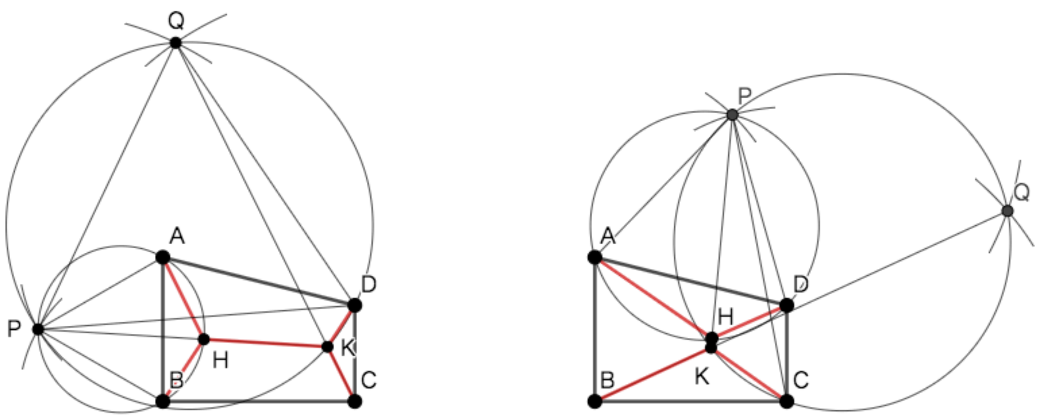
(1)　4 点のうち 3 点 A, B, D を選びトチェリの作図法で，A, B の代替点 P を作成

(2)　3 点 P, C, D にトチェリの作図法で，P, D の代替点 Q を作成

(3)　線分 CQ と円 C_Q の交点を K，さらに，線分 KP と円 C_P の交点を H とする

$$\begin{aligned}\mathrm{OQ} &= \mathrm{CK} + \mathrm{KQ}\\ &= \mathrm{CK} + (\mathrm{KD} + \mathrm{KP})\\ &= \mathrm{CK} + \mathrm{KD} + (\mathrm{KH} + \mathrm{HP})\\ &= \mathrm{CK} + \mathrm{KD} + \mathrm{KH} + (\mathrm{HA} + \mathrm{HB})\end{aligned}$$

これにより，シュタイナー木のうちの一つが見つかった。ただし，最小かどうかはわからない。

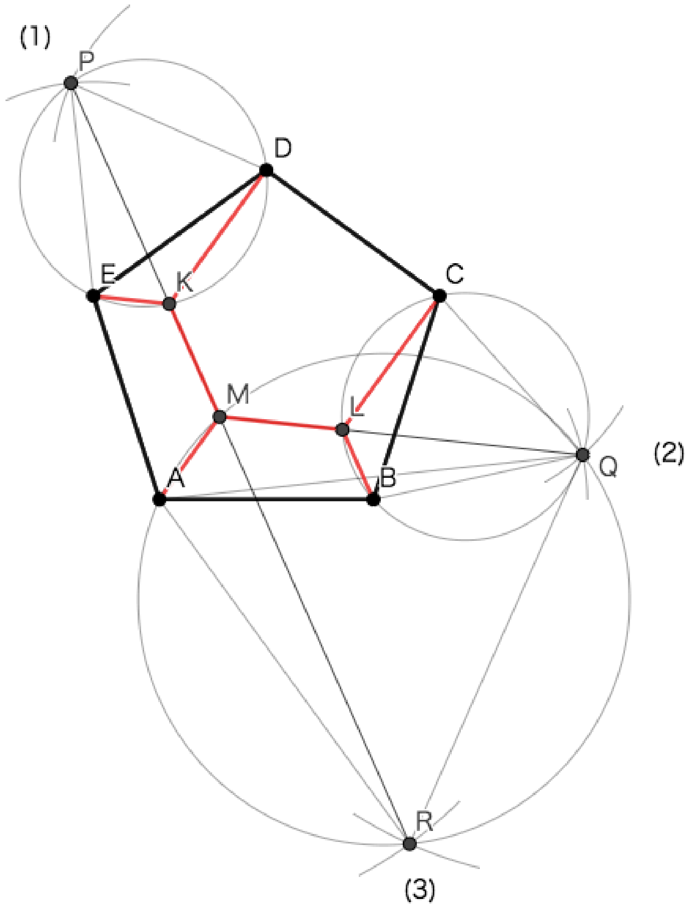


上図のように，四角形だと 2 パターンのシュタイナー木が描ける。このうちの最短を探索し，最小シュタイナー木が決定する。
正五角形の問題も，同様に作図することで最短シュタイナー木が描ける。

定理

$n \geqq 6$ のとき，正 n 角形の頂点に位置する n 点集合の最小シュタイナー木は，正 n 角形から任意の一辺を取り除いたものである。

【解答】
正五角形の最小シュタイナー木を作図する。



(1)　点 D, E の代替点 P をトチェリの作図法で作図
(2)　点 B, C の代替点 Q をトチェリの作図法で作図
(3)　点 A, Q の代替点 R をトチェリの作図法で作図
(4)　点 P, R を結ぶ線分が求める最短の距離を与える。よって，上の図が最小シュタイナー木である。

複数点からの距離が最小という問題を，トチェリの作図法を繰り返し用いて 2 点からの距離が最小という問題に簡約している。

6　虫食い算・覆面算

6.1　虫食い算

古代遺跡の探索中に，以下のように宝のありかが記された古文書が見つかった。
ここからどれだけ離れた位置に宝があるのか？

古文書
この地点より１日に２ □ キロメートル
ずつ北に進め。これを □ ２日間続けよ。
すなはち，ここより □□ ２２キロメートル
はなれた地点に宝が埋まっている。

算数の教科書のあるページが虫食いされた。この穴にはどのような漢数字が載っていたのか？

教科書
二つの数 □ と □□□ は
かけると □ 百 □ になり
たすと百 □ になる。

6.2　覆面算

数式の一部に，数字の代わりに文字や記号が記されていて，同じ文字には同じ数字，異なる文字には異なる数字を入れる決まりのもと，数式を完成させるものを覆面算という。

問題

$$\begin{array}{rr} & A \\ + & B \\ \hline A & C \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} & A & B \\ \times & & C \\ \hline A & A & A \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} & A & B \\ - & B & A \\ \hline & 1 & A \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & 9 \\ \cline{2-4} A) & A & B & A \end{array}$$

難題

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & A & A & A & A & A & A & A \\
 & A & B & B & B & B & B & A \\
 & A & B & B & B & B & B & A \\
 & A & B & B & B & B & B & A \\
 & A & B & B & B & B & B & A \\
 & A & B & B & B & B & B & A \\
+ & A & A & A & A & A & A & A \\
\hline
A & A & A & A & A & C & B & B
\end{array}
$$

6.3 虫食い＋覆面

ルールは，虫食い算と覆面算を足し合わせたものである。一番左の □ や文字には異なる数字がはいる。

難題 1

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & S & I & X \\
 & & \times & T & W & O \\
\cline{3-6}
 & & \square & \square & \square & \square \\
 & \square & \square & \square & \square & \\
\square & \square & \square & \square & & \\
\hline
T & W & E & L & V & E
\end{array}
$$

難題 2

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
 & & & & & & \times & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\cline{7-15}
 & & & & & & & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & Q \\
 & & & & & & T & \square & \square & \square & \square & \square & \square & U & \\
 & & & & & I & \square & \square & \square & \square & \square & \square & E & & \\
 & & & & O & \square & \square & \square & \square & \square & \square & S & & & \\
 & & & S & \square & \square & \square & \square & \square & \square & T & & & & \\
 & & E & \square & \square & \square & \square & \square & \square & I & & & & & \\
 & U & \square & \square & \square & \square & \square & \square & O & & & & & & \\
Q & U & E & S & T & I & O & N & & & & & & & \\
\hline
\square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square
\end{array}
$$

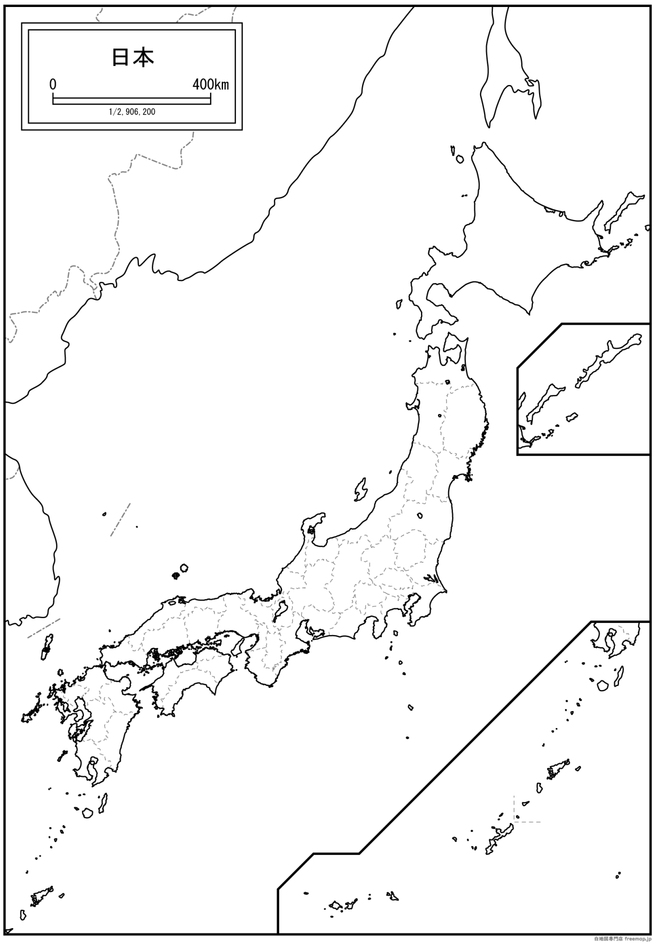
7　地図の塗り分け

問題
日本地図は最低何色で塗り分け可能か？

【ルール】

(1)　どの隣り合う 2 面も同じ色にならないように色をつける。ただし，いくつかの点のみで接している点は，隣り合うとは考えないこととする。
(2)　できる限り少ない色で塗り分ける。
(3)　飛び地はないものとする。
(4)　一番外側の部分 (海など) は色をつけない。

以下で実践してみよ。



8 魔法陣

問題

上の正方形の方陣に $1 \sim 9$ の数字を入れて 3×3 魔法陣を完成させよ。

定義

$n \times n$ 魔法陣とは，$n \sim n$ の正方形方陣に $1 \sim n^2$ の数字を，縦・横・対角線のいずれの列についてもその列の和が同じになるように配列したもの。

魔法陣は中国では紀元前 190 年前には存在していたという。

n 次魔法陣は何通りか？

ここで，裏返しや回転で一致するものは同じ魔法陣とみなす。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

4	3	8
9	5	1
2	7	6

そのため，上の三つ魔法陣は同じものとみなせる。

- 3 次
  1 通り
- 4 次
  880 通り
- 5 次
  275,305,224 通り
- 6 次
  (約 1800 京通り[*2])

面白いことに，3 次魔法陣は 1 通りしかない。ただし，次元が 1 増えただけで通り数は莫大に増える。

[*2] 正確な数は分かっていない。スーパーコンピューターで求めたおおよその数

では，3 次魔法陣が 1 通りしかないことを証明しよう。

【証明】

(STEP1) 1 列の和は 15

1 ～ 9 の数字の合計は 45。

よって 1 列の和は 15。

(STEP2) 中央は 5

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$15 = (a+e+i)+(c+e+g)+(b+e+h)-(a+b+c)-(g+h+i) = 3e$

よって，$e = 5$

(STEP3) 角は 1 でない

背理法で示す。

角が 1 であると仮定する。ここで，回転や反転に関しては同一の魔法陣とみなしたので，1 はどの角にとっても良い。和が 15 から，1 の対角成分は 9 となる。角に 9 がくるので，その列に関しては残りは合計 6 以下の数字。中心は 5 なので，たとえ角を 4 にとっても 1 と 4 が含まれる列の総和は 13 までしか取れず，STEP2 に矛盾。よって，角に 1 がくるという仮定は不適である。

1		
	5	
		9

1		4
	5	
		9

和は 15 にならない

	1	
	5	
	9	

(STEP4) 残りの数字

1 の片端に 5 以下の数字をおくともう片方の端は 9 以上。ただし，それは不適切であるので，1 の片端は 6, 7, 8 のいずれか。7 のときは STEP2 からもう片端も 7 でこれも不適。よって，1 の両隣は 6, 8 である。

対角線の和も 15 から 6 の対角成分は 4，8 の対角成分は 2 である。

残りの成分も STEP2 から計算できる。

6	1	8
	5	
	9	

→

6	1	8
	5	
2	9	4

→

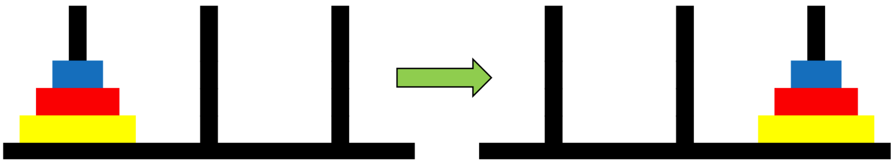
6	1	8
7	5	3
2	9	4

9 ハノイの塔

問題

3 本の棒が 1 列に並んでいる．このうち一番左の棒に，下から順に大・中・小の円盤が積んである．この円盤を以下の条件の元で一番右の棒に移す．何手かかるか？

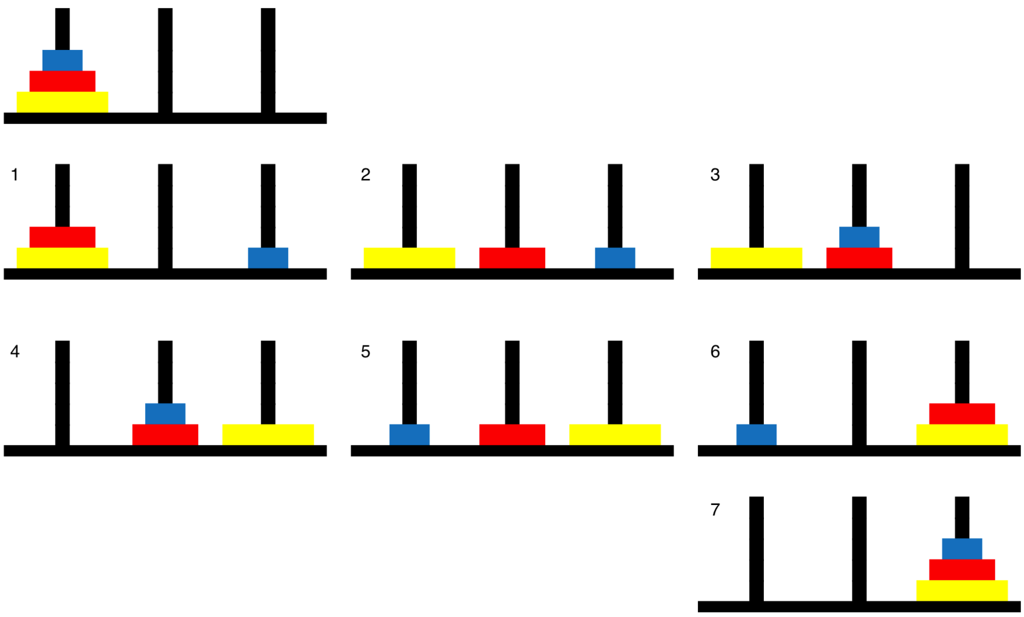
1. 1 手では 1 枚の円盤しか動かさない
2. 移動する円盤は，その円盤より小さな円盤の上には置けない
3. 移動する円盤は必ずいずれかの棒にさす



この問題に関連して面白い伝説がある．

インドのガンジス川ほとりのヴァラナシにある寺院の前に，3 つの柱があった．そのうち 1 本に，64 枚の円盤が下から大きさ順に積まれていた．司祭たちが問題と同じ条件で円盤を別の柱に移し替えている．全ての円盤が移し替え終わったとき，世界は終焉を迎えると言われている．

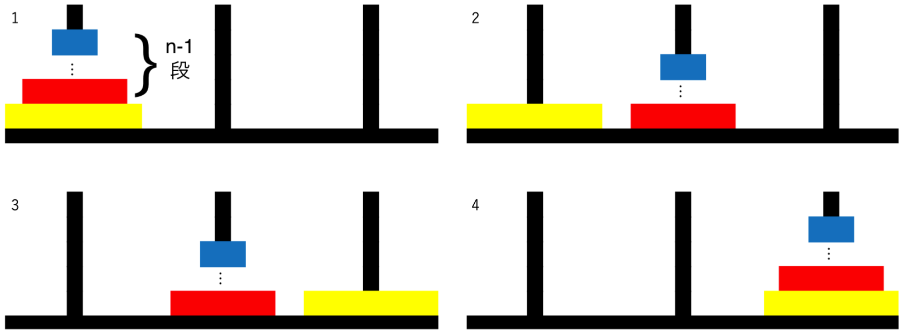
問題は以下の手順で 7 手で解ける．



数学的に，n 枚の場合には何手かかるのかという問題を解きたいと考える．

> 問題
> n 段のハノイの塔だと何手かかるか？

【解答】



n 段動かす時の最小手数を a_n とおく．すると，$n-1$ 段動かす際の最小手数は a_{n-1} と表せる．上の図において，1 から 2 への移動は $n-1$ 段の移動なので a_{n-1} である．
次に，2 から 3 へは，一段分を最左端から最右端への移動なので 1 手である．
最後に 3 から 4 へは，$n-1$ 段の移動なので a_{n-1} である．
以上をまとめると，n 段のハノイの塔の最小手数は

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 1 + a_{n-1} \\ &= 2a_{n-1} + 1 \end{aligned}$$

この漸化式を解く．

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 \\ a_n + 1 &= 2(a_{n-1} + 1) \\ \therefore \quad a_n + 1 &= 2^{n-1}(a_1 + 1) \end{aligned}$$

ここで，$a_1 = 1$ より，$a_n + 1 = 2^n$
よって，n 段のハノイの塔の最小手数は

$$a_n = 2^n - 1$$

さて，伝説となっていた 64 段でするとどのくらい時間がかかるのだろうか．

$$\begin{aligned} a_{64} &= 2^{64} - 1 \\ &= 18446744073709551615 \end{aligned}$$

となり，1 手に 1 秒かかったとするとおおよそ 2.14×10^{14} 日かかる．
年数表示すると，約 5.85×10^{11} 年かかる．つまり，5850 億年かかる計算である．
地球の誕生が今から約 46 億年のことなので，64 段の円盤を移し替える頃には地球滅亡しているということはあながち間違っていないのかもしれない．誰も確かめることは出来ないであろうが…

10　鶴亀算

問題

鶴と亀が合計で 50 匹います．足の本数は合計で 140 本である．さて，鶴と亀はそれぞれ何匹であるか．

【解答】

全員鶴であると仮定する．すると，足の数は $2 \times 50 = 100$(本) となり，40 本足りない．

さて，亀の足が 4 本なので，1 匹の鶴を亀に置き換えると足は 2 本増える．そのため，40 本増やすには，

$40 \div 2 = 20$(匹) を亀にすれば良い．よって，

鶴は $50 - 20 = 30$(匹)

亀は 20(匹)

発展問題

手元に 1000 円分の硬貨が 26 枚ある．コインの種類は 10 円玉，50 円玉，100 円玉の 3 種類である．ただし，0 枚の硬貨があってもよいとする．硬貨の枚数の内訳を求めよ．

先ほどの問題と同様のやり方でもできるが，以下では方程式を用いて解く．

【解答】

10 円玉が x 枚，50 円玉が y 枚，100 円玉が z 枚とする．

合計の枚数がで 26 枚であることから

$$x + y + z = 26 \qquad (1)$$

また，金額の合計は 1000 円なので

$$10x + 50y + 100z = 1000 \qquad (2)$$

(2) $\div\, 10 -$ (1) から，

$$4y + 9z = 74 \qquad (3)$$

さて，x, y, z は硬貨の枚数であるので，0 以上の整数である．

この制約条件を満たし，(3) 式に当てはまる解は，

$$y = 5, \quad z = 6$$

(1) 式より $x = 15$

よって

10 円 : 15 枚，円 : 5 枚，円 : 6 枚

第 II 部
自然と数学

11　素数ゼミ

夏の風物詩のセミ。日本では毎年複数種類のセミを見かけることができる。そんなセミだが，世界には珍しいセミもいる。そのうちの一つが『素数ゼミ』である。

素数ゼミ

13 年または 17 年で成虫になり大量発生するセミ。その間の年にはその地域では一切発生しないが，ほぼ毎年何処か他の地域では発生している。

なぜ 13 年や 17 年なのか。ほか年数 (例えば 12 年や 16 年) ではダメだったのか？
13 年や 17 年である理由は正確には解明されていないが，有力な説が 2 つある。

(説 1)　捕食者を避けるため

セミは小さな昆虫である。そのため，食物連鎖上位の動物に捕食される立場にある。絶滅するのを防ぐためには極力捕食されるのを避けなければならない。捕食者出現の周期となるべく被らないように成虫になるのが得策である。

	周期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
捕食者	3 年			○			○			○			○			○			○		
捕食者	4 年				○				○				○				○				○
ゼミ	12 年												○								
素数ゼミ	13 年													○							
素数ゼミ	17 年																	○			

21	22	···	38	39	40	···	50	51	52	53	54	55	···	66	67	68	69
○		···		○		···		○			○		···	○			○
		···			○	···			○				···			○	
		···				···							···				
		···		○		···			○				···				
		···				···		○					···			○	

○ が出現年である。上の表から見て分かるように，周期が 12 年のセミは 12 年目で捕食者と同年に出現している。一方で捕食者の出現と素数ゼミの出現はなかなかかぶっておらず，初めてかぶるのは 39 年 (3 年捕食者と 13 年ゼミ)，51 年 (4 年捕食者と 17 年ゼミ) である。
このように，セミが素数でない場合，最小公倍数が小さくなり捕食者と同年に出現する回数が増え，素数の場合は最小公倍数が大きくなるため，捕食者と同年に出現する回数は少なくなる。これにより個体数を減らすのを避けているという説である。

(説 2)　交雑を避けるため

交雑

交雑とは，別の種・品種により雑種を作ること。

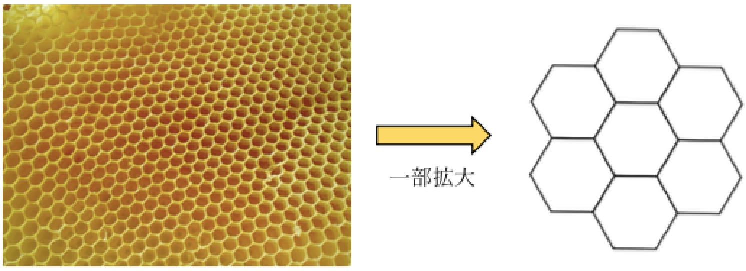
交雑によって純血種に比べて弱くなる可能性や，周期の変動による同年に出現する個体数の減少が問題となりうる。
同年の出現数減少による問題とは，密度が小さくなり捕食されやすくなる点や，配偶者を見つけることが困難になる点である。

	周期	1	···	13	14	15	16	17	18	19	···	89	90	91	···	219	220	221
セミ A	15 年		···			○					···		○		···			
セミ B	18 年		···						○		···		○		···			
素数ゼミ	13 年		···	○							···			○	···			○
素数ゼミ	17 年		···					○			···				···			○

この表から，周期が 15 年，18 年のセミは 90 年で同年に出現するのに対し，13 年，17 年のセミは 221 年間も同年に出現することはない。これにより交雑しにくいようになっているという説である。

12　蜂の巣

蜂の巣について見ていく。蜂の巣は下の写真のようなものであり，よくみると正六角形の部屋がたくさん集まってできていることがわかる。なぜこのような形になっているのか疑問に思うだろう。



解明のためにまずは多角形について見ていく。
同じ大きさの正多角形を隙間なく並べることが可能なのは，

正三角形，正四角形，正六角形

の 3 種類のみ。また，同じ面積で周の長さが最も短いのは

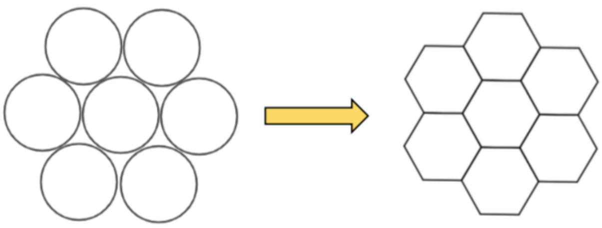
正六角形

である。このことより，少ない材料でより多くの部屋を作るためには正六角形の部屋を敷き詰めていけば良い。
蜂の巣は，このように最も効率の良い巣を作っていることがわかる。
ここでさらに疑問に思うことがある。それは
『蜂はこのことを分かって巣を作るのか？』
この謎もまだ解明されていない問題である。ただ，複数の有力な説があり，ここでは二つ紹介する。

(説 1)　蜂が器用な建築家である

この説は，蜂が正六角形が最も効率が良いという知識を何かしらの方法[*3]で身につけて巣を作っているというものである。

(説 2)　表面張力により六角形に変形している



蜂はまず巣の部屋を円形に作り，日数の経過により表面張力で正六角形に変形していくという説である。

[*3] これにも，蜂が計算している，進化の結果 (ダーウィンの進化論) といった説がある

13　サッカーボール

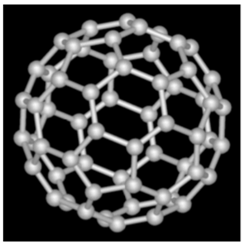
問題

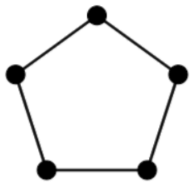
サッカーボールの黒の五角形の数は何枚か

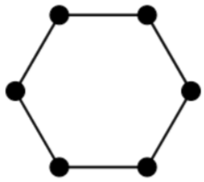
【解答】

12 枚

サッカーボールと同じ構造を持つものに，炭素原子 60 個で構成された C_{60} フラーレンがある。このフラーレンについて見ていく。







一番左の図が C_{60} フラーレンの図であり，五角形構造を五員環，六角形構造を六員環という。
C_{60} フラーレンは五員環が 12，六員環が 20 で形成されている。
実はフラーレンには高次フラーレンという炭素数が 70，74，76，78$\cdots$ などのものなどが存在する。
高次フラーレンには面白い特徴がある。それは，五員環の数は必ず 12 と決まっており，六員環の数だけが増えていく。
これは以下の定理で証明できる。

オイラーの多面体定理

多面体について，頂点数を v，　辺の数を e，面の数を f とすると以下が成立する。

$$v - e + f = 2$$

例えば，立方体では頂点は 8 個，面は 6 面，辺は 12 個なので，$8 + 6 - 12 = 2$ となり，成り立つ。
また C_{60} のフラーレンは頂点は 60 個，面は 32 面，辺は 90 個なので，$60 + 32 - 90 = 2$ となり，成り立つ。
では，実際に証明してみよう。

【証明】
多面体が五角形の面 m 個，六角形の面 n 個からなるとして，頂点，面，辺の数を数える。
まず，

(1) 1 つの辺の 2 つの面に共有されること
(2) 1 つの頂点には 3 つの面の角が集まること

を示す。

(1) これは明らかである。
(2) 立体になるためには，1 つの頂点には，3 つ以上の面の角が必要である。また，正五角形の内角は $108°$，正六角形の内角は $120°$ なので，4 つ以上の角が集まると $360°$ を超えることになり不成立。よって 1 つの頂点には面の角は 3 つ集まっている。

これより，実際に数えていく。
まず，頂点の数を数える。面の個数から，頂点の個数はのべ $5m+6n$ 個である。ただし，(2) より，3 個ずつ重複するので

$$(\text{頂点の数}) = \frac{5m+6n}{3}$$

次に，面の数を数える。これは，五角形と六角形の面の数を合わせれば良いので

$$(\text{面の数}) = m+n$$

最後に，辺の数を数える。面の個数から，辺の個数はのべ $5m+6n$ 本である。ただし，(1) より 2 個ずつ重複するので，

$$(\text{辺の数}) = \frac{5m+6n}{2}$$

オイラーの多面体定理に当てはめる。

$$\frac{5m+6n}{3} + (m+n) - \frac{5m+6n}{2} = 2$$

整理する。

$$\frac{m}{6} = 2$$
$$\therefore m = 12$$

よって，五角形の面の数は 12 個。

14　地震

この日本は地震大国であり，毎日どこかしらの地域で地震が発生している．震度 3 以上の地震が発生した場合には，約 1 分半後に観測した地域名と，地震の揺れの検知時刻が速報される．その中で報道される地震の震度や規模 (マグニチュード) は，常用対数を用いて計算されている．

14.1　震度

震度とは，地震動の強さを表す尺度である．その地点での揺れの強さなので，同じ地震でも場所によって数値は変動する．1996 年 9 月以前は，気象台の職員が，体感や被害の状況によって震度を判定していた．1996 年 10 月 1 日以降は地震計による加速度記録から計測する「計測震度」が使用されている．
その計測方法について紹介する．[*4]

(1)　ディジタル加速度記録 3 成分 (水平動 2 成分，上下動 1 成分) のそれぞれのフーリエ変換を求める．
(2)　地震動の周期による影響を補正するフィルターを掛ける．
(3)　逆フーリエ変換を行い，時刻歴の波形にもどす．
(4)　得られたフィルター済みの 3 成分の波形をベクトル的に合成する．
(5)　ベクトル波形の絶対値がある値 a 以上となる時間の合計を計算したとき，これがちょうど 0.3 秒となるような a の値を求める
(6)　(5) で求めた a を，$I = 2\log_{10} a + 0.94$ により計測震度 I を計算する．計算された I の小数第 3 位を四捨五入し，小数第 2 位を切り捨てたものを計測震度とする．

階級	計測震度	発生する現象例
震度 0	0.5 未満	地震計は検知するが，人は感じない．
震度 1	0.5 以上 1.5 未満	敏感な人一部の人が気づく．
震度 2	1.5 以上 2.5 未満	多くの人が感じ，天井から吊るした照明が少し揺れる．
震度 3	2.5 以上 3.5 未満	ほとんどの人が揺れを感じ，重ねた食器等は音を立てる．
震度 4	3.5 以上 4.5 未満	一部のエレベーターは停止 (その後自動復旧).
震度 5 弱	4.5 以上 5.0 未満	歩行に支障が出始める．家具は音を立てて揺れる．
震度 5 強	5.0 以上 5.5 未満	食器棚内のものが落ちてくる．
震度 6 弱	5.5 以上 6.0 未満	固定していない家具は多くが倒れる．
震度 6 強	6.0 以上 6.5 未満	立っていられない．這わないと動けない．
震度 7	6.5 以上	大きな地割れの発生．地滑り・山崩れの発生.

[*4] 気象庁 HP より

14.2 マグニチュード

マグニチュードとは，地震において震源から発生したエネルギー量のことである．日本では，地震時の地面の動きから計算する方法が用いられる．

(1) 気象官署マグニチュード M_J

規模が大きくかつ浅い (H≦ 60km) 地震については，気象官署においてある計測震度計の加速度データを二階積分して得られた変位最大振幅を用いて，以下の式により計算．この方法は，大きい地震 (M7 クラス以上) に対して，(2) の C_D が M によらない定数とみなせるかが確認できるまでの経過的措置．

$$M_J = \frac{1}{2}\log_{10}(A_N^2 + A_E^2) + 1.73\log\Delta - 0.83$$

(2) 変位マグニチュード M_D

変位波形 (水平動) の最大振幅値が検測されている場合，変位波形から以下の式により計算．

$$M_D = \frac{1}{2}\log_{10}(A_N^2 + A_E^2) + \beta_D(\Delta,\ H) + C_D$$

(3) 速度マグニチュード M_V

速度波形 (上下動) の最大振幅値が検測されている場合，速度波形の最大振幅から以下の式により計算．

$$M_V = \alpha\log_{10}(A_Z) + \beta_V(\Delta,\ H) + C_V$$

用いられている記号について

H	:	震源の深さ (km)
Δ	:	震央距離 (km)
α	:	定数 $1/0.85 \fallingdotseq 1.176$
β_D, β_V	:	距離減衰項
C_D	:	津波地震早期検知網の場合の補正値 $(= 0.2)$
C_V	:	地震計設置条件補正項
A_N, A_E	:	水平動成分 (南北動，東西動) 記録の最大振幅 (単位は$\mu\mathrm{m} = 10^{-6}\mathrm{m}$)
A_Z	:	上下動成分記録の最大振幅 (単位は $10^{-5}\mathrm{m/s}$)

これまで，地震について詳しく扱ったため，少し発展的な内容になってしまった．少し簡単な地震の話をしよう．マグニチュードと地震のエネルギーの関係について調べていく．

14.3　マグニチュードとエネルギー

地震速報で見かけるマグニチュード．マグニチュードが 1 違うとどれくらい被害が変わるのか？

公式

地震のエネルギー量を E，マグニチュードを M とする．以下の関係式が成立する．

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5M$$

式変形すると，

$$E = 10^{4.8+1.5M}$$

となる．この式から，マグニチュードが 1 増えるとエネルギーは $10^{1.5} = 10\sqrt{10} \fallingdotseq 31.6$ 倍になることがわかる．マグニチュードと地震エネルギーの変化の関係について以下に記してみる．

マグニチュードの変化	地震エネルギーの倍率
+0.0	1.00 倍
+0.1	1.41 倍
+0.2	2.00 倍
+0.3	2.82 倍
+0.4	3.99 倍
+0.5	5.62 倍
+0.6	7.94 倍
+0.7	11.22 倍
+0.8	15.85 倍
+0.9	22.39 倍
+1.0	31.62 倍
+1.5	177.83 倍
+2.0	1000.00 倍

問題

地震のエネルギーが 10^{10} のときのマグニチュードはいくらか？
また，マグニチュードが 1.8 倍になったとき，エネルギー量はどれだけ増えたか？

【解答】

公式に当てはめて計算する．

$$\begin{aligned}\log_{10} 10^{10} &= 4.8 + 1.5M \\ 10 &= 4.8 + 1.5M \\ 1.5M &= 5.2 \\ M &= \frac{52}{15} \fallingdotseq 3.46\end{aligned}$$

より，マグニチュードは約 3.46

次に，マグニチュード 1.8 倍のときのエネルギーについて求める．

$$\begin{aligned}\log_{10} E &= 4.8 + 1.5 \cdot (\frac{52}{15} \times \frac{18}{10}) \\ &= 4.8 + \frac{15}{10} \cdot (\frac{52 \cdot 3}{25}) \\ &= \frac{48 \cdot 5 + 52 \cdot 9}{50} \\ &= \frac{708}{50} = 14.16 \\ \therefore\ E &= 10^{14.16} \\ &= 10^{0.16} \times 10^{14} \\ &\fallingdotseq 1.45 \times 10^{14}\end{aligned}$$

よって，

地震エネルギーは約 1.45×10^{14} である．

【参考】

先ほど紹介した公式は本来は，マグニチュードから地震エネルギーを求める式である．

15　フィボナッチ数列

フィボナッチ数列とは，
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$ という数列であり，

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\quad (n \geqq 3)$$

という漸化式で与えられる数列。

15.1　松ぼっくり

美しく，様々なデコレーションに利用されている松ぼっくりの笠。この美しさにはどんな秘密があるのか？
笠をよく観察してみると，右回りに 8 個ずつ，左回りに 5 個ずつ，または右回りに 5 個ずつ，左回りに 3 個ずつになっていることがわかる。
この数字はフィボナッチ数列の隣り合う 2 項である。

【関連】
松ぼっくりの笠は凱旋乗に並んでいる。凱旋の外角を調べるとおよそ $137.5°$ である。
この角度は

$$\begin{aligned} 360° \times \left(1 - \frac{1}{\text{黄金比}}\right) &\fallingdotseq 360° \times \left(1 - \frac{1}{1.618}\right) \\ &\fallingdotseq 137.5° \end{aligned}$$

と表せ，この角度を黄金角という。

15.2　ひまわり

夏の風物詩ひまわり。このひまわりを正面から真ん中の種の並び方を観察してみる。すると，並び方が螺旋状に 21 個，34 個，55 個，89 個 $\cdots$ となっており，この数字の列はフィボナッチ数列である。


松ぼっくり


ひまわり

第 III 部

日常と数学

16　ギャンブルと確率

16.1　ギャンブル

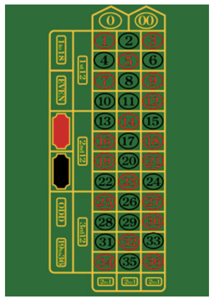
アメリカ式のルーレットについて考えてみよう。

ルーレットのルール

ルーレットは，1 36 までの数字に 0，00 を加えた合計 38 個の数字を円盤に割り振り，そこに玉を落として，玉がどこに入るかを予想するゲーム。どこに入るかの予測は，事前に決められたルールの中で，様々な賭け方が可能。

ルーレットの盤面

盤面に書かれた数字例



レイアウト

ルーレットの掛け方一覧

賭け方	説明	倍率	確率	期待値
赤・黒賭け	18 個の赤か 18 個の黒	2 倍		
前半・後半賭け	1∼18 か 19∼36 か	2 倍		
偶数・奇数賭け	偶数か奇数か	2 倍		
12 数字賭け	レイアウト上の縦の列にある数字 12 個	3 倍		
12 数字賭け	1 ～ 12，13 ～ 24，25 ～ 36 のいずれか	3 倍		
6 数字賭け	レイアウト上の横一列にある 3 個の数字上下 2 段分	6 倍		
5 数字賭け	0 と 00 と 1 と 2 と 3	7 倍		
4 数字賭け	レイアウト上で接する 4 個の数字	9 倍		
3 数字賭け	レイアウト上の横一列にある 3 個の数字	12 倍		
2 数字賭け	レイアウト上の隣り合った 2 個の数字	18 倍		
1 数字賭け	0 と 00 を含む 38 個の数字のうち 1 個	36 倍		

どのような賭け方をすれば参加者にとって利益がでるか (もしくは損をしないか) を考えたい。
期待値の考え方を使って調べていこう。

問題
それぞれの賭け方の確率と期待値を求め，前ページの表をうめよ。

賭け方	倍率	確率	期待値
赤・黒賭け	2 倍	$\frac{18}{38}$	94.7%
前半・後半賭け	2 倍	$\frac{18}{38}$	94.7%
偶数・奇数賭け	2 倍	$\frac{18}{38}$	94.7%
12 数字賭け	3 倍	$\frac{12}{38}$	94.7%
12 数字賭け	3 倍	$\frac{12}{38}$	94.7%
6 数字賭け	6 倍	$\frac{6}{38}$	94.7%
5 数字賭け	7 倍	$\frac{5}{38}$	92.1%
4 数字賭け	9 倍	$\frac{4}{38}$	94.7%
3 数字賭け	12 倍	$\frac{3}{38}$	94.7%
2 数字賭け	18 倍	$\frac{2}{38}$	94.7%
1 数字賭け	36 倍	$\frac{1}{38}$	94.7%

上の表を見るとわかるように，スロットには様々な賭け方があるものの，いずれの場合も期待値が 100% を下まわるように設定されている。
ギャンブルでは，中には幸運に連戦連勝を重ねて大勝ちする人もいる。主催者が赤字にならないかと思うが，ギャンブルにはたくさんの人がたくさんの回数参加するので，「大数の法則」[*5] により，全体を平均してみれば設定された期待値に近い金額の収入が主催者に入る。

[*5] 大数の法則
独立同分布に従う可積分な確率変数の無限列 $X_1, X_2, \cdots$ が与えられたとき，その平均を μ とおく。
また，$\overline{X}_n = \frac{1}{2}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ $(n \leqq 1)$ を標本平均という。
$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - \mu| > \epsilon) = 0$ $(\forall\epsilon > 0)$ (大数の弱法則)
また，
$\lim_{n\to\infty} P(\overline{X}_n = \mu) = 1$ (大数の強法則)

16.2　アプリゲームのガチャ

まずこの問題。

> 問題
> コンビニで限定 100 個の一番くじがあり，1 等は 1 口だけである。100 回引けば必ず当選するだろうか？

このような母数の決まっているくじ引きであれば，100 口の中に必ずあたりが含まれているので 100 回引けば必ず当選する。
では，次の場面ではどうか？

> 問題
> アプリゲームで，欲しいキャラクターの出る確率が 1% のガチャがある。100 回引けば当たるのだろか？

【解答】
当たる確率は約 60% である。つまり，100 回引いたところで当たるとは言い難い。

【解説】
これは，アプリゲームのガチャは引いた回数によって母数は変化することなく，1 回のガチャでの出る確率が 1% なので 1 回目から 100 回目までずっと 1% のガチャを引くことになるからである。
実際に確率を求めてみる。
1 回の試行で当たらない確率は，$1-\dfrac{1}{100}$ である。このことから，100 回引いて当たらない確率は，$\left(\dfrac{1}{100}\right)^{100}$ である。
よって，100 回の試行のうち少なくとも 1 回は当たる確率は

$$\begin{aligned} 1-\left(\frac{1}{100}\right)^{100} &= 1-0.3660323\ldots \\ &\fallingdotseq 0.63 \end{aligned}$$

よって，100 回ガチャを引いて 1% のキャラが当たる確率は約 63% である。
では，当たる確率が 90% 超えるにはどれくらい引けば良いのか？
次ページで計算してみる。

当たる確率が 90% 超えるのは何回目かを計算する。
n 回目まで当たらない確率は，$\left(1-\frac{1}{100}\right)^n$ である。
そのため，n 回目までに少なくとも 1 回は当たる確率は，$1-\left(1-\frac{1}{100}\right)^n$ である。
これが 90% を超えるのは，

$$\begin{aligned} 1-\left(1-\frac{1}{100}\right)^n &> 0.9 \\ 0.1 &> \left(1\frac{1}{100}\right)^n \end{aligned}$$

辺々底が 10 の対数をとると，

$$\begin{aligned} \log_{10} 0.1 &> \log_{10}\left(1-\frac{1}{100}\right)^n \\ -1 &> n\log_{10}\left(\frac{99}{100}\right) \\ -1 &> n(\log_{10} 99 - \log_{10} 100) \\ 1 &< n(\log_{10} 3^2 + \log_{10} 11 - \log_{10} 10^2) \\ 1 &< n(-2\cdot 0.4771213 - 1.0413927 + 2) \\ 1 &< 0.0043648n \\ 229.10\ldots &< n \end{aligned}$$

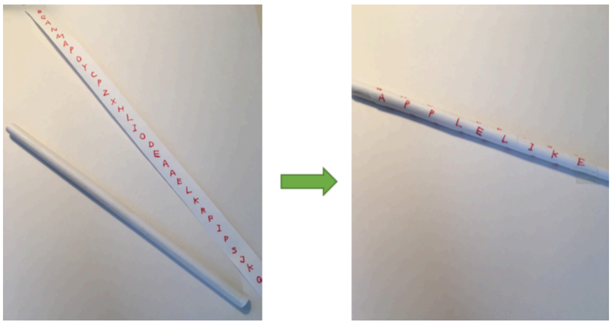
よって，230 回ガチャを回せば当たる確率が 1% の欲しいキャラは 90% の確率で手に入る。
欲しいキャラの 1 点狙い，かなり無謀ですね . . .

17　暗号

17.1　歴史

古典暗号 (古代)

スキュタレー暗号　紀元前 3000 年に利用されていた転置式暗号方式の暗号。



同じ太さのスキュタレー (棒) を受け手と送り手で共有しておき，送り手は棒に紐を巻きつけて横書きに文字を書く。書き終えたら，棒から外して受け手へ送る。途中で拾われてもただのアルファベットの羅列で，何が書いてあるかはわからない。受け手は手元にある棒に紐を巻きつけて元の文章にして読むことができる。

シーザー暗号　紀元前 1 世紀に利用されていた単一換字式暗号方式の暗号。

問題
以下の暗号文を解読せよ。[*6]

QEXLIQEXMGE

この暗号は，平文のアルファベットをずらして暗号化する方法である。送り手と受け手であらかじめアルファベット何文字ずらすかを決めておく手法である。ただし，アルファベットの場合は 26 文字なので 25 パターンのずらし方しかない。そのため，総当たりで簡単に解読されてしまう。
置き換える文字をでたらめに並び替えて解読を困難にする手法もある。これにより，総当たりで解読するときの総和が
26 通り $\times$25 通り $\times \cdots \times$1 通りで計 400000000000000000000000000 通りになる。
以下に例を挙げる。

・平文文字：ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
・暗号文字：PLOKMIJNUHBYGVTFCXDRESZAWQ

受け手と送り手が換え方を秘密にしておけば破ることは難しくなる。

[*6] 4 文字ずらしである。

古典暗号 (中世)

女王メアリの暗号　16c にメアリがエリザベス女王の暗殺計画で共謀者とのやりとりで使用された暗号。

メアリたちが利用したのは,

- アルファベットを記号などに置換
- 数個の無意味な記号 (「冗字」という)
- よく使う単語を記号に置換

を組み合わせたもの。「冗字」は単一換字式の脆弱性を補うための何も表さない記号や文字のこと。

しかし，トマス・フェリペス (イングランドの暗号解読者) により解読され，メアリの有罪が確定した。

ヴィジュネル暗号　1586 年にヴィジュネルにより発表された多換字式暗号方式の暗号。詳細は略。

上杉暗号　この暗号の名前は，上杉謙信 (1530～1577) に由来する。[7]

換字式暗号の一種であり，平仮名を 7 マス ×7 マスの表に入れて縦横に数字を割り振り，平仮名に対応する数字で暗号化する方法。

横に対応する数字と縦に対応する数字を順に記して暗号化する。

七	六	五	四	三	二	一	
ゑ	あ	や	ら	よ	ち	い	一
ひ	さ	ま	む	た	り	ろ	二
も	き	け	う	れ	ぬ	は	三
せ	ゆ	ふ	ゐ	そ	る	に	四
す	め	こ	の	つ	を	ほ	五
ん	み	え	お	ね	わ	へ	六
	し	て	く	な	か	と	七

この表は，数字を並び替えたりしてパターンを変えることができる。

問題

上の字変四十八の表を用いて，以下の上杉暗号を解読せよ。

四一五一六七五五七四

[7] 江戸時代以降に創作されたという説もある。

近代暗号

ADFGVX 暗号　対戦の終盤 1918 年に使われ始めた暗号。仕組みは上杉暗号と同じである。

	A	D	F	G	V	W
A	q	w	e	r	t	y
D	u	i	o	p	a	s
F	d	f	g	h	j	k
G	l	z	x	c	v	b
V	n	m	1	2	3	4
X	5	6	7	8	9	0

例えば，「10 時集合」とローマ字で送るには

VFXWFVDDDWAWDAFFDF

となる。

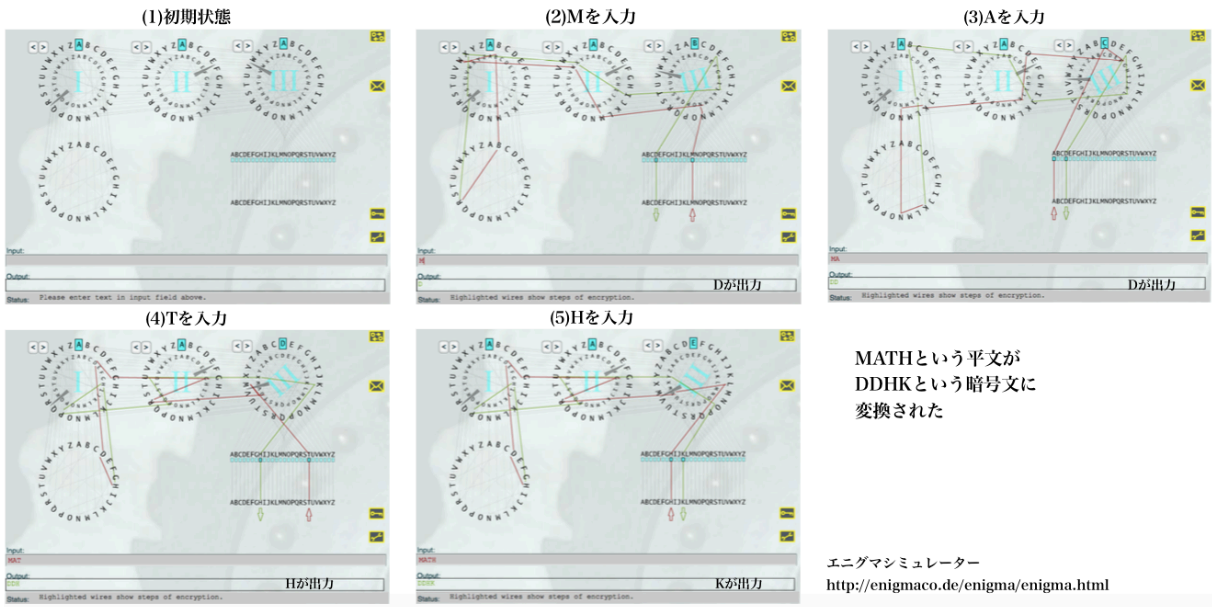
文字 A, D, F, G, V, X が選ばれたのは，モールス信号で送る際に最も判別がしやすいからである。

エニグマ暗号

【仕組み】

エニグマは「スクランブラー」と呼ばれる歯車の組み合わせでできている。暗号文を作る際は，最初にスクランブラーの位置をセットする。その後に，送りたい文を入力するとスクランブラーを経由して変換された暗号アルファベットが返ってくる。続けて 2 文字目を入力すると，歯車も連動して動き，対応したアルファベットが返ってくるという仕組みである。以下にインターネット上でシミュレーションできるサイトで実際に行ったものを載せる。

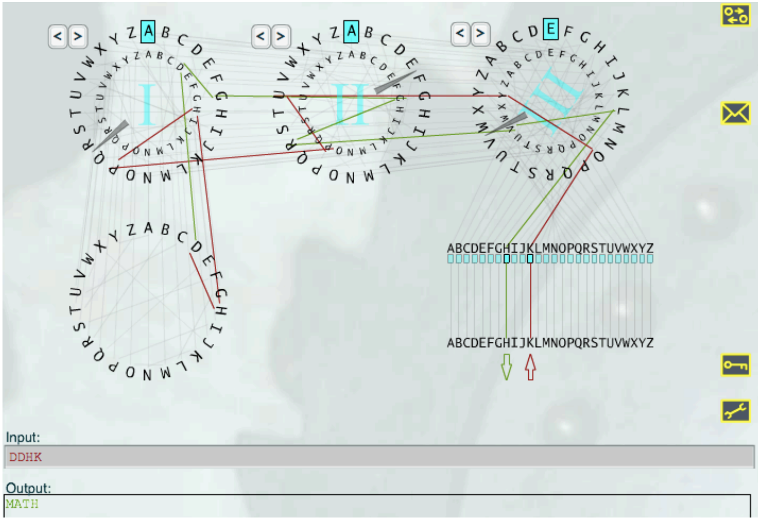
この場合，初期状態でスクランブラーは 3 つ全て A にセットされた状態である。



【暗号文の戻し方】

この暗号文が送られてきたのち，元に戻すには，受け手と送り手で共有しているスクランブラーの位

置 (ここでは 3 つ全て A) にエニグマをセットする。そして，送られてきた暗号文を順に入力すれば暗号化とは逆の手順で平文が返ってくる。



エニグマはスクランブラーの並び替えや位置のパターンの組み合わせにより，当事者以外の解読は困難になる。また，スクランブラーの個数の増加によってもさらに困難なものになった。
ただし，この暗号も 1940 年数学者のアラン・チューリングらにより解読された。

現代暗号

戦後，コンピュータの普及や通信技術の発展により，大勢の人が暗号通信を必要とした。そこで，以下のように暗号技術が発展していくことになる。
これまでの暗号は，誰がどのような暗号を利用しているのかは秘密事項であった。ただし，大勢の人が利用する通信でお互いが別々の暗号方式を利用していては情報は伝わらない。
そこで誕生したのが，これまで隠してきた「暗号のアルゴリズム」と「鍵」のうち，アルゴリズムを公開するというものであった。
ここで，現代暗号の説明の前にコンピュータの仕組みについて説明していく。

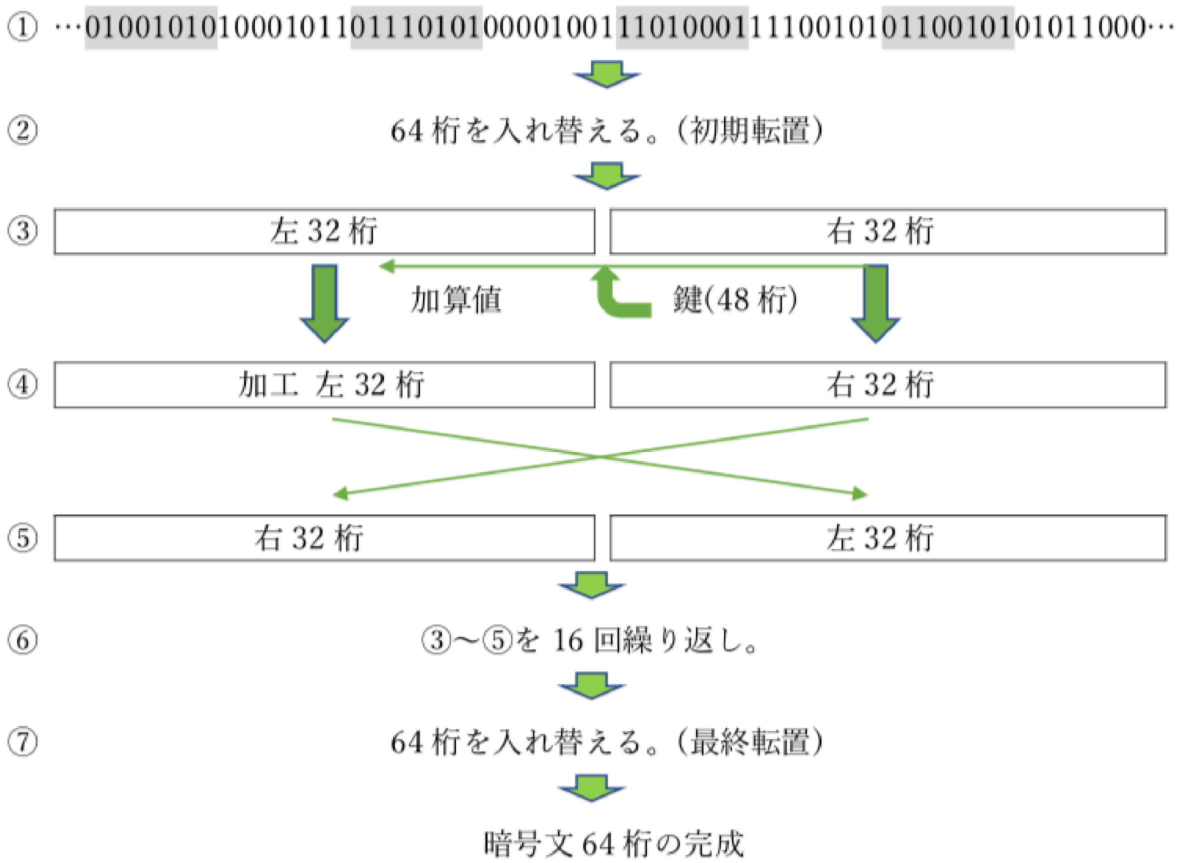
【コンピュータ】
コンピュータでは，文字は数字に置き換えられている。*8ほんの一部紹介すると，ASCII コードでは，0 は 10 進数表記で 48，A は 10 進数表記で 65 で表される。
しかし，コンピュータは電圧がかかっているかいないかの 0 か 1 でしか表現できない。つまり，2 進法でしか計算できない。
よって先ほどの 0 と A を 2 進数表記すると 0 は 110000，A は 1000001 としてコンピュータ内で扱われる。

*8 現在主に使用されているコード
ASCII コード　半角英数文字
JIS コード　電子メール転送などに使用
シフト JIS　主に Windows や Macintosh で使用
EUC　主に UNIX で使用
Unicode　世界で使われるすべての文字を共通の文字集合に利用できるように開発

17.2　現代暗号

17.2.1　DES 暗号

DES 暗号は，全ページで紹介したコンピュータの計算を基本としている。平文を 0 と 1 の 64 ブロックに区切り，それをまた右と左の 2 グループに分け，32 桁ずつにする。そのうちの右はそのままに，左は加工する。加工した左のグループと加工されていない左のグループを入れ替える。これを 16 回繰り返すことで暗号化を行う。



4 では，左 32 桁に，右 32 桁を加工したものと鍵から作成した「加算地」を加えている。
鍵は 2 進数で 64 桁のものを用意する (ただし，このうちの 8 桁は誤り検知用)。これをもとに 48 桁の鍵を 16 回作る。送信者と受信者は 56 桁の鍵を共有する。
このように受信者と送信者が共通の鍵を持つことを「共通鍵暗号」という。この方法の最大の問題点は共通鍵の伝達の手法である。共通鍵の伝達中に傍受されてしまっては暗号化する意味がない。これを解決したのが鍵の一部を公開する「公開鍵暗号」である。

17.2.2　RSA 暗号

公開鍵暗号方式の暗号化方法。1977 年に発明され，現在もなお利用されている方法の 1 つ。

RSA 暗号のアルゴリズム

STEP1:受け取り側の鍵生成

- 大きな素数 p, q を生成。また，$n = pq$ とする。
- $(p-1)(q-1)$ と互いに素な整数 k_1 をとる。
- $k_1 k_2 \equiv 1\ (mod\ (p-1)(q-1))$ なる k_2 をとる。

  $(n, k_1$: 公開，k_2 : 秘密鍵)

STEP2:送信側の暗号化

- メッセージを m とする。$(0 \leq m < n)$
- 公開鍵を用いて $m^{k_1}\ mod\ n$ を作成。これを暗号文 C とする。

STEP3:復合

- C と k_2 を用いて $C^{k_2}\ mod\ n$ とするとこれが元の文。

<u>実際の使用例</u>

九州大学理学部の HP　中央部に公開鍵が記されている

問題

$p = 7, q = 13, k_1 = 5$ としたとき，秘密鍵 $k_2 = 29$ とする。このときに，各自好きな数字をメッセージとし，暗号化した後に復号が正しく行われることを確認せよ。

注) 好きな数字はなるべく小さい方がよい。

解答例

$n = p \times q = 91,\ (p-1) \times (q-1) = 72$

$k_1 = 5,\ k_2 = 29,$ メッセージを $m = 10$ とする。

以下で暗号化を行う。暗号文を c とおくと，

$c = m^{k_1} = 10^5 \equiv 82\ (mod\ 91)$

以下で復号を行う。復号手順は，$m' \equiv c^{k_2}\ (mod\ 91)$ より

$m' = 82^{29} \equiv 10\ (mod\ 91)$

正しく復号できた。

文字と数字の対応を以下のようにおく。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

問題

公開情報 :$k_1 = 7, n = 85$

以下の暗号を読み解け。

72 1 45 32 10 72 1 45 19 62 9

RSA 暗号は，2 つの素数さえわからなければ安全なものである。RSA 暗号の安全性は，素因数分解が難しいことにより担保されている。つまり，絶対に解けないのではなく，解くのにかかる時間が膨大であるということである。

ただし，量子コンピュータが開発されれば (実用化にはまだまだ程遠いとされているが)RSA の安全性を担保している膨大な計算量があっさりと超えられるともされている。

17.3　未来暗号 (量子暗号)

量子とは,「量ることのできる最小単位」という意味である。ここでは光子のことである。
量子力学の不確定性原理を用いることにより実現した暗号技術である。

ハイゼンベルグ不確定性原理

1 個の光子が持つ複数種類の物理量のうち，1 種類の物理量を測定したら，ほかの種類の物理量は測定不可能になる

光子は振動しながら進むので，通信の途中で盗聴しようとすると，角度は変わり内容は無意味になり，盗聴の事実を発見することができる。

17.3.1　BB-84

ベネットとブラサールにより 1984 年に発表された暗号。この暗号の目的は，量子技術を利用して，公開鍵に代わり共通鍵を安全に運ぶことである。
これを利用して情報をやり取りするには，送り手が乱数で生成した鍵を光子 1 つずつに 0 と 1 を表す波形を付加して相手に送る。この方法による量子鍵の伝達が絶対解読されないと言われるのは，鍵を同じものを 2 度と使用しない (ワンタイムパッド) という点にある。[*9]
ただし，限界もある。
光子を 1 個ずつ抽出して鍵を送るが，1 を送るのに使われる光子は約 1 億個である。このことにより，当然ながら通信速度は低下する。また，光子を検出する機器 (APD) の使用に，摂氏マイナス 20〜30 度に冷却する必要がある。冷却装置を利用して回線を結ぶにはコストがかかりすぎる。いくつかの課題点が出た中で，別の量子暗号も開発されている。

17.3.2　Y-00

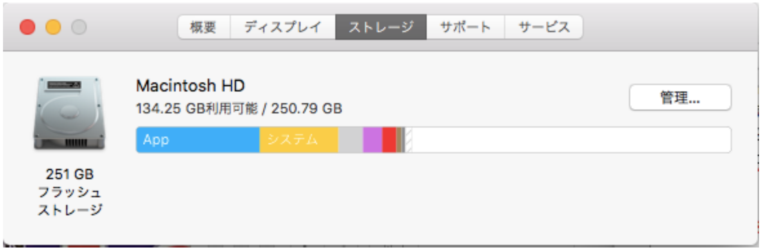
この暗号は，量子技術を用いて，データの通り道からの盗聴を守る方式である。これまでは，暗号化されたデータが途中で盗まれても気づけなかった。確かに暗号化されたデータが盗まれても，すぐには元のデータが解読されることはない。しかし，暗号データを与えてしまうことで，解読の手がかりを与えるきっかけになりうる。
隣り合う信号の隙間に雑音を入れて，暗号データ自体がどれかわからなくするものである。受信者はどの信号が 0 か 1 を表しているか把握しているので問題ない。

[*9] 1949 年に，クロード・シャノンによりワンタイムパッドの解読不能性は証明されている。

18　指数

18.1　携帯電話の容量

質問
あなたの使っている携帯の容量はどのくらい？



MacBook Air の容量

さて，その容量どのくらいかご存知ですか？
まずは，「バイト」という単位について定義を確認する。

定義
1 バイトは，0 or=1 の情報 8 個分。
1 バイト=(半角英数字 1 文字分) である。

では，容量等で現れる「メガ」や「ギガ」などの接頭辞がつくとどのくらいの大きさになるのか？

記号	k	M	G	T	P	E	Z	Y
読み方	キロ	メガ	ギガ	テラ	ペタ	エクサ	ゼタ	ヨタ
大きさ	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}

この表を参照に，あなたの携帯電話にはどのくらいの文字数分の容量があるか確かめてみてください。

通信量とデータ容量は違う！
容量とは端末に収まるアプリや写真などのデータ量のこと。一方通信量とは，閲覧したホームページや使用したアプリのサーバーとのやりとりの量のこと。
なので，データ容量はその端末のスペックであり，通信量は各携帯会社との契約で変化する。

18.2 月に行くには？

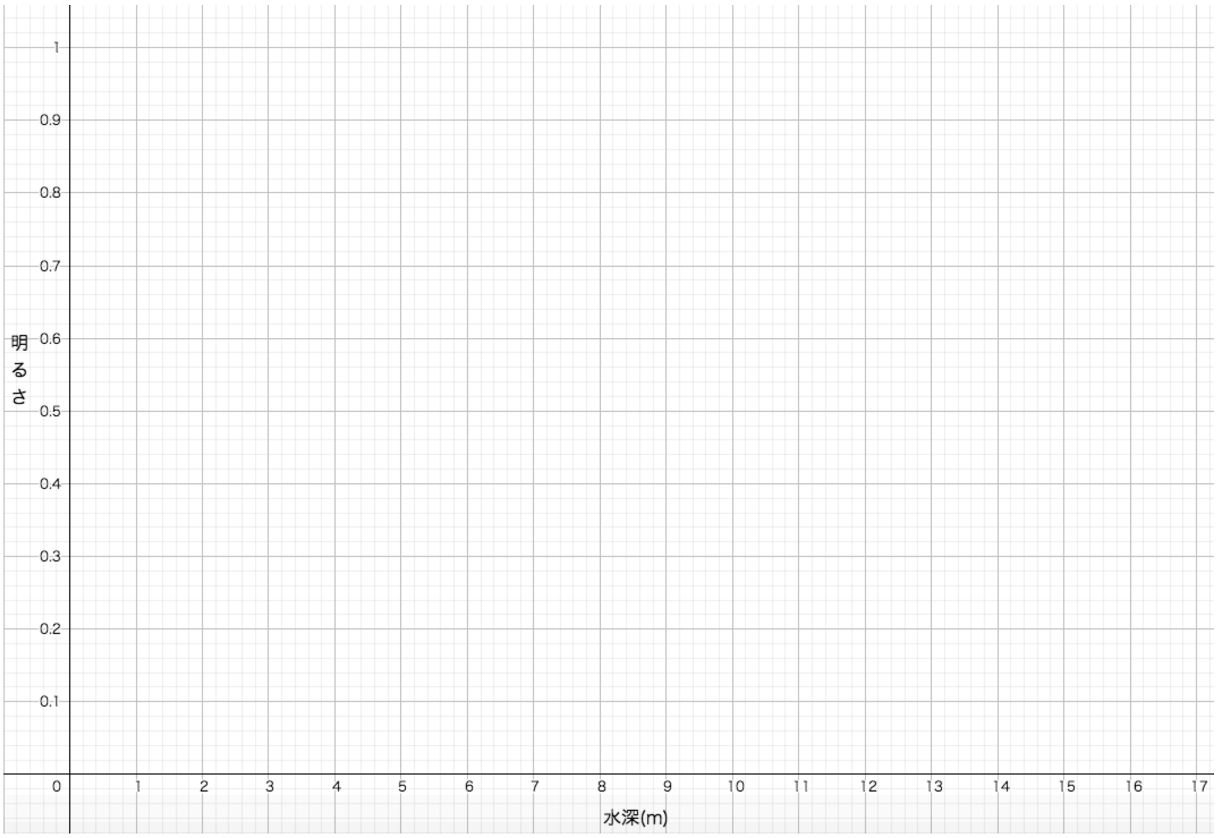
問題
紙を折って月まで届かせたい。さて，何回折ればよいか？
ただし，地球から月までの距離は約 38 万 km とし，
紙の厚さは 0.1mm とする。

さて，このとき紙の大きさはどのくらいになってるでしょうか？
考察してみましょう。

18.3 海の暗さ

海の中での明るさは，水深が 1 メートル増えるごとにおおよそ 10 分の 9 倍になる。

問題
水深と明るさの関係を式に表し，グラフを描け。



18.4　利子

お金を借りたことがある方はいないと思いますが，高校生であればお金を借りると利子がつくことはご存知かと思います。さて，この利子のつけ方には２種類あります。それが,「単利法」と「複利法」である。

定義

単利法：元金のみに利子がつくもの。
複利法：元金 + 前の期間までに生じた利子 に利子がつくもの。
年利率：1 年間の利息の割合を示したもの。

同じ年利率のときは上の定義により複利法の方が返済する金額が高くなることは分かる。

問題

100 万円を年利率 5% として銀行に預けた。このとき元金が倍になるまでの年数は？
単利法，複利法それぞれで求めよ。

$\log_2 3 = 1.5849$，$\log_2 5 = 2.3219$，$\log_2 7 = 2.8073$

70 の法則

実は，複利法の数式を使わずに，元金が 2 倍になるまでのおおよその年数を瞬時に計算する方法がある。その方法が
「$70 \div$ 年利率 (%)」である。

上の問題はこの「70 の法則」は使わずに解いてください。

【解答・解説】

月に行くには？

紙の厚さが $0.1mm$ であり，1 回折り重ねるごとに厚さは 2 倍になる。このときの紙の厚さは $0.1mm \to 0.2mm \to 0.4mm \cdots$ と，倍々に増えて行く。重ねた紙の厚さを r，折る回数を n とおく。すると，

$r = 0.1 \times 2^n$ と表せる。月までの距離が 38 万 km なので，

$r > 380000$ をとけばよい。つまり，$0.1 \times 2^n > 380000$ を解く。これを解くと

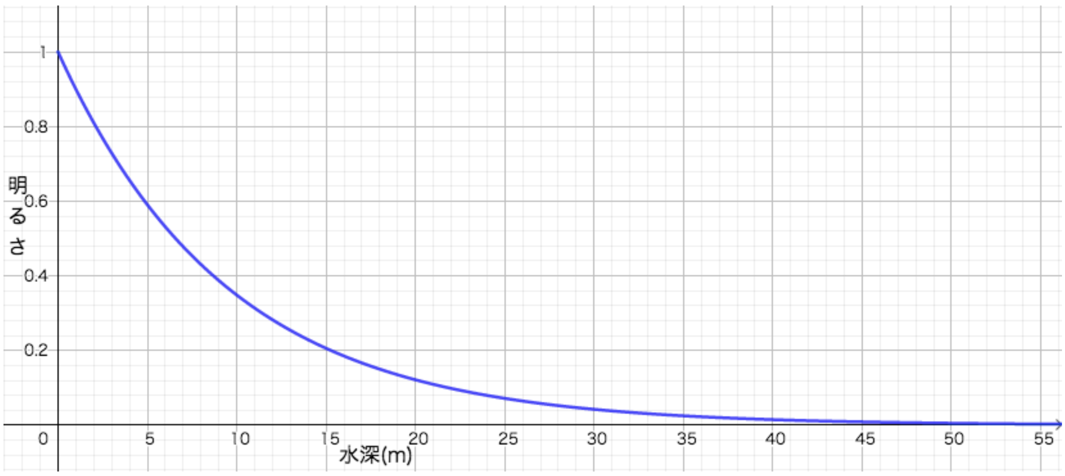
$n = 41$ で r は約 220000，$n = 42$ で r は約 440000

よって 42 回目に月に届く。

ちなみに 42 回折ると紙の大きさは分子レベルまで小さくなる。そもそも，紙を 42 回も折ることはできない。

海の深さ

水深の軸を伸ばしてみた。



利子

・単利法：このときは 100 万円に対して年利率 5% なので年間 5 万円ずつ増える。経過年数を n とし，n 年経過後の元金と利子の和を S_n とすると

$S_n = 100 + 100\dfrac{5}{100}n$

倍になる年数は $S_n \leqq 200$ を解けば良い。

$100 + 5n \leqq 200$ より $n \leqq 25$

よって 25 年後に倍になる。

・複利法：このときは 100 万円に対して年利率 5% なので，経過年数を n とすると，n 年経過後の元金と利子の和 S_n は

$S_n = 100(1 + r)^n$ で表せる。

倍になる年数は $S_n \leqq 200$ を解けば良い。

$100(1 + \dfrac{5}{100})^n \leqq 200$

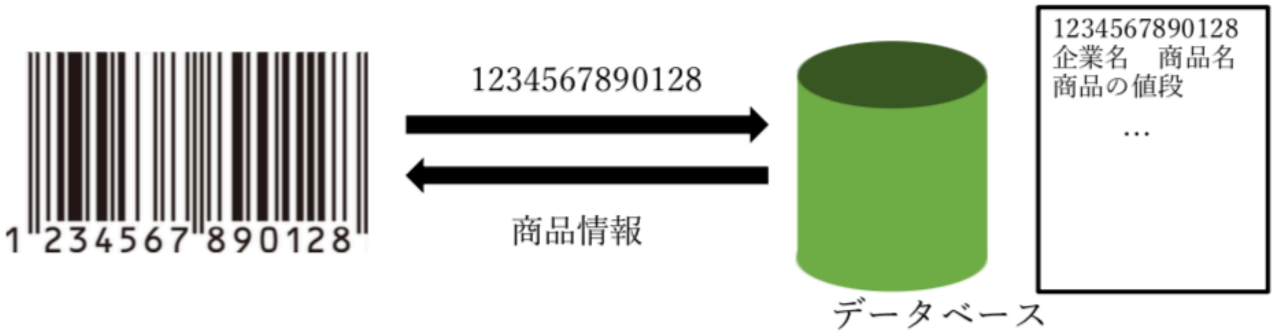
$(\dfrac{105}{100})^n \leqq 2$

これを解くと $n \leqq 14.2248$ なので 15 年後に倍になる。

19　バーコード

　さて，スーパーやコンビニで買い物をする時にレジでピッと識別され，商品の値段などの情報を読み取られるバーコード。疑問に思いませんか？なぜ，白と黒の縦線の集まりが情報を持つのか？一体どんな仕組みになっているのか？
今回は数あるバーコードの種類のうち広く使われている JAN コード[*10]について見ていくことにする。

そもそもバーコードそのものには，なんの情報も含まれていない。ただの数字の羅列である。バーコードを読み込んで，その数字の羅列をデータが一括管理されているデータベースに送り，該当する商品を検索して情報をバーコードのスキャン元に送ることでレジで商品情報を表示できる仕組みである。



では，バーコードの白と黒の線でどのようにして数字を表しているのだろうか？

定義

バーコードとは，「バーコードシンボル」という白と黒の縦の棒を組み合わせた縞模様を使ってデータを表現する符号のこと

バーコードには，右の図の赤の囲いの中のように，左右と中央の 3 箇所に他よりも線が長い部分があり，これをガードパターンという。中央のガードパターンを境に，左右 6 桁ずつの数字を表している。
また，バーコードは線の幅が重要であり，最も細い幅 (1 モジュール) を基準に 7 モジュールで 1 つの数字を表す。

[*10] JAN:Japan Articre number の略。国際的には EAN と呼ばれる。

【データ構成】

(JAN コード)　JAN コードには，標準タイプ (13 桁) と短縮タイプ (8) 桁があり，標準タイプの中にも JAN 企業コードが最初の 7 桁のものと 9 桁のものがある。

タイプ	JAN 企業コード	商品アイテムコード	チェックデジット
標準	7 桁	5 桁	1 桁
	9 桁	3 桁	1 桁
短縮	6 桁	1 桁	1 桁

(JAN 企業コード)　JAN 企業コードは，国コードを含め 9 桁と 7 桁がある。先頭の 2 桁は国コードである。ちなみに日本の国コードは 45，49 である。また，先頭の 3 桁を見れば企業コードが 7 桁なのか 9 桁なのかがわかる。

456 ～ 459 →9 桁 JAN 企業コード

450 ～ 455 →7 桁 JAN 企業コード

490 ～ 499 →7 桁 JAN 企業コード

他国の企業コードが知りたい方は各自調べてみてください。

(商品アイテムコード)　商品識別のためのコードで，JAN 企業コードを取得した企業が自由に設定できる。

(チェックデジット)　バーコードを正確に読み取っているかを識別するためのコード。識別方法は後述。

(書籍)　書籍のバーコードを見ると，下右の写真のように二段のバーコードになっている。
その構造は以下のようになっている。

978 or 979	9 桁の数字	1 桁
書籍用	ISBN コード	C/D

192	4 桁	5 桁	1 桁
2 段目を示す	図書分類	本体価格 (税抜)	C/D

ここにおける C/D はチェックデジットであり，ISBN コードは
(国番号 + 出版社番号 + 署名記号)[*11] の組み合わせである。

(定期刊行物)　刊行物コードは 13 桁の JAN コードと 5 桁のアドオンコードで構成される。

491	1 桁	5 桁	2 桁	2 桁	C/D	1 桁	4 桁
刊行用	予備	雑誌コード	月	年号	1 桁	予備	本体価格

[*11] 日本の国番号は 4 で，出版社記号と署名記号は可変。

【チェックデジットによる識別方法】
バーコードの偶数番目の数字を 3 倍，奇数番目はそのままでこれらの数字を足し合わせる。その数値に D/C の数字を足して 10 の倍数になれば正しく読み取れている。もしならなければ，汚れなどによるエラーで誤って読みとっていることになる。

> 問題
> 490250540822
> この 12 桁の数字にチェックデジットを加えて 13 桁にせよ。

【JAN コードを読み取る】
バーコードは，先に述べたように
ガードパターン 6 桁 ガードパターン 6 桁 ガードパターン
という構造をしており，ガードパターンは (白黒白黒白) の 5 モジュールで作成されている。
また，1 つの数字は 7 モジュールで表されていた。
下に識別の仕方を表した表を載せる。ただし，白を 0，黒を 1 で表している。

数字	左側		右側	1 桁目の数字を表現するパターン	
	奇数パリティ	偶数パリティ			
				数字	1:奇数パリ 0:偶数パリ
0	0001101	0100111	1110010	0	111111
1	0011001	0110011	1100110	1	110100
2	0010011	0011011	1101100	2	110010
3	0111101	0100001	1000010	3	110001
4	0100011	0011101	1011100	4	101100
5	0110001	0111001	1001110	5	100110
6	0101111	0000101	1010000	6	100011
7	0111011	0010001	1000100	7	101010
8	0110111	0001001	1001000	8	101001
9	0001011	0010111	1110100	9	100101

ところで，バーコードで表される数字は 13 桁なのに今求めたのは 12 桁で 1 桁足りませんね。ここで使用するのが左 6 桁の数字である。左側の数字の読み取りには奇数パリティもしくは偶数パリティを使い分けた。この偶奇の配列を元に，表の右側で当てはめて 1 桁目の数字を決定する。
これにより，12 桁の数字分のコードで 13 桁の数字を表している。
ちなみに，日本の国コードは 45 か 49 なので 1 桁目は 4 であるので，日本の商品の左側 6 桁のパリティの配列は奇偶奇奇偶偶の組み合わせになっている。

問題

0101000010110100111001001101100010100111011100101010101110011100101001

00011011001101100111010001010

このバーコードを読み取って 13 桁の数字の配列を答えよ。

20　病気

20.1　陽性反応

とある病院に『1 万人に 1 人の確率で発生する難病 X の新しい検査薬』が届いた。この検査薬の精度は 99° であるという。その病院の医者 A が試しに自分を検査してみた。すると，陽性反応が出た。

定義

陽性：ウイルス・細菌などの感染の有無を検査で被検体が反応を示すこと。陰性：ウイルス・細菌などの感染の有無を検査で被検体が反応を示さないこと。偽陽性：本来はウイルス感染していないのに誤って陽性と判定してしまうこと。偽陰性：本来はウイルス感染しているのに誤って陰性と判定してしまうこと。

問題

この医者 A が難病 X に罹っている確率はどのくらいでしょうか？
ただし，日本の総人口を 1 億人とする。

精度が 99° はかなり高い精度である。ただし，本来は X の患者なのに陰性反応が出る患者が 1% いて，その逆の X の患者ではないのに陽性反応が出る患者も 1% 存在する。
このことを踏まえて考えてみましょう。

【解答】

まず，日本全体に難病 X の患者がどのくらいいるのかを計算する。難病 X の患者は 1 万人に 1 人であり，日本の総人口は 1 億人なので

$1\text{ 億人} \times \dfrac{1}{1\text{ 万人}} = 1\text{ 万人}$

逆に，難病 X に罹ってない人は

$1\text{ 億人} - 1\text{ 万人} = 9999\text{ 万人}$

このうちの 1% は陽性と誤判定されるので，その人数は

$9999\text{ 万人} \times \dfrac{1}{100} = 99\text{ 万 }9999\text{ 人}$

さて，難病患者 1 万人と推定されたが，検査精度が 99% なので陽性反応が出る患者数は

$1\text{ 万人} \times \dfrac{99}{100} = 9900\text{ 人}$

残る 100 人は陽性なのに陰性と誤判定された形になる。

陽性反応が出た患者数の総計は

$99\text{ 万 }9999\text{ 人} + 9900\text{ 人} = 100\text{ 万 }9800\text{ 人}$

そのうち本当に難病 X に罹っている患者数は

9900 人

よって，陽性反応が出た上で本当に難病 X に罹っている確率は,

$\dfrac{9900}{1009800} \times 100 \fallingdotseq 0.9803922\%$

人数の少ない難病ほど間違って「陽性反応」が出る割合は大きくなることがわかる。

20.2　感染症

ある年に，新型 K ウイルスという感染症が世界で広がり，世界中でパニックが起こった。日本でも，マスクが品切れになったり，ネット上にはあらゆるデマ情報が流れていた。しばらくして PCR 検査ができるようになり，「希望者全員に PCR 検査を実施するべき」という世論が多く上がった。

定義

不顕性感染：感染が成立していながら臨床的に確認しうる症状を示さない感染様式のこと
PCR：精密検査の一つ。
感度：ウイルス感染者に対し陽性と示す割合特異度：ウイルス被感染者に対し陰性と示す割合

問題
PCR での陰性判定はその人が K に罹ってないことの証明になるか？

問題
希望者全員に PCR 検査をした方が良いのか？
自身で仮説を立て論じよ。
また，ある日時点での公表されたデータを以下におくので，参考にして良い。

国・地域	感染者	死亡者
中国	80,844	3199
韓国	8,162	75
日本	780	22
アメリカ	2,951	57
フランス	4,499	91
イタリア	17,750	1,441
イラン	12,729	611
総数	151,675	5,825

21　クラスに同じ誕生日はいる？

問題
1 クラス 40 人の中に同じ誕生日のペアが 1 組以上いる確率は？

【解答】

閏年を考えずに 1 年を 365 日とする。

40 人の中に同じ誕生日の人が少なくとも 1 組いる確率は，40 人の誕生日が全て異なる確率を 1 から引けば良い。

40 人の誕生日の場合の数は 365^{40} 通り。一方で，40 人の誕生日が全て異なる場合の数は,

$365 \times (365-1) \times (365-2) \times \cdots \times (365-39)$

であるので，50 人の誕生日が全て異なる確率は,

$$\frac{365^{40}}{365 \times (365-1) \times (365-2) \times \cdots \times (365-39)} \fallingdotseq 0.109$$

となる。したがって，40 人の中に同じ誕生日の組がいる確率は

$1 - 0.109 = 0.891 = 89.1\%$

23 人を超えると 50% を超える。

22　席替えで同じ席になるか？

問題

1 クラス 40 人で席替えした際に同じ席になる人がいる確率はどれくらい？

【解答】

6 人 (A,B,C,D,E,F) の時について考える。

全員が同じ席にならない場合の数を a_6 とおく。

まず，A が B の席に移ったとする。このとき，

- B が A の席に移ったとすると，残りの 4 人について考えれば良いのでその場合の数は a_4 である。
- B が A 以外の席に移ったとする。すると，B~F はそれぞれ A,C,D,E,F の席に移ることになる。ここで，A の元の席を B の元の席とみなして考えると B~F の人が元の B~F の席に当たらないように移るのでこの場合の数は a_5 である。

よって，A が B の席に移ったときの場合の数は a_4+a_5 である。A が B 以外の席に移った時に関しても同様に考えられるので，求める場合の数は $a_6=5(a_4+a_5)$

同じ理論で一般論を考えると，$a_n=(n\text{-}1)(a_{n-1}+a_{n-2})$ が成り立ち，$a_2=1$，$a_3=2$ である。

あとは，この 3 項間漸化式を解く。

$a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$ の辺々を $n!$で割る。

$$
\begin{aligned}
\frac{a_n}{n!} &= \frac{n-1}{n!}a_{n-1}+\frac{1}{n}\frac{a_{n-2}}{(n-2)!} \\
\frac{a_n}{n!} &= \frac{n-1}{n}\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{n}\frac{a_{n-2}}{(n-2)!}
\end{aligned}
$$

$\frac{a_n}{n!}$を b_nとおく。

$$
\begin{aligned}
b_n-b_{n-1} &= \frac{-1}{n}(b_{n-1}-b_{n-2}) \\
&= \frac{(-1)^{n-3}}{n\cdot(n-1)\cdots 4}(b_3-b_2) \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot(n-1)\cdots 4}(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}) \\
&= \frac{(-1)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

よって n 人が全員異なる席に移る場合の数は

$$
\begin{aligned}
a_n &= n!b_n \\
&= n!(b_2+\sum_{k=3}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}) \\
&= n!\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

また，席の移り方の全通りは $n!$通りなので，求める確率は $n=40$ として

$$\begin{aligned}\mathrm{P} &= 1-\frac{40!\sum_{k=2}^{40}\frac{(-1)^k}{k!}}{40!}\\ &= 1-\sum_{k=2}^{40}\frac{(-1)^k}{k!} = 0.63 = 63\%\end{aligned}$$

この問題のように $1\neq$①, $2\neq$②, $\cdots$,$n\neq$ⓝを全て満たすように並べる順列の総数を求めるものを，モンモール問題と呼ばれる。

$\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ について，

$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\times2}+\frac{x^3}{1\times2\times3}+\frac{x^4}{1\times2\times3\times4}+\frac{x^5}{1\times2\times3\times4\times5}+\cdots$

の x に-1 を代入して，

$\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} = 0.36$

このことより，少なくとも 1 人は同じ席になる確率はどれだけ人数を増やしてもおおよそ 0.63= 63%に収束する。

23　あなたは何曜日生まれ？

23.1　ツェラーの方法

　y 年 m 月 d 日の曜日を求める
ただし，1 月，2 月前月前年の 13 月，14 月として扱う。
また，紀元前は $\hat{y}$ 年は $1-\hat{y}$ として扱う。

ツェラーの公式

$$h=\left\{d+\left\lfloor\frac{26(m+1)}{10}\right\rfloor+Y+\left\lfloor\frac{Y}{4}\right\rfloor+\Gamma\right\}\ mod\ 7$$

$$\Gamma=\begin{cases}-2C+\left\lfloor\dfrac{C}{4}\right\rfloor & \text{グレゴリオ暦}\\ -C+5 & \text{コリウス歴}\end{cases}$$

ただし，

$$C=\left\lfloor\frac{y}{100}\right\rfloor$$
$$Y\equiv y\ \ mod\ 100$$

$\lfloor x\rfloor$: x を超えない最大の整数

$x\ mod\ n$: x を n で割った剰余

h が 1，2，$\cdots$，0 $\Longrightarrow$ 日，月，$\cdots$，土

日本では 1872 年からグレゴリオ暦が用いられている。

練習
1964 年 10 月 10 日は何曜日？

【解答】

$$\begin{aligned}C&=\left\lfloor\frac{1964}{100}\right\rfloor=\lfloor 19.64\rfloor=19\\ \Gamma&=-2C+\left\lfloor\frac{C}{4}\right\rfloor=-2\cdot 19+\left\lfloor\frac{19}{4}\right\rfloor\\ &=-38+\lfloor 4.75\rfloor=-38+4=-34\\ Y&=y\ \ mod\ 100\\ &=1964\ \ mod\ 100=64\\ h&=\left\{10+\left\lfloor\frac{26(10+1)}{10}\right\rfloor+64+\left\lfloor\frac{64}{4}\right\rfloor-34\right\}\\ &=10+28+64+16-34\\ &=84\equiv 0\ \ mod\ 7\end{aligned}$$

よって，$h=0$ から，1964 年 10 月 10 日は土曜日。

23.2 ツェラーの方法の簡略化

(1 月，2 月はその前の年の 13 月，14 月として扱う。)

「年」→「月」→「日」の順で必要な数値を考えて足し合わせて，それを 7 で割った余りにより曜日を計算。

(1) 西暦の「下 2 桁」と「下 2 桁を 4 で割った商 (あまりは無視)」を把握。

(2) 次に，月に関する部分を考える。
$\left\lfloor \dfrac{26(m+1)}{10} \right\rfloor$ を毎回計算するよりも，各月のこの値を 7 で割った余りを覚える方が早い。
対応表を以下に示す。

1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
1	4	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5

(3) 日はそのまま。

(4) (1)∼(3) を足して，1900 年代の時はさらに 1 を足す。
(ただし，2000 年 1 月，2 月は 1999 年扱い)

(5) これを 7 で割って，余りを曜日に対応させる。
余りと曜日の対応表を以下に示す。

余り	1	2	3	4	5	6	0
曜日	日	月	火	水	木	金	土

練習
1924 年 1 月 25 日は何曜日？

【解答】

(1) 1923 年 13 月 25 日として扱う。下 2 桁 $= 23$, 下 2 桁を 4 で割った商 $= 5$

(2) 1 月なので 1

(3) 25 日なので 25

(4) 足すと $23 + 5 + 1 + 25 = 54$，1900 年代なので 1 足して 55

(5) 7 で割ると $55 \equiv 6 \;\; mod\ 7$ より金曜日

23.3 コンウェイの方法

知識 (ドリームズデー)

4/4, 6/6, 8/8, 10/10, 12/12
5/9, 9/5, 7/11, 11/7 は，一年を通して同じ曜日である。

曜日を求める方法
20XX 年 Y 月 Z 日，19XX 年 Y 月 Z 日として X, Y, Z を定める。

(1) XX が 偶数 → そのまま
奇数 → 11 をたす
この数を A とする。

(2) A÷2 =B

(3) B が 偶数 → そのまま
奇数 → 11 をたす
この数を C とする。

(4) C÷2 の余りを求める。

(5) この数により，ドリームズデーの曜日が求まる。

(a)1900 年代

余り	ドリームズデー
0	火
1	月
2	日
3	土
4	金
5	木
6	水

(b)2000 年代

余り	ドリームズデー
0	水
1	火
2	月
3	日
4	土
5	金
6	木

求めたい日とドリームズデーの日数の差から曜日を計算する。
ただし，1 月・2 月・3 月のドリームズデーがなく，曜日を求めるのに困難なので，ドリームズデーに追加をする。

追加
1 月 : 3 日 (閏年は 4 日)
2 月 : 28 日 (閏年は 29 日)
3 月 : 7 日

練習

1972 年 2 月 3 日は何曜日？

【解答】

1972 年 2 月 3 日から，$XX = 72,\ Y = 2,\ Z = 3$

(1):72 は偶数から $A = 72$

(2):$B = 72 \div 2 = 36$

(3):36 は偶数から，$C = 36$

(4):$36 \equiv 1 \quad mod\ 7$

(5):1900 年代で余り 1 より 1972 年のドリームズデーは火曜日。ここで，1972 年は閏年か否か調べる。

定義

閏年の計算方法は以下で定まる。

西暦が 4 で割り切れる年は閏年

ただし，西暦が 100 で割り切れる年は平年

ただし，西暦が 400 で割り切れる年は閏年

1972 は 4 で割り切れ，100 では割り切れないので閏年。よって，1972 年のドリームズデーは 2 月 29 日。さて，2 月 3 日から 2 月 29 日までは 26 日経過しており，$26 = 7 \times 3 + 5$ 日の経過で火曜日になることから，2 月 3 日は木曜日

24　給料

　就職活動をしていたあなたは，ある外資系企業への就職が決まった。入社日は 1 月 1 日である。人事部の給与についての説明を受けに行った。

問題
一度給与システムを選ぶと途中で変更できないということである。どちらの給与システムが良いか？

A 案　年一回の昇給 (年末に一括支給)
　　　年間昇給 3 万円
B 案　半年に一回の昇給 (6 月と年末に半分ずつ支給)
　　　半年に昇給 1 万円

【解答】

	A 案	B 案		
	年末	6 月	年末	年間
1 年目	400 万円	200 万	201 万	401 万
2 年目	403 万円	202 万	203 万	405 万
3 年目	406 万円	204 万	205 万	409 万
4 年目	409 万円	206 万	207 万	413 万
5 年目	412 万円	208 万	209 万	417 万
計	2030 万円			2045 万

B を選択するのが正解。上の表のように最初の年俸額を 400 万円に設定して 5 年間の給与支給額をシミュレーションしてみれば判断できる。

25　デザイン

25.1　黄金比

黄金比とは，世界で一番美しいと言われている比率のこと。

定義

線分を $a:b$ に分けたとき，$a:b=b:(a+b)$ が成立するものを黄金比という。

問題

$a=1$ のときの黄金比 $a:b$ は？

$$\begin{aligned} 1:b &= b:(1+b) \\ b^2 &= 1+b \\ b^2-b-1 &= 0 \\ b &= \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$b>0$ より $b=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

○　身近な黄金比

身近なもの

トランプ，キャッシュカード，パスポート，名刺

建造物

サクラダファミリア，金閣，パリの凱旋門

自然界

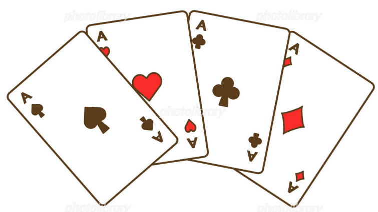
オウムガイの貝殻，地周りのタネの並び方

その他

モナリザの顔，Apple のロゴ

(1) キャッシュカード

(2) パスポート



(3) トランプ

25.2　その他の比

25.2.1　白銀比 (大和比)

白銀比は黄金比に並ぶ美の比率の一つであり，$1:\sqrt{2}$ の比率のことをいう。
この比率の発祥地は日本であり，日本人はこの比を美しいと思う傾向にある。

○　身近な白銀比

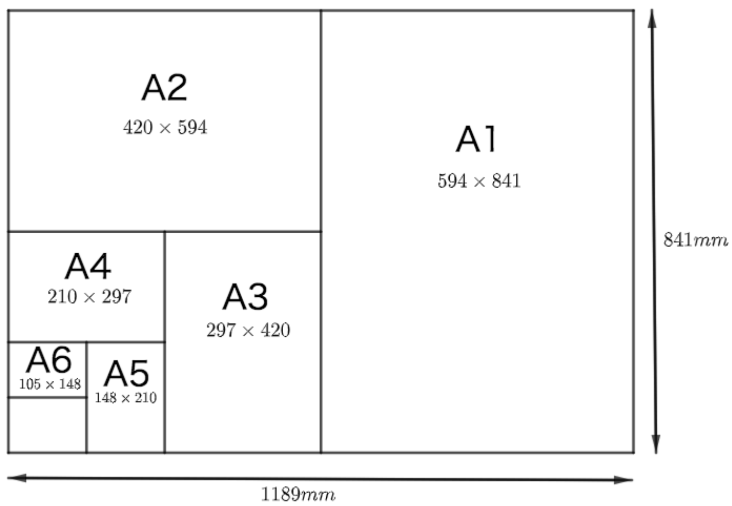
A 版用紙

仏像の顔の縦横比

文庫本のサイズ

ドラえもん，キティちゃん等

A 版用紙は ISO216 という紙の寸法を規定する国際規格により定められている。(B 版等もこの規格で定められる。)



25.2.2　青銅比

青銅 2 次方程式 $x^2-3x-1=0$ の正の解 $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ と 1 の比率のこと

25.2.3　白金比

$1:\sqrt{3}$ の比率のこと。

25.3 数学的美しさ

定義

$1:\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$($n$ は自然数) で表される比のことを貴金属比という。

第 1 貴金属比：黄金比

第 2 貴金属比：白銀比

第 3 貴金属比：青銅比

性質

逆数

$\dfrac{-n+\sqrt{n^2+4}}{2}$ で表される。

累乗

正の奇数乗は，常に貴金属比。

正の偶数乗は，常に逆数との和が自然数である実数。

連分数

$n+\dfrac{1}{n+\frac{1}{n+\frac{1}{n+\cdots}}}$

数列

貴金属数は隣り合う 2 項の極限で表せるような数列が存在する。

黄金比

フィボナッチ数列の隣り合う 2 項の商の極限で表される。

一般

数列 $\{M_k\}$ を漸化式

$$M_0=0,\ M_1=1,\ M_{k+2}=nM_{k+1}+M_k$$

で定義すると，この一般項は，第 n 貴金属数を μ として，

$$\begin{aligned} M_k &= \frac{\mu^k-(-\mu)^{-k}}{\mu+\mu^{-1}} \\ &= \frac{\mu^k-(-\mu)^{-k}}{\sqrt{n^2+4}} \end{aligned}$$

で表される。このとき，この数列の隣り合う 2 項の商は，$k\to\infty$ のとき μ に収束。

$$\lim_{k\to\infty}\frac{M_{k+1}}{M_k}=\mu$$

26　イラスト

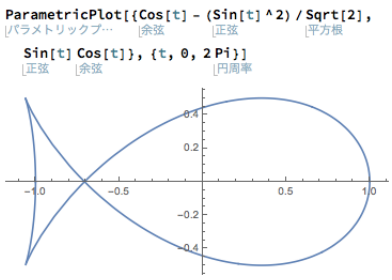
以下の関数が何を表しているかわかりますか？ただし，$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

$$
(1) \quad \begin{cases} x(t) = & \cos t - \dfrac{\sin^2 t}{\sqrt{2}} \\ y(t) = & \sin t \cos t \end{cases}
$$

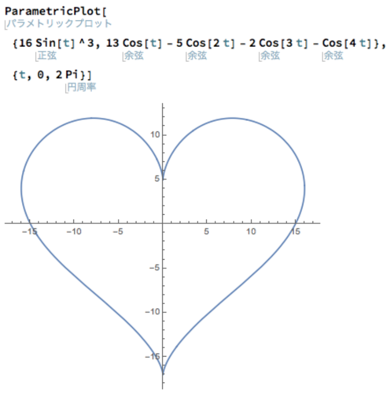
$$
(2) \quad \begin{cases} x(t) = & 16 \sin^3 t \\ y(t) = & 13 \cos t - 5 \cos 2t - 2 \cos 3t - \cos 4t \end{cases}
$$

$$
(3) \quad \begin{cases} x(t) = & \cos t \ (1 + \dfrac{1}{2} \sin 5t + \dfrac{3}{10} \cos 10t) \\ y(t) = & \sin t \ (1 + \dfrac{1}{2} \sin 5t + \dfrac{3}{10} \cos 10t) \end{cases}
$$

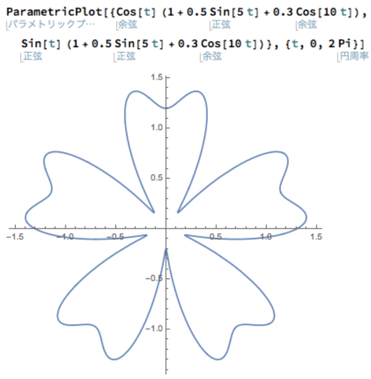
科学技術計算ソフトウェア Mathematica でグラフを描写してみた。



(1) 魚

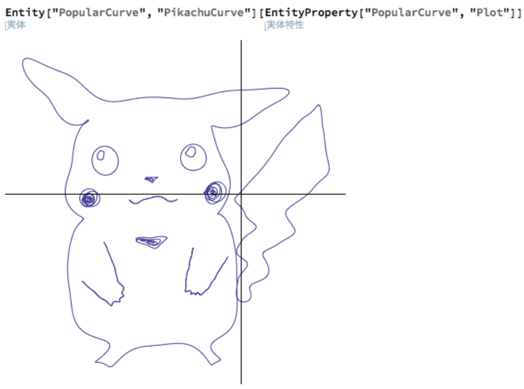


(2) ハート



(3) 花

このように，三角関数だけで色々な絵を描くことができる。



この図もほとんど三角関数だけで描かれている。関数を次のページから記したが，思っていたより長く，2 ページに渡ってしまった。

$x(t) =$

$$((-\frac{1}{4}\sin(\frac{10}{7}-23t)-\frac{3}{10}\sin(\frac{4}{3}-22t)-\frac{2}{5}\sin(\frac{7}{5}-19t)-\frac{1}{5}\sin(\frac{7}{5}-16t)-\frac{3}{7}\sin(\frac{10}{7}-15t)-\frac{3}{8}\sin(\frac{13}{9}-9t)-\frac{19}{13}\sin(\frac{11}{7}-3t)+\frac{222}{5}\sin(t+$$
$$\frac{11}{7})+\frac{41}{2}\sin(2t+\frac{11}{7})+\frac{34}{9}\sin(4t+\frac{11}{7})+\frac{1}{3}\sin(5t+\frac{8}{5})+\frac{3}{8}\sin(6t+\frac{8}{5})+\frac{12}{7}\sin(7t+\frac{13}{8})+\frac{11}{7}\sin(8t+\frac{13}{8})+\frac{1}{4}\sin(10t+\frac{20}{13})+\frac{2}{9}\sin(11t+$$
$$\frac{16}{9})+\frac{3}{8}\sin(12t+\frac{8}{5})+\frac{1}{3}\sin(13t+\frac{7}{4})+\frac{1}{2}\sin(14t+\frac{17}{10})+\frac{5}{7}\sin(17t+\frac{17}{10})+\frac{1}{28}\sin(18t+\frac{9}{2})+\frac{1}{2}\sin(20t+\frac{12}{7})+\frac{3}{7}\sin(21t+\frac{16}{9})+\frac{6}{11}\sin(24t+$$
$$\frac{7}{4})-\frac{979}{9})\theta(51\pi-t)\theta(t-47\pi)+(-\frac{6}{5}\sin(\frac{14}{9}-22t)-\frac{1}{9}\sin(\frac{7}{5}-19t)-\frac{9}{8}\sin(\frac{14}{9}-18t)-\frac{1}{14}\sin(\frac{15}{11}-15t)-\frac{6}{5}\sin(\frac{11}{7}-12t)-\frac{7}{6}\sin(\frac{11}{7}-$$
$$8t)-\frac{29}{10}\sin(\frac{11}{7}-6t)-\frac{104}{3}\sin(\frac{11}{7}-2t)+\frac{415}{18}\sin(t+\frac{11}{7})+\frac{71}{18}\sin(3t+\frac{11}{7})+\frac{19}{8}\sin(4t+\frac{33}{7})+\frac{22}{21}\sin(5t+\frac{8}{5})+\frac{3}{8}\sin(7t+\frac{61}{13)})+\frac{5}{9}\sin(9t+$$
$$\frac{11}{7})+\frac{1}{8}\sin(10t+\frac{14}{3})+\frac{4}{7}\sin(11t+\frac{11}{7})+\frac{4}{11}\sin(13t+\frac{14}{3})+\frac{1}{7}\sin(14t+\frac{14}{3})+\frac{2}{7}\sin(16t+\frac{5}{3})+\frac{1}{6}\sin(17t+\frac{5}{3})+\frac{6}{7}\sin(20t+\frac{8}{5})+\frac{1}{7}\sin(21t+$$
$$\frac{5}{3})+\frac{1}{6}\sin(23t+\frac{8}{5})-\frac{2765}{8})\theta(47\pi-t)\theta(t-43\pi)+(\frac{1189}{2}2\sin(t+\frac{11}{7})+\frac{3}{4}\sin(2t+\frac{13}{8})+\frac{11}{2}\sin(3t+\frac{8}{5})+\frac{2}{7}\sin(4t+\frac{17}{7})+\frac{22}{9}\sin(5t+\frac{18}{11})+$$
$$\frac{1}{4}\sin(6t+\frac{17}{7})+\frac{16}{17}\sin(7t+\frac{20}{11})+\frac{1}{5}\sin(8t+\frac{29}{9})-\frac{1627}{7})\theta(43\pi-t)\theta(t-39\pi)+(-\frac{3}{7}\sin(\frac{1}{18}-5t)-\frac{3}{4}\sin(\frac{1}{2}-3t)+\frac{109}{9}\sin(t+\frac{13}{10})+\frac{5}{8}\sin(2t+$$
$$\frac{11}{3})+\frac{5}{9}\sin(4t+\frac{10}{3})+\frac{3}{10}\sin(6t+\frac{21}{8})+\frac{2}{9}\sin(7t+\frac{2}{3})+\frac{1}{4}\sin(8t+\frac{23}{8})-\frac{1190}{9})\theta(39\pi-t)\theta(t-35\pi)+(\frac{188}{2}1\sin(t+\frac{27}{28})+\frac{2}{5}\sin(2t+\frac{17}{6})+$$
$$\frac{2}{3}\sin(3t+\frac{91}{23})+\frac{3}{8}\sin(4t+\frac{53}{18})+\frac{2}{11}\sin(5t+\frac{1}{7})-369)\theta(35\pi-t)\theta(t-31\pi)+(-\frac{8}{9}\sin(\frac{1}{10}-12t)-\frac{34}{9}\sin(\frac{10}{9}-6t)-\frac{137}{10}\sin(\frac{5}{7}-2t)+\frac{26}{5}\sin(t+$$
$$\frac{13}{4})+\frac{118}{5}\sin(3t+\frac{11}{8})+\frac{43}{8}\sin(4t+\frac{13}{7})+\frac{49}{6}\sin(5t+\frac{11}{12})+\frac{22}{5}\sin(7t+\frac{13}{4})+\frac{17}{16}\sin(8t+\frac{1}{7})+\frac{5}{4}\sin(9t+\frac{1}{4})+\frac{5}{7}\sin(10t+\frac{17}{5})+\frac{29}{15}\sin(11t+$$
$$\frac{5}{6})-\frac{1915}{8})\theta(31\pi-t)\theta(t-27\pi)+(-\frac{2}{7}\sin(\frac{10}{7}-7t)-\sin(\frac{1}{27}-4t)+\frac{68}{7}\sin(t+\frac{44}{15})+\frac{76}{9}\sin(2t+\frac{37}{10})+\frac{30}{7}\sin(3t+1)+\frac{8}{9}\sin(5t+\frac{3}{2})+\frac{4}{5}\sin(6t+$$
$$\frac{31}{8})+\frac{3}{7}\sin(8t+\frac{10}{3})+\frac{6}{13}\sin(9t+\frac{8}{7})+\frac{1}{3}\sin(10t+\frac{31}{9})-\frac{2135}{9})\theta(27\pi-t)\theta(t-23\pi)+(-\frac{3}{8}\sin(\frac{1}{4}-23t)-\frac{3}{5}\sin(\frac{1}{8}-22t)-\frac{13}{8}\sin(\frac{5}{4}-20t)-$$
$$\frac{9}{7}\sin(\frac{3}{2}-16t)-\frac{41}{5}\sin(\frac{4}{3}-4t)+\frac{768}{7}\sin(t+\frac{11}{5})+\frac{109}{5}\sin(2t+\frac{16}{7})+\frac{150}{13}\sin(3t+\frac{11}{6})+\frac{33}{7}\sin(5t+\frac{97}{24})+\frac{23}{4}\sin(6t+\frac{5}{7})+\frac{69}{7}\sin(7t+\frac{9}{8})+$$
$$\frac{32}{5}\sin(8t+\frac{21}{5})+\frac{7}{6}\sin(9t+\frac{22}{9})+\frac{28}{5}\sin(10t+\frac{5}{6})+\frac{43}{10}\sin(11t+\frac{26}{7})+\frac{14}{9}\sin(12t+\frac{5}{11})+\frac{13}{9}\sin(13t+\frac{40}{9})+\frac{11}{6}\sin(14t+\frac{2}{5})+\frac{3}{2}\sin(15t+$$
$$\frac{17}{10})+\frac{7}{11}\sin(17t+\frac{4}{3})+\frac{3}{8}\sin(18t+\frac{31}{10})+\frac{4}{7}\sin(19t+\frac{14}{9})+\frac{6}{5}\sin(21t+\frac{17}{7})+\frac{4}{7}\sin(24t+\frac{27}{8})+\frac{1006}{11})\theta(23\pi-t)\theta(t-19\pi)+(-\frac{63}{8}\sin(\frac{2}{7}-$$
$$8t)-\frac{38}{13}\sin(\frac{11}{9}-6t)-\frac{14}{5}\sin(\frac{1}{17}-4t)+\frac{77}{9}\sin(t+\frac{1}{2})+\frac{52}{7}\sin(2t+\frac{10}{3})+\frac{22}{9}\sin(3t+\frac{76}{17})+\frac{21}{8}\sin(5t+\frac{26}{7})+3\sin(7t+\frac{15}{8})+\frac{64}{7}\sin(9t+\frac{57}{14})+$$
$$6\sin(10t+\frac{17}{6})-\frac{544}{7})\theta(19\pi-t)\theta(t-15\pi)+(-\frac{37}{10}\sin(\frac{4}{7}-5t)-3\sin(\frac{3}{7}-3t)+\frac{24}{7}\sin(t+\frac{7}{6})+\frac{9}{7}\sin(2t+\frac{2}{5})+\frac{31}{15}\sin(4t+\frac{37}{8})+\frac{9}{5}\sin(6t+$$
$$\frac{12}{5})+\frac{59}{12}\sin(7t+\frac{13}{6})+\frac{15}{7}\sin(8t+\frac{25}{8})+\frac{134}{15}\sin(9t+\frac{7}{3})+\frac{73}{8}\sin(10t+\frac{1}{5})-\frac{4406}{11})\theta(15\pi-t)\theta(t-11\pi)+(\frac{236}{7}\sin(t+\frac{6}{5})+\frac{1}{2}\sin(2t+\frac{47}{12})-$$
$$\frac{627}{5})\theta(11\pi-t)\theta(t-7\pi)+(\frac{69}{2}\sin(t+\frac{5}{6})-\frac{715}{2})\theta(7\pi-t)\theta(t-3\pi)+(-\frac{19}{9}\sin(\frac{6}{5}-21t)-\frac{37}{10}\sin(\frac{7}{9}-19t)-\frac{23}{8}\sin(1-17t)-\frac{16}{3}\sin(\frac{7}{6}-16t)-$$
$$\frac{29}{5}\sin(\frac{1}{5}-9t)-\frac{919}{11}\sin(\frac{1}{7}-3t)+\frac{1573}{6}\sin(t+\frac{91}{45})+\frac{214}{5}\sin(2t+\frac{33}{8})+\frac{421}{14}\sin(4t+\frac{13}{8})+\frac{61}{6}\sin(5t+\frac{19}{5})+\frac{401}{16}\sin(6t+\frac{43}{14})+\frac{511}{51}\sin(7t+$$
$$\frac{35}{8})+\frac{144}{7}\sin(8t+\frac{5}{6})+\frac{137}{10}\sin(10t+\frac{25}{13})+\frac{18}{7}\sin(11t+\frac{15}{7})+\frac{17}{9}\sin(12t+\frac{41}{9})+\frac{9}{7}\sin(13t+\frac{13}{7})+\frac{29}{10}\sin(14t+\frac{22}{7})+\frac{25}{8}\sin(15t+\frac{1}{4})+$$
$$\frac{12}{5}\sin(18t+\frac{11}{8})+\frac{14}{5}\sin(20t+\frac{27}{7})+\frac{13}{8}\sin(22t+\frac{12}{7})+\frac{7}{6}\sin(23t+\frac{7}{9})+\frac{26}{11}\sin(24t+\frac{23}{7})-\frac{1891}{8})\theta(3\pi-t)\theta(t+\pi))\theta(\sqrt{(sgn(\sin(\frac{t}{2})))})$$

$y(t) =$

$$((-\frac{8}{11}\sin(\frac{11}{8}-22t)-\frac{1}{2}\sin(\frac{10}{7}-21t)+\frac{61}{6}\sin(t+\frac{33}{7})+\frac{1478}{29}\sin(2t+\frac{11}{7})+\frac{3}{5}\sin(3t+\frac{30}{7})+\frac{26}{3}\sin(4t+\frac{11}{7})+\frac{1}{6}\sin(5t+\frac{13}{9})+\frac{30}{29}\sin(6t+$$
$$\frac{8}{5})+\frac{2}{5}\sin(7t+\frac{14}{3})+\frac{88}{29}\sin(8t+\frac{8}{5})+\frac{1}{4}\sin(9t+\frac{31}{7})+\frac{11}{8}\sin(10t+\frac{8}{5})+\frac{1}{16}\sin(11t+\frac{9}{2})+\frac{1}{12}\sin(12t+\frac{5}{4})+\frac{1}{10}\sin(13t+\frac{25}{11})+\frac{11}{8}\sin(14t+$$
$$\frac{18}{11})+\frac{2}{7}\sin(15t+\frac{37}{8})+\frac{1}{6}\sin(16t+\frac{11}{8})+\frac{2}{9}sin(17t+\frac{5}{3})+\frac{1}{5}\sin(18t+\frac{17}{10})+\frac{1}{13}\sin(19t+\frac{19}{8})+\frac{23}{24}\sin(20t+\frac{12}{7})+\frac{7}{11}\sin(23t+\frac{9}{5})+\frac{9}{7}\sin(24t+$$
$$\frac{7}{4})-\frac{1538}{7})\theta(51\pi-t)\theta(t-47\pi)+(-\frac{2}{7}\sin(\frac{20}{13}-23t)-\frac{1}{6}\sin(\frac{3}{2}-20t)-\frac{5}{7}\sin(\frac{20}{13}-17t)-\frac{1}{9}\sin(\frac{20}{13}-11t)-\frac{1}{6}\sin(\frac{13}{9}-9t)-\frac{19}{6}\sin(\frac{17}{11}-$$
$$3t)+\frac{263}{5}\sin(t+\frac{11}{7})+\frac{614}{15}\sin(2t+\frac{11}{7})+\frac{87}{10}\sin(4t+\frac{11}{7})+\frac{1}{7}\sin(5t+\frac{11}{8})+\frac{19}{11}\sin(6t+\frac{11}{7})+\frac{7}{5}\sin(7t+\frac{11}{7})+\frac{4}{3}\sin(8t+\frac{8}{5})+\frac{9}{5}\sin(10t+$$
$$\frac{14}{9})+\frac{4}{7}\sin(12t+\frac{8}{5})+\frac{3}{11}\sin(13t+\frac{3}{2})+\frac{1}{8}\sin(14t+\frac{22}{15})+\frac{1}{9}\sin(15t+\frac{12}{7})+\frac{6}{5}\sin(16t+\frac{11}{7})+\frac{2}{9}\sin(18t+\frac{11}{7})+\frac{3}{5}\sin(19t+\frac{8}{5})+\frac{1}{26}\sin(21t+$$
$$\frac{15}{11})+\frac{6}{7}\sin(22t+\frac{8}{5})-\frac{1867}{8})\theta(47\pi-t)\theta\theta(t-43\pi)+(\frac{118}{39}\sin(t+\frac{11}{7})+\frac{40}{7}\sin(2t+\frac{33}{7})+\frac{49}{25}\sin(3t+\frac{14}{3})+\frac{12}{5}\sin(4t+\frac{8}{5})+\frac{1}{9}\sin(5t+\frac{32}{13})+$$
$$\frac{5}{2}\sin(6t+\frac{13}{8})+\frac{2}{5}\sin(7t+\frac{22}{5})+\frac{3}{4}\sin(8t+\frac{7}{4})-\frac{143}{10})\theta(43\pi-t)\theta(t-39\pi)+(-\frac{1}{8}\sin(\frac{2}{3}-8t)-\frac{1}{2}\sin(\frac{7}{5}-2t)-\frac{246}{19}\sin(\frac{1}{7}-t)+\frac{1}{4}\sin(3t+\frac{33}{16})+$$
$$\frac{1}{6}\sin(4t+\frac{17}{6})+\frac{1}{5}\sin(5t+\frac{31}{7})+\frac{1}{11}\sin(6t+\frac{50}{17})+\frac{1}{8}\sin(7t+\frac{30}{7})+\frac{665}{6})\theta(39\pi-t)\theta(t-35\pi)+(-\frac{119}{10}\sin(\frac{7}{15}-t)+\frac{2}{11}\sin(2t+\frac{25}{7})+\frac{2}{9}\sin(3t+$$
$$\frac{5}{8})+\frac{1}{5}\sin(4t+\frac{33}{7})+\frac{1}{4}\sin(5t+\frac{19}{10})+\frac{1023}{10})\theta(35\pi-t)\theta(t-31\pi)+(-\frac{1}{7}\sin(\frac{2}{7}-12t)-\frac{1}{8}\sin(\frac{3}{10}-5t)+\frac{25}{7}\sin(t+\frac{77}{17})+\frac{355}{59}\sin(2t+\frac{41}{40})+$$
$$\frac{27}{5}\sin(3t+\frac{46}{15})+\frac{33}{7}\sin(4t+\frac{11}{3})+\frac{27}{10}\sin(6t+\frac{13}{9})+\frac{5}{11}\sin(7t+\frac{11}{5})+\frac{5}{8}\sin(8t+3)+\frac{8}{5}\sin(9t+\frac{16}{15})+\frac{16}{15}\sin(10t+\frac{1}{7})+\frac{7}{9}\sin(11t+\frac{12}{5})-$$
$$\frac{862}{7})\theta(31\pi-t)\theta(t-27\pi)+(-\frac{1}{3}\sin(\frac{5}{4}-8t)-\frac{2}{5}\sin(\frac{5}{9}-7t)-\frac{5}{7}\sin(\frac{11}{8}-5t)-\frac{7}{2}\sin(\frac{15}{14}-2t)+\frac{29}{8}\sin(t+\frac{41}{10})+\frac{11}{6}\sin(3t+\frac{13}{3})+\frac{7}{6}\sin(4t+$$
$$\frac{1}{27})+\frac{2}{7}\sin(6t+\frac{8}{7})+\frac{1}{9}\sin(9t+\frac{9}{5})+\frac{2}{7}\sin(10t+\frac{1}{10})+\frac{201}{5})\theta(27\pi-t)\theta(t-23\pi)+(-\frac{4}{11}\sin(\frac{8}{9}-12t)-\frac{10}{7}\sin(\frac{19}{13}-10t)+\frac{623}{3}\sin(t+\frac{10}{7})+$$
$$\frac{39}{5}\sin(2t+\frac{10}{11})+\frac{251}{9}\sin(3t+\frac{4}{3})+\frac{5}{7}\sin(4t+\frac{4}{3})+\frac{61}{6}\sin(5t+\frac{4}{3})+\frac{14}{9}\sin(6t+\frac{23}{7})+\frac{76}{25}\sin(7t+\frac{9}{7})+\frac{3}{4}\sin(8t+\frac{1}{4})+\frac{19}{5}\sin(9t+\frac{3}{2})+$$

$$\frac{17}{6}\sin(11t+\frac{6}{5})+\frac{13}{8}\sin(13t+\frac{14}{13})+\frac{8}{9}\sin(14t+\frac{17}{6})+\frac{24}{25}\sin(15t+\frac{1}{2})+\frac{1}{6}\sin(16t+\frac{13}{8})+\frac{5}{8}\sin(17t+1)+\frac{1}{7}\sin(18t+\frac{18}{17})+\frac{6}{7}\sin(19t+1)+\frac{1}{4}\sin(20t+\frac{4}{9})+\frac{2}{7}\sin(21t+\frac{7}{5})+\frac{1}{3}\sin(22t+\frac{8}{7})+\frac{2}{5}\sin(23t+\frac{1}{26})+\frac{2}{11}\sin(24t+\frac{8}{7})-\frac{243}{8})\theta(23\pi-t)\theta(t-19\pi)+(-\frac{111}{10}\sin(\frac{4}{5}-9t)-\frac{12}{5}\sin(\frac{7}{13}-2t)+\frac{1}{6}\sin(t+\frac{48}{11})+\frac{13}{8}\sin(3t+\frac{27}{7})+\frac{71}{24}\sin(4t+\frac{6}{11})+\frac{22}{9}\sin(5t+\frac{7}{2})+\frac{19}{7}\sin(6t+\frac{8}{17})+\frac{20}{7}\sin(7t+\frac{34}{9})+\frac{55}{7}\sin(8t+\frac{6}{5})+\frac{64}{9}\sin(10t+\frac{38}{9})+\frac{27}{5})\theta(19\pi-t)\theta(t-15\pi)+(-\frac{22}{7}\sin(\frac{4}{3}-8t)-\frac{19}{7}\sin(\frac{20}{13}-6t)+\frac{38}{13}\sin(t+\frac{1}{24})+\frac{12}{11}\sin(2t+\frac{5}{9})+\frac{26}{7}\sin(3t+\frac{7}{9})+\frac{11}{5}\sin(4t+\frac{12}{11})+\frac{37}{10}\sin(5t+\frac{17}{10})+\frac{51}{10}\sin(7t+\frac{10}{3})+\frac{33}{4}\sin(9t+\frac{26}{7})+\frac{41}{5}\sin(10t+\frac{9}{5})-\frac{27}{2})\theta(15\pi-t)\theta(t-11\pi)+(-\frac{172}{5}\sin(\frac{3}{8}-t)+\frac{5}{4}\sin(2t+\frac{7}{2})+\frac{2303}{24})\theta(11\pi-t)\theta(t-7\pi)+(\frac{441}{5}-\frac{455}{12}\sin(\frac{7}{9}-t))\theta(7\pi-t)\theta(t-3\pi)+(-\frac{1}{3}\sin(\frac{1}{20}-18t)-\frac{7}{5}\sin(\frac{7}{9}-17t)-\frac{18}{11}\sin(\frac{2}{5}-14t)-\frac{24}{5}\sin(\frac{1}{13}-9t)+\frac{2767}{7}\sin(t+\frac{11}{3})+\frac{229}{5}\sin(2t+\frac{17}{7})+\frac{313}{8}\sin(3t+\frac{22}{5})+\frac{32}{3}\sin(4t+\frac{22}{5})+\frac{169}{6}\sin(5t+\frac{21}{8})+\frac{23}{7}\sin(6t+\frac{26}{11})+\frac{21}{2}\sin(7t+\frac{5}{6})+\frac{55}{6}\sin(8t+\frac{14}{5})+\frac{212}{13}\sin(10t+\frac{24}{7})+\frac{26}{9}\sin(11t+\frac{9}{2})+\frac{16}{5}\sin(12t+\frac{25}{6})+\frac{35}{17}\sin(13t+\frac{4}{11})+\frac{15}{8}\sin(15t+\frac{7}{10})+\frac{2}{3}\sin(16t+\frac{20}{9})+\frac{16}{7}\sin(19t+\frac{4}{5})+\frac{13}{7}\sin(20t+\frac{29}{7})+\frac{14}{3}\sin(21t+\frac{7}{5})+\frac{4}{3}\sin(22t+\frac{7}{4})+\frac{12}{7}\sin(23t+\frac{34}{33})+\frac{7}{4}\sin(24t+\frac{27}{7})-\frac{211}{5})\theta(3\pi-t)\theta(t+\pi))\theta(\sqrt{(sgn(\sin(\frac{t}{2})))})$$

t は 0 から 52π までのプロット

$\theta(x)$ は，ヘヴィサイドの階段関数

$$H(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

ただし $x=0$ のとき，$H(0)=\frac{1}{2}$

$sgn(x)$ は x の符号

27　偏差値

皆さんがテストを受けると出る偏差値。これを今回は解説していく。
突然ですがクエスチョン。A と B どちらが優秀？

	テスト	得点
A さん	A	80
B さん	B	70

二人が異なるテストを受けているので一概にどちらが優秀とは言い難い。
では，次のデータではどうか？

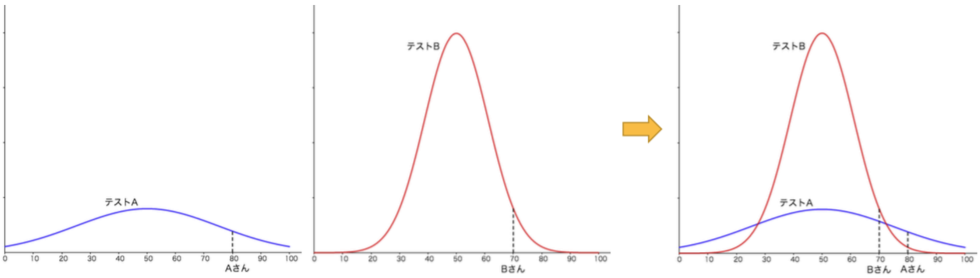
	テスト	得点	平均点
A さん	A	80	50
B さん	B	70	50

平均点との差が A の方が大きいから A が優秀？それは本当か？

Point

点数の分布が重要

ということで，分布を描いてみる。



横軸が得点，縦軸が得点者の割合である。この分布を見るとテスト B の方が高得点を取りにくく，A の方が高得点を取りやすいことから B さんの方が優秀そうに見える。この分布から得点のばらつきがわかる。このばらつきを定量的に評価しようとしたものが偏差値である。
まずは，平均と標準偏差の定義から。

定義

平均：$\mu = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$

標準偏差：$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}}$

では，偏差値という概念を導入しよう。
x を得点とする。
$x-\mu$(得点と平均の差) では，優秀さをはかる指標としては不十分であった。そこで重要だったのが受験者の得点のバラツキ (分布) であった。高得点者の割合が低いテストで平均から離れることはすごいことである。つまり，バラツキの小さいテストで平均から離れるほど値が高くなるように偏差値を作りたい。ばらつきを表す指標は標準偏差でありばらつきが大きいほど大きいので，$(x-\mu)$ を σ でわり $\dfrac{(x-\mu)}{\sigma}$ とする。
これで偏差値の本質部分の完成。ただ，この値は一般に $-5 \sim 5$ をとる。これでは値が小さくて読み取りずらい。そのため 10 倍する。そうすれば，$-50 \sim 50$ の範囲を動くようになる。マイナスの値よりも $0 \sim 100$ で動いてくれるとさらにわかりやすい。そのために 50 を足す。これで偏差値の完成である。まとめると，

定義

(偏差値)$=\dfrac{x-\mu}{\sigma}\times 10+50$

この偏差値のもと，A と B を比較してみると，

$$\text{A の偏差値} = \frac{85-50}{25}\times 10+50 = 62$$
$$\text{B の偏差値} = \frac{70-50}{5}\times 10+50 = 90$$

偏差値でみると B の方が優秀であることがわかる。

さて，多くの人が抱える疑問を考えよう。

(疑問 1)　偏差値は 100 を超えるのか？
(疑問 2)　偏差値は負の値を取りうるのか？

偏差値の導入において，値を制限したところはない。そのためどちらもあり得る。
実際に試してみよう。

(1)　平均点 40 点，標準偏差 10 のテストで 100 点取ると?
偏差値 $=\dfrac{100-40}{10}\times 10+50=110$
(2)　平均点 60 点，標準偏差 5 のテストで 20 点を取ると？
偏差値 $=\dfrac{20-60}{5}\times 10+50=-30$

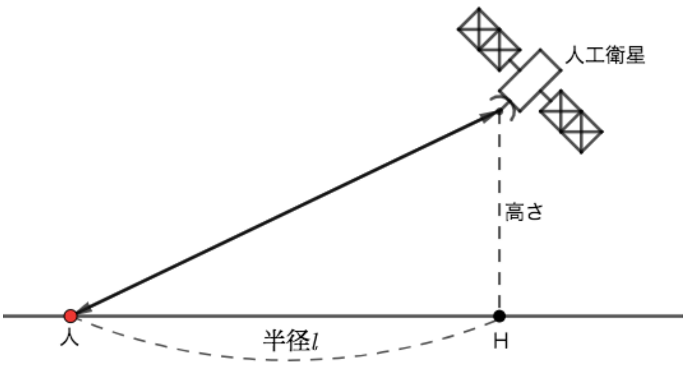
よって，どちらもありうることがわかった。
ただし，テストはうまく作られるので偏差値が 100 を超えたり負の値をとることは稀である。

28　GPS 機能

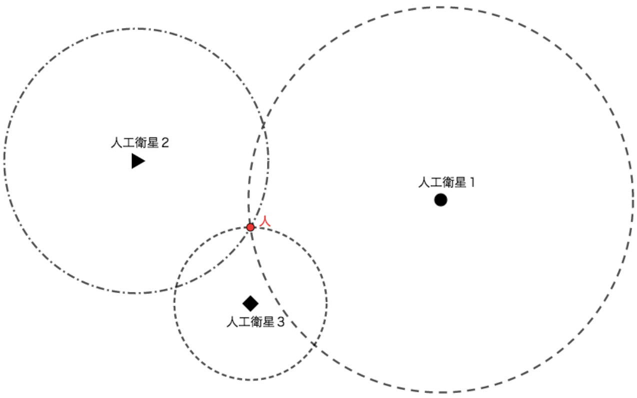
疑問

GPS はなぜ正確な位置を表示できるのか？

これは，人工衛星によって位置をつかんでいるからである。
では，どのように人工衛星を利用しているのか？



人工衛星は地表から一定の高さで飛行している。人工衛星と人のケータイ間で電波を送って帰ってくるまでの時間から 2 点間の距離を求める。高さは一定なので直角三角形で三平方の定理から人工衛星の鉛直下の地表 H から人までの距離 l がわかる。よって，人がとある半径 l の円周上にいることがわかる。これだけでは，人のいる地点は 1 点に絞れないので，3 つの人工衛星を用いて 3 つの円の共有点から人のいる地点を決定している。

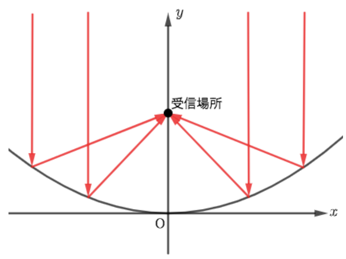


ただし，少しの誤差はあるので，より正確にするために 4 つ目の人工衛星を用いてさらに正確な位置を把握している。

29　衛星放送

街中でよく見かける白い円盤状のアンテナ．このアンテナは何のためにあるのだろうか？
このアンテナは，パラボラアンテナといい，衛星放送を受信するためにある．衛星放送とは，赤道上空 36,000km の静止軌道上を周回している静止衛星を利用して，契約世帯にテレビやラジオの電波を送り届ける放送サービスである。
パラボラアンテナは障害物がなく空が見渡せる場所に，南西の方向を向けて設置する必要がある。
今回はなぜこのアンテナで電波が受信できる理由についてみていく。

パラボラアンテナ



反射した電波は 1 点に集まる

定理

パラボラアンテナの対称軸に対して平行に入射した電波は，全て焦点に集まり，それは同時に届く。

この定理は以下の性質により説明できる。

性質

(1)　対称軸に対し平行に入射した線は二次関数に反射した後，全て焦点を通る。
(2)　$y = k$(定数) から焦点までの移動距離は x に依らない。

つまり，パラボラアンテナは二次関数の性質を用いて作られている。
さて，上の性質が本当に成立するのか．これから確認していこう。

【証明】

(1)

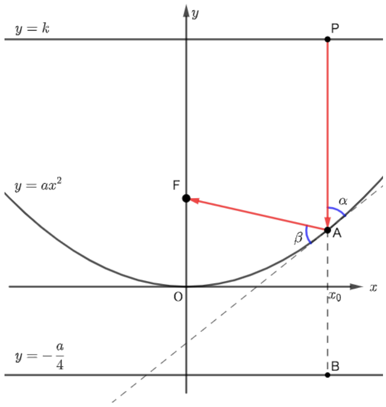
$(x_0,\ k)$ から放たれた電波について考える．放物線の対称性から，$x_0 > 0$ について考えれば十分である。

この電波は点 $\mathrm{A}(x_0,\ ax_0^2)$ で反射するので，その反射波の傾きを m とすると直線の方程式は $y - ax_0^2 = m(x - x_0)$ である。

次に，この傾き m を求める。

ここで，$y = ax^2$ の A における接線の傾きは $2ax_0$ である。

右図中において，入射角と反射角は等しいので，$\alpha = \beta$.



また，

- $\tan\alpha = \dfrac{1}{\tan(90^\circ - \alpha)}$ より $\tan\alpha = \dfrac{1}{2ax_0}$
- 加法定理から，$\tan\beta = \dfrac{2ax_0 - m}{1 + (2ax_0)m}$

よって，

$$\frac{1}{2ax_0} = \frac{2ax_0 - m}{1 + (2ax_0)m}$$

m について解く。

$$m = ax_0 - \frac{1}{4ax_0}$$

よって，反射波の方程式は，

$$y - ax_0^2 = mx - ax_0^2 + \frac{1}{4a}$$
$$y = mx + \frac{1}{4a}$$

となるので，x_0 の値によらず $\mathrm{F}(0,\ \dfrac{1}{4a})$ を通る。

(2)

まず，放物線の性質についておさらいをする．

放物線の性質

> $y = ax^2$ 上の点は，準線 $y = -\dfrac{1}{4a}$ と焦点 $(0,\ \dfrac{1}{4a})$ からの距離が等しい点の軌跡である。

これを用いればすぐに示せる。

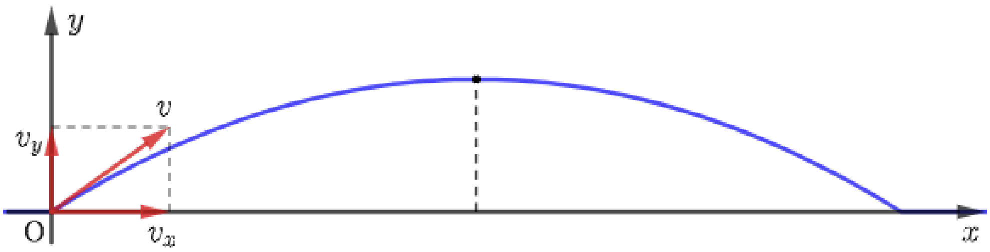
PA+PF=PA+AB$= \dfrac{1}{4a} + k$ となり，x_0 の値によらず一定である。

30　遠投するには？

ボールを投げてできるだけ遠くまで飛ばすにはどのように投げれば良いのか？
単純に投げる力をつければ良いかもしれないが，今回は，現在の力のまま知恵で遠くまで飛ばすことを考える。
そのアイデアは，投げる角度を変えることである。

問題
何度で投げた時に最も遠くまで飛ぶか？
ただし，空気抵抗はないものとする。

空気抵抗を考えると計算が大変なことになるので今回は省いておく。
【解答】



ボールの初速度を v_0，地面とのなす角を θ $(0° < \theta < 90°)$，重力加速度を g，投げた瞬間からの経過時間を t とする．また，速度を x 軸成分，y 軸成分に分解し，その速度を v_x，v_y とする。
$v_x = v_0 \cdot \cos\theta$,　$v_y = v_0 \cdot \sin\theta - gt$
ボールの高さが最高点に到達するのは，鉛直方向の速度が 0 になった時なので，$v_y = 0$ より，

$$t = \frac{v_0 \cdot \sin\theta}{g}$$

よって，ボールを投げてから地面に到達するまでの時間は $\frac{v_0 \cdot \sin\theta}{g}$ となる。
このときに水平方向に進む距離は，$v_x \cdot t$ より，

$$v_0 \cdot \cos\theta \cdot \frac{2v_0 \cdot \sin\theta}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$$

$\frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$ の最大値つまり，$\sin 2\theta$ の最大値を求める。
$-1 \leqq \sin 2\theta \leqq 1$，$0° < \theta < 90°$ なので，
$\sin 2\theta = 1$ すなはち $2\theta = 90°$
よって，求める角度は 45°。

45° の角度で投げれば最も遠くまで飛ぶことがわかった。ただし，実際には空気抵抗など他の条件もあり，この計算通りうまくはいかない。

31　ドーナツの体積

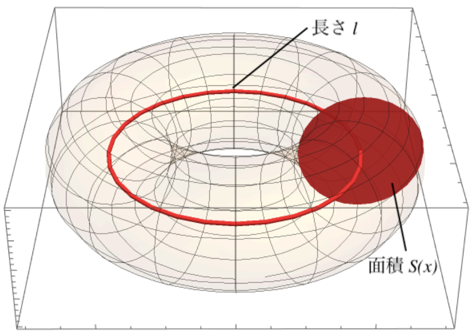
定理

パップス-ギュルダンの定理

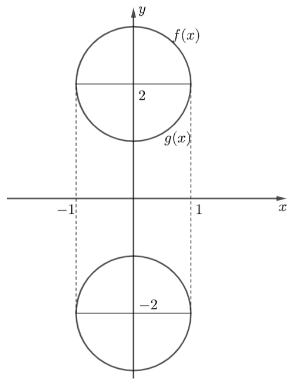
平面状の曲線で囲まれた図形 A が，この平面上にあって A と交わらない 1 つの直線を軸として 1 回転してできる立体の体積 V は，A の重心が描く円周の長さ l と A の面積 $S(x)$ の積に等しい。

$$i.e.\quad V = l \times S(x)$$

ドーナツ



ドーナツ模型



ドーナツ模型

断面図 (円) の半径を 1，断面図円の中心が描く図形の半径を 2 とすると，
パップス-ギュルダンの定理より

$$V = \pi \cdot 1^2 \cdot 2\pi \cdot 2 = 4\pi^2$$

では，これを積分で求めてみよう。
$V = \pi \displaystyle\int_a^b (\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2)dx$
右上の図において，上の円の方程式は

$$x^2 + (y-2)^2 = 1 \cdots (a)$$

(a) を x 軸を中心に一回転させると，求める図形ができる。
(a) を変形して

$$y = 2 \pm \sqrt{1 - x^2}$$

つまり，

$$f(x) = 2 + \sqrt{1 - x^2}$$
$$g(x) = 2 - \sqrt{1 - x^2}$$

よって，その体積は

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \{(2 + \sqrt{1 - x^2})^2 - (2 - \sqrt{1 - x^2})^2\}dx = 4\pi^2$$

となり，一致。

さて，パップス-ギュルダンの定理の証明をしよう。
そのために，まず以下の式の成立を示す。

バウムクーヘン分割

区間 $[a,\ b]$ において $f(x) \geqq 0$ であるとき，曲線 $y = f(x)$，x 軸，直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積は

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

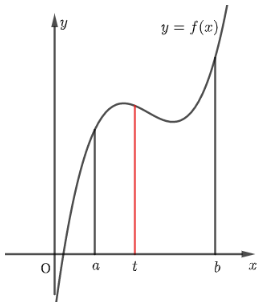


図 1

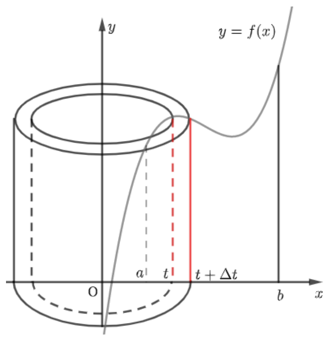


図 2

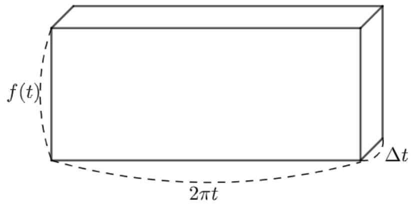


図 3:図 2 の円筒を切り開いた図

この式を証明する。$a \leqq t \leqq b$ とし，曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = a$，$x = t$，x 軸で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を $V(t)$ とする。$\Delta t > 0$ のとき，$\Delta V = V(t + \Delta t) - V(t)$ とすると，Δt が十分小さいとき，

$$\Delta \fallingdotseq 2\pi t \cdot f(t) \cdot \Delta t$$

$$\text{よって}\frac{\Delta V}{\Delta t} \fallingdotseq 2\pi t f(t) \quad \cdots (a)$$

$\Delta t \to 0$ のとき，(a) の両辺の差は 0 に近づくので

$$V'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = 2\pi t f(t)$$

よって

$$\int_a^b 2\pi t f(t) dt = [V(t)]_a^b = V(b) - V(a) = V - 0 = V$$

【証明 (パップス-ギュルダン)】
バウムクーヘン分割から，

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

ここで，重心の定義式より，g_x を重心と回転軸の距離とすると

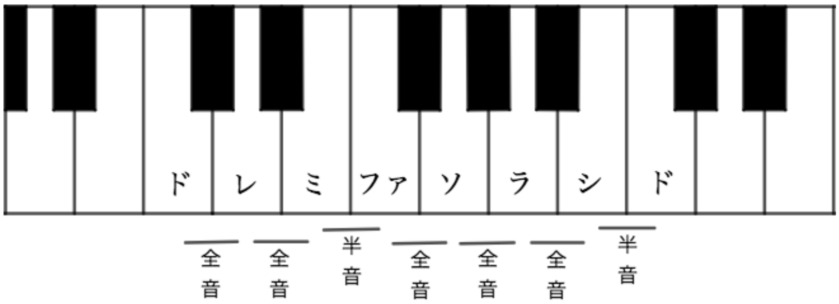
$$g_x S = \int_a^b xf(x)dx$$

よって

$$V = 2\pi g_x S$$

32 音楽

32.1 音について



○ 音楽の知識

- 全全半全全全半の流れのことを長調という。
- 黒鍵盤を挟んで隣り合う音は全音，黒鍵盤を挟まない隣り合う音は半音という。
- スタート地点を 1 度として，どれだけ離れているかを ～ 度という。

  (特別な言い方)

  - ドとレのように全音離れているのは長 2 度。
  - ミとファのように半音離れているのは短 2 度。
  - 5 度の場合，どの音から始めても全音 $\times 3$ と半音分離れているので完全五度という。

○ 音は何でできてる？

$\Longrightarrow$ 音は空気の振動

- 振動の大きさ (振幅) によって音の大きさが決まる。
- 振動する回数 (振動数) によって音程が決まる。

$\cdots$ 振動数と振幅は 1 つの関数で表せる。

その関数は「三角関数」である。

- 音律：音と周波数の関係のこと。
- 調律：各楽器が正しい音程が出るように微調節すること。
- 周波数が 2 倍になると 1 オクターブ上がる。

音高の相対的関係の規定 (音律) には複数種類あり，ここでは平均律と純正律を紹介する。

32.2　平均律

1 オクターブなどの音程を均等な周波数比で分割した音律のこと。私たちがよく馴染む pops やクラシック音楽などで利用されている。楽器としては，ピアノやギターなどがこの音律に当たる。

【作り方】

ドを基準に，半音上がるごとに振動数を $\sqrt[12]{2}$ 倍する。

音階	周波数	近似値
ド	f	f
ド♯ (レ♭)	$\sqrt[12]{2}f$	$1.059f$
レ	$(\sqrt[12]{2})^2f$	$1.122f$
レ♯ (ミ♭)	$(\sqrt[12]{2})^3f$	$1.189f$
ミ	$(\sqrt[12]{2})^4f$	$1.260f$
ファ	$(\sqrt[12]{2})^5f$	$1.335f$
ファ♯ (ソ♭)	$(\sqrt[12]{2})^6f$	$1.414f$
ソ	$(\sqrt[12]{2})^7f$	$1.498f$
ソ♯ (ラ♭)	$(\sqrt[12]{2})^8f$	$1.587f$
ラ	$(\sqrt[12]{2})^9f$	$1.682f$
ラ♯ (シ♭)	$(\sqrt[12]{2})^{10}f$	$1.782f$
シ	$(\sqrt[12]{2})^{11}f$	$1.888f$
ド	$2f$	$2f$

特徴

- キーを下げて歌っても，各音の相対的な高さ (周波数) は変わらないので，原曲とほぼ同じ印象で聞くことができる。カラオケでキーの上げ下げができるのはこのおかげ。

欠陥

- 倍音の響きがずれてしまう。

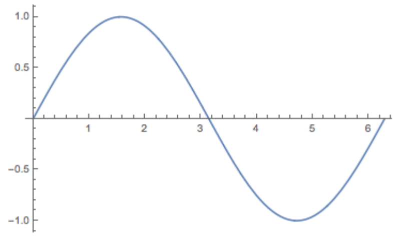
> 倍音とは？
> 楽器で一つの音を鳴らしたとき，一つの周波数だけでなく，2 倍や 3 倍の音も鳴っている。これが各楽器の音色を特徴付けるものになっている。もしなかった場合，どの楽器も同じ音に聞こえてしまう。

このずれによって，うなりが生じてしまう。

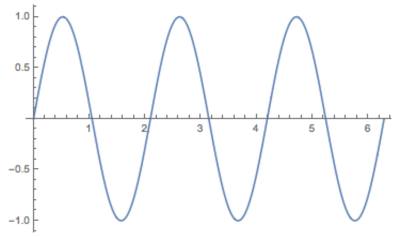
例えば，ギターの音がウォーンウォーンというように聞こえるのはこれのせい。

32.3　純正律

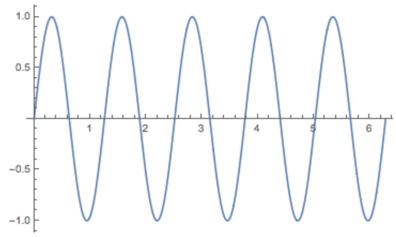
　数百年前まで主流であった音律。ハーモニカなどの楽器の音律がこれに当たる。
【作り方】
ドを基準にして，簡単な整数比になるように音階を作っていく。これで，ド・ミ・ソが完成。



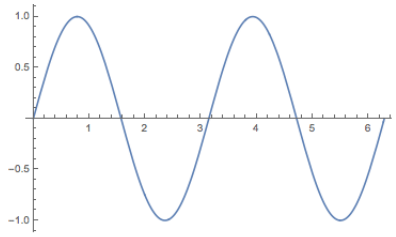
(1):基準であるド



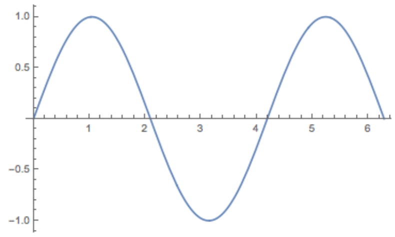
(3):基準ドの 3 倍音



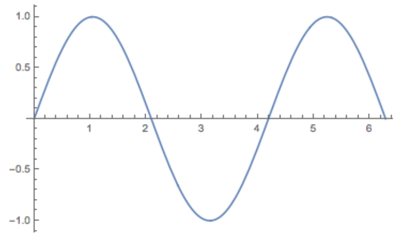
(5):基準ドの 5 倍音



(2):基準ドの 1 オクターブ上



(4):(3) の 1 オクターブ上　ソ



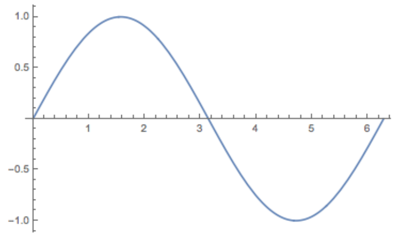
(6):(5) の 2 オクターブ上　ミ

ドとソの関係は，2 : 3 の比例関係であり，このことを完全 5 度という。
これから，残りの音を作る。

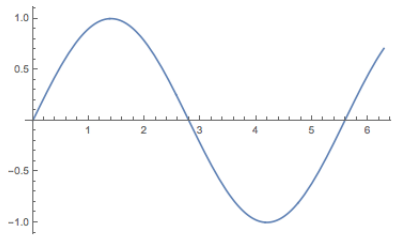
(7) ミの完全 5 度の音を作る。$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$
(8) その完全 5 度の音を作る。$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
1 オクターブ上げる。$\frac{4}{9} \times \frac{2}{1} = \frac{8}{9}$
(9) (2) から完全 5 度下がる音を作る。$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$
(10) ミから完全 5 度下がる音を作る。$\frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{5}$
1 オクターブ上げる。$\frac{6}{5} \times \frac{2}{1} = \frac{3}{5}$

これにより完成した音階を次のページに並べてみる。

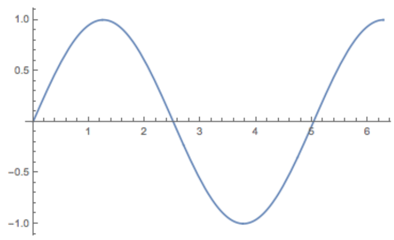
純正律によりできた音階の波形の図



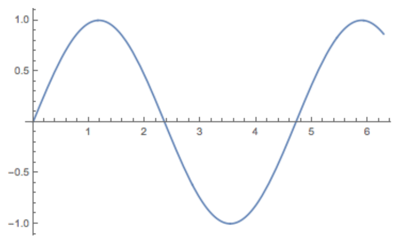
ド



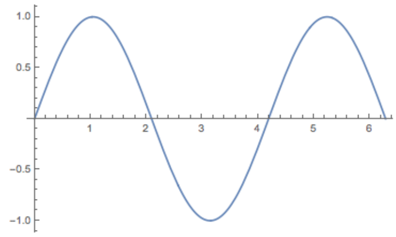
レ



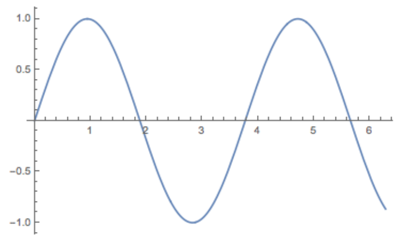
ミ



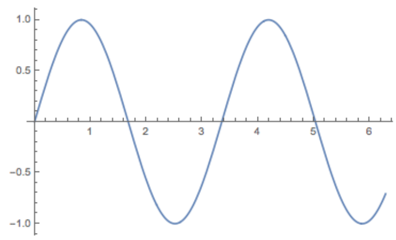
ファ



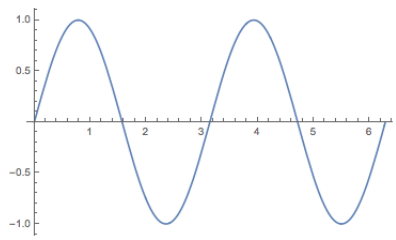
ソ



ラ



シ



ド

特徴

- 単純な比率を持っている音同士は振動のエネルギーを受け渡しやすい性質 (共振) を持っている。*i.e.* 響きやすい。
  この音階は単純な整数比によってできているため，自然に響き合う。

欠陥

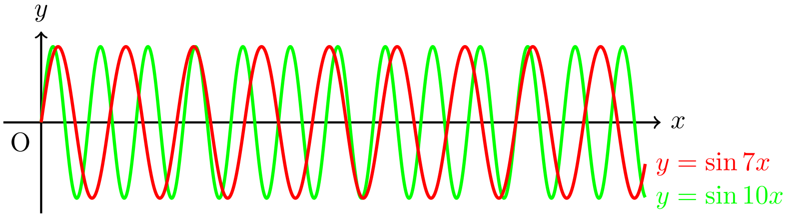
- 転調ができない。

32.4　調律

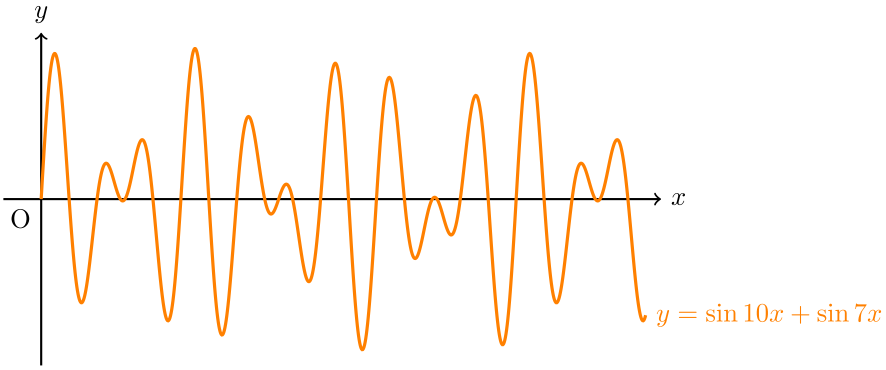
現在，ギターなどで調律を行う際には，チューナーを用いることが多くなっている．ピアノにおいても同様にチューナーでの調律があるものの，耳で聞くことによりチューニングする調律師も多くいる．これは，二つの音を鳴らすことで生じる唸りの回数をコントロールするという方法である．

唸りとは？

以下に $y = \sin 7x$ と $y = \sin 10x$ のグラフがある．これを二つの種類の音と捉える．
振幅が音の大きさなので，どちらの音も大きさは一定である．



では，この二つの音を合成してみるとどうなるのか．
下のグラフが実際に合成したグラフである．



このグラフから，音が大きくなったり小さくなったりしていることが分かる．これにより，ウォンウォンというような音が出る．これが唸りである．

ピアノの調律　(概要)

1. A の音叉を元に，A の音を 440Hz[*12]に合わせる．
2. 1 オクターブ下の A(220Hz) の音を唸りが消えるように合わせる．
3. 1 オクターブ内の音を唸りの回数を数えて合わせる．
4. 他の音も同じように合わせる．

これは大雑把な方法であり，もし興味がある方は調べていただければ良いと思う．
この方法を見れば分かるように，ピアノの調律には，必ずしも絶対音感を持っている必要があるわけではないことがわかる．一方で，一音ずつ唸りの回数を調べていく作業なので，集中力と根気は必要である．

[*12] 好みによって 442Hz,443Hz などに合わせたりもする．

33　騒音をなくすには？

音は，波で表すことができる．つまり，三角関数の合成関数として表すことが可能である．
1 つの音を $a\sin(\omega t)$ で表せる．
ここで，a : 音の大きさを表す定数，ω : 音の高さを決定する定数，t : 時間

問題

$$a\sin(\omega t)\ \text{を打ち消すには？}$$

この音を打ち消すには，消したい音のマイナスの音 $-a\sin(\omega t)$ を加えれば良い．
このアイデアは様々なところで利用されている．
例

1. 車の騒音削減
2. 空調機器の騒音削減
3. 幹線道路の防音壁への埋め込み

さて，消音のためのアイデアはできたが，実際に消したい音のマイナスの音を正確に発することは困難である．
そこで，実際には 0 にするのではなく，なるべく近くことを目標にしていく．
a : 音の大きさを表す定数，ω : 音の高さを決定する定数，t : 時間を表す変数，ϕ : 時間のズレを補正する定数とする．
このときに，$a\sin(\omega t+\phi)$ と同じ高さの音 $a'\sin(\omega t+\phi')$ を加えて 0 にすることが目標となる．

$$\begin{aligned}
&a\sin(\omega t+\phi)-a'\sin(\omega t+\phi')\\
&\qquad=a\sin(\omega t+\phi)-a\sin(\omega t+\phi')+a\sin(\omega t+\phi')-a'\sin(\omega t+\phi')\\
&\qquad=a(\sin(\omega t+\phi)-\sin(\omega t+\phi'))+(a-a')\sin(\omega t+\phi')\\
&\qquad=a\cdot 2\cdot\cos\frac{(\omega t+\phi)+(\omega t+\phi')}{2}\sin\frac{(\omega t+\phi)-(\omega t+\phi')}{2}+(a-a')\sin(\omega t+\phi')\\
&\qquad=2a\cdot\cos\left(\omega t+\frac{\phi+\phi'}{2}\right)\sin\frac{\phi-\phi'}{2}+(a-a')\sin(\omega t+\phi')
\end{aligned}$$

さて，これを 0 に近づけるには,

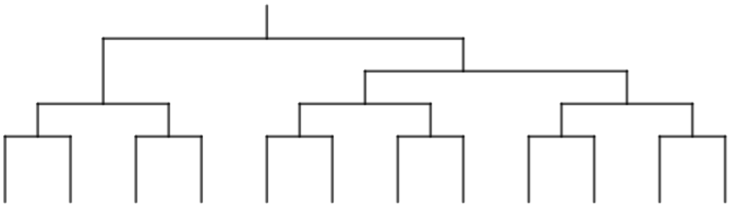
$$\begin{aligned}
\phi-\phi'&\to 0\\
a-a'&\to 0
\end{aligned}$$

とすれば，第一項は $\sin\dfrac{\phi-\phi'}{2}\to 0$ 第二項は $a-a'\to 0$ となり，消音が達成される．
i.e.　$\phi-\phi'=0, a-a'=0$ を目指して消音用の装置を作成すれば良い．

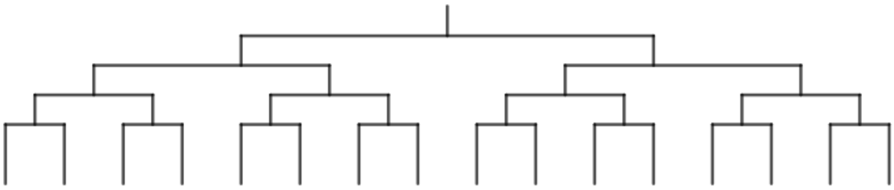
34　トーナメント

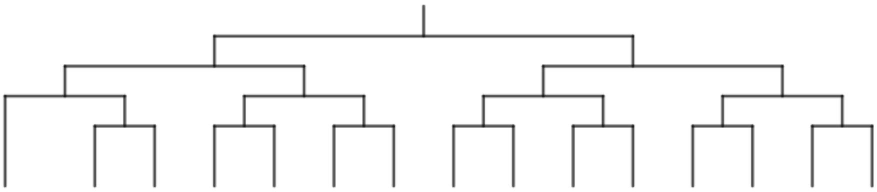
問題
31 チームでトーナメント戦をした際に試合数はどれほどになるか？

まず，チーム数を少し減らして考えてみましょう。



この写真は，12 チームでトーナメントをおこなったトーナメント表である。実際に数え上げてみよう。すると，11 試合であることがわかる。
31 試合の場合に数えるのは大変である。チーム数がもっと増えると，数えるのはさらに困難を極めることになる。
では，トーナメント方式の原理を考えよう。トーナメント方式の試合では 1 試合行うごとに必ず負けるチームが出る。優勝チーム以外は 1 回負けることになるので，負けたチームの数だけ試合数があることになる。つまり，『(出場チーム数)−1』で全ての試合数が求まる。





よって，31 チームでのトーナメント戦では 30 試合行われる。

35　お買い物

さて，あなたはお腹が空いている。買い物に行き，大好物を買うとする。このとき，1 個目に買い食べるものの価値はとても大きい。ただし，2 個目，3 個目 $\cdots$ と増えるに従ってその 1 個あたりの価値は下がっていく。

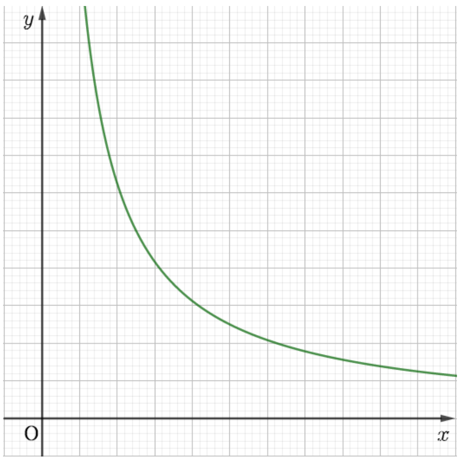
定義

商品を買って得られる満足度を効用，商品が一つ増えたときの満足度を限界効用という。
一般に，人が手に入れる商品数の増加に伴い，満足度は減少していく。このことを「限界効用逓減の法則」という。

2 つの商品 A，B を購入したときの例を考える。A を 3 個，B を 12 個買ったとする。これと同じだけの効用 (満足度) が得られる 2 つの商品 A，B の組み合わせは下のようになる。

組合せ番号	商品 A(個)	商品 B(個)
(1)	3	12
(2)	4	9
(3)	6	6
(4)	9	4
(5)	12	3

同じ満足度の組合せを集めると滑らかな「無差別曲線」ができる。
この曲線を用いて様々な問題に取り組んでいく。



<u>問題</u>

A が 400 円，X が 200 円，予算制約が 10000 円であったとする。
このとき，満足度が最も高くなる購入の組み合わせは？
ただし，簡単のため，無差別曲線の式は $xy = k \quad (k:\text{定数})$ とする。

【解答】
商品 A を x 個，商品 B を y 個購入するとする。予算制約は

$$100x + 50y = 1000 \quad \cdots (1)$$

この中で，満足度を最も高くできるのは，この直線 (1) に無差別曲線が接する場合である。
無差別曲線の式が

$$xy = k \quad \cdots (2)$$

より，(1)，(2) から，

$$x(-2x + 20) = k$$
$$\therefore 2x^2 - 20x + k = 0 \quad \cdots (3)$$

(3) の判別式を D とおくと，(1)，(2) が接するので，$D = 0$

$$D/4 = 100 - 2k = 0$$
$$\therefore k = 50$$

これと，(1), (2) より，

$$x = 5,\ y = 10$$

よって，1000 円の予算では，A を 5 個，B を 10 個購入すれば満足度は最も高くなる。

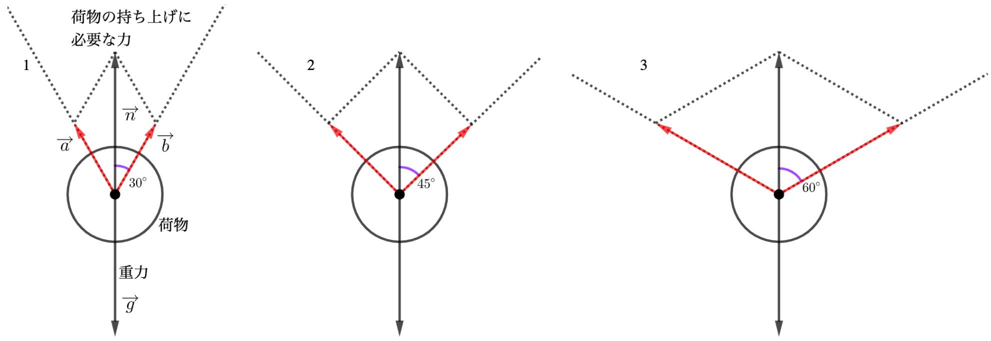
36　荷物を楽に持つには

さて，重たい荷物を 2 人で持つとき，あなたはどのように持っているか．持ち方を工夫すれば力を無駄に使わずに楽に荷物を持ち運ぶことができる．
では，それはどのような持ち方なのだろうか．

問題
以下の 3 つの持ち方のうち，どの持ち方が一番個人の負担が軽くなるだろうか．

1. 2 人がなるべく近づいて持つ．
2. 2 人が少し離れて持つ．
3. 2 人が大きく離れて持つ．

この問題を数学化して解いていく．
各条件を以下の図のように数学化する．



1. 2 人の手の角度:60°
2. 2 人の手の角度:90°
3. 2 人の手の角度:120°

重力を $\vec{g}$ とすると，この荷物を持ち上げるのに必要な力 $\vec{n}$ は,

$$|\vec{n}| = |\vec{g}|$$

である．重力の大きさを 10(N) として実際に計算し，どの持ち方が一番良いのかを判断する．
つまり，$|\vec{a}| = |\vec{b}|$ が一番小さくなるような持ち方を見つければ良い．

1. この場合，各個人の荷物を持つための力の大きさ $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ は,

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \frac{1}{2} \times |\vec{n}| \times \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{10}{3}\sqrt{3} \\ \therefore \quad |\vec{a}| &= |\vec{b}| = \frac{10}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

2. この場合，各個人の荷物を持つための力の大きさ $|\overrightarrow{a}|, |\overrightarrow{b}|$ は，

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a}| &= \frac{1}{2} \times |\overrightarrow{n}| \times \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times \sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{2} \\ \therefore \quad |\overrightarrow{a}| &= |\overrightarrow{b}| = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

3. この場合，各個人の荷物を持つための力の大きさ $|\overrightarrow{a}|, |\overrightarrow{b}|$ は，

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a}| &= \frac{1}{2} \times |\overrightarrow{n}| \times 2 \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times 2 \\ &= 10 \\ \therefore \quad |\overrightarrow{a}| &= |\overrightarrow{b}| = 10 \end{aligned}$$

さて，

$$\frac{10}{3}\sqrt{3} < 5\sqrt{2} < 10$$

なので，各個人の力が最も少なくて済むのは 1 の場合である．

結果について考察してみる．
3 の場合，各個人の力は，荷物の重力の大きさと同じ大きさが必要になる．
つまり，2 人の手の開き具合が $120°$ である場合，1 人で持つときと同じ力が必要になり，2 人で持つ意味はなくなってしまう．

一般化しよう．
手の間の角度が θ であるとする．$(0° \leqq \theta < 180°)$
このときの $|\overrightarrow{a}|, |\overrightarrow{b}|$ は，

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a}| &= \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\theta} \\ &= 5\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\theta} \end{aligned}$$

よって，θ が 0 に近いほど荷物を持つのに必要な各個人の力は小さくなり，
θ が大きくなるほど必要な力は大きくなる．

このような考え方はクレーン作業などにも活用できる．

37　道路

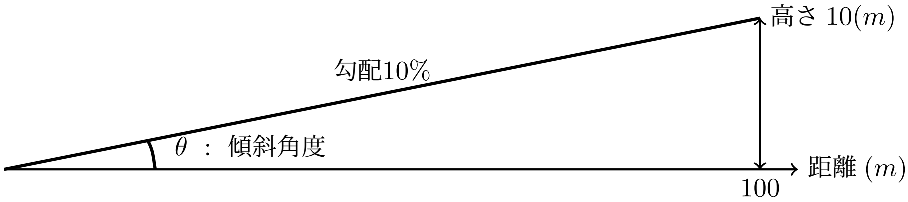
37.1　勾配

問題

この標識の意味を説明してみよ．

車に乗らないと標識をじっくりとみる機会は少ないだろう．
この標識は，勾配 10% の上り坂という標識である．では，勾配 10% とは，どのくらい急なのだろうか．
勾配 10% は，傾斜角度が 10° というわけではない．以下に計算方法を紹介する．

勾配計算方法



勾配は，

$$\text{勾配} = \frac{\text{高さ}}{\text{水平距離}} \times 100 \quad (\%)$$

で計算できる．つまり，$\tan\theta$ の値を百分率で表したものとなる．
上の図では

$$\text{勾配} = \frac{10}{100} \times 100 = 10(\%)$$

である．

下の写真は，鳥取県にある江島大橋であり，一見急勾配に見える．実際には勾配は 5 ～ 6% であり，急な坂に見えるのは写真の撮り方によるものである．

37.2 曲率

曲線のうち，以下のように媒介変数表示したものを平面曲線ということにする．

$$c(t) = (x(t), y(t))$$

例えば，半径 r の円であれば

$$c(t) = (r\cos t, r\sin t)$$

となる．

定義

平面曲線 $c(t)$ が滑らかであるとは，以下の 2 条件を満たすことである．

1. $c(t)$ がいくらでも微分可能
2. 全ての t に対して，$c'(t) \neq (0, 0)$

定義

滑らかな曲線 $c(t) = (x(t), y(t))$ に対して，以下を曲率という．

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{|c'(t)|^3}$$

ここで，円の曲率を求めてみる．

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{(-r\sin t)\cdot(-r\sin t) - (-r\cos t)\cdot(r\cos t)}{r^3} \\
&= \frac{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}{r^3} \\
&= \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

であり，円の曲率は円の半径の逆数である．ここで，円では，半径がおきければ大きいほど，緩やかなカーブとなり，半径が小さければ小さいほど急なカーブになる．曲率に置き換えれば，曲率が小さいほど緩やかで大きいほど急であるということになる．

このような標識の下に「$R = 500m$」といった補助標識が付いていることがある．これは，半径が $500m$ の円の曲率と等しいカーブであることを表している．

37.3　走りやすい道路

一つ前で曲率というものを紹介した．さて，ここで問題．

問題

どのようなカーブであれば走りやすいか．

もし，直線に扇型をつなげたようなカーブであると，どのような走りごこちなのだろうか．
このようなカーブは，急に曲率が変わることから，ハンドルを急に切り，曲がっている最中はハンドルを固定し，曲がり終わった途端にハンドルを戻す必要がある．これでは，車内は大混乱である．
では，どうすれば良いのか．

解決策

ハンドルの切り方が一定になるようなカーブ

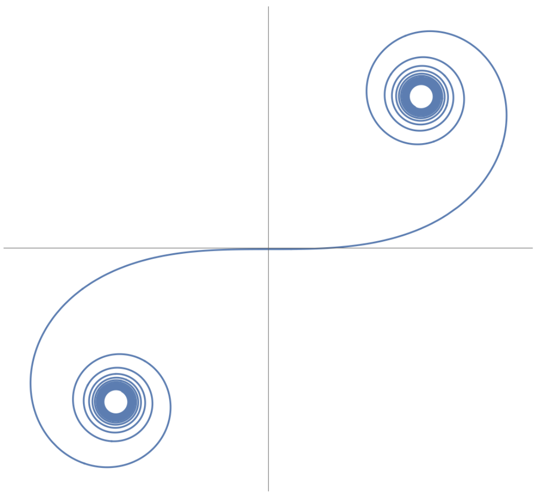
$\Downarrow$

曲率が一定に変化するように設計すれば良い．

ハンドルを一定の速さで回していた時にできる曲線を元に道路を設計する．
このような曲線は実際に以下のように表される．

$$c(t) = \left(\int_0^t \cos\left(\frac{as^2}{2}\right) ds, \int_0^t \sin\left(\frac{as^2}{2}\right) ds \right)$$

この曲線をクロソイド曲線という．
この曲線をグラフで表したものが以下である．



この曲線は道路だけでなく，電車の線路にも用いられている．ちなみに，日本で初めてクロソイド曲線を用いた道路ができたのが昭和 28 年，群馬県と新潟県の県境の三国国道であると言われている．

38　人口推計

38.1　マルサスモデル

ある時刻 t における人口を $N(t)$ とおく．単位時間を 1 年で考える．つまり，t が 1 増えると 1 年経過するということである．
以下，簡単のために $N(t)$ を N とかく．
人口増加率を k とする．人口増加率を元に人口の変化の様子を見ていく．
まずわかることは，

(1 年あたりの人口増加量)=(人口増加率)×(人口)

これを式に表すと

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

式変形を行う．

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &= kN \\
\int \frac{1}{N} dN &= \int k dt \\
\log|N| &= kt + C \quad (C:\text{積分定数}) \\
|N| &= e^{kt+C} \\
N &= \pm e^{kt+C} \\
&= Ae^{kt} \quad (A = \pm e^{C})
\end{aligned}$$

ここで，t=0 のとき，

$$\begin{aligned}
N(0) &= Ae^{0} \\
&= A \\
&\therefore A = N_0
\end{aligned}$$

つまり，t 年後の人口は以下の式で推計される．

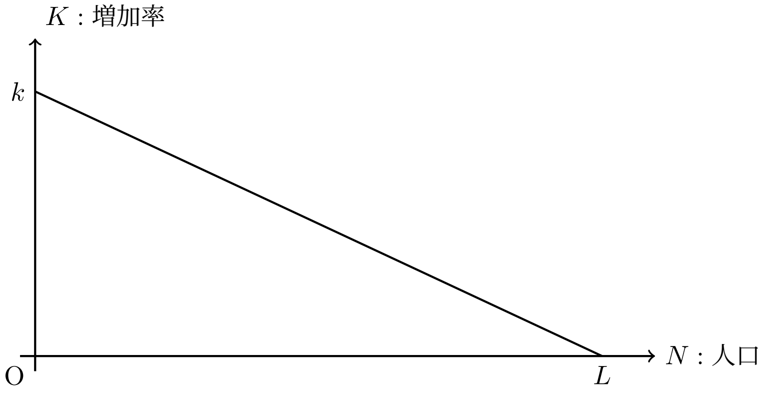
$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

これをマルサスモデルという．
ただし，t が大きくなると人口が無限に大きくなり，非現実的であるという問題点がある．
この問題点は，人口増加率が一定であるという仮定をしたことに起因する．
この問題点を解決したのが次に紹介するロジスティックモデルである．

38.2 ロジスティックモデル

さて，人口がその国や都市に入る限界値に近くなると人口増加率は自然と低下していくものである．このようなモデルを考えたい．

さて，人口が上限に近づくにつれて，増加率が低下するような比例係数 K を考える．



さてこれを満たす比例係数 K は，以下のように数式で表せる．

$$\begin{aligned} K &= -\frac{k}{L}N + k \\ &= k\left(1 - \frac{N}{L}\right) \end{aligned}$$

人口がこの係数に比例すると考えると，

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= KN \\ &= k\left(1 - \frac{N}{L}\right)N \end{aligned}$$

この考え方をロジスティックモデルという．では，解いていく．

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= k\left(1 - \frac{N}{L}\right)N \\ &= \frac{k}{L}(L - N)N \end{aligned}$$

式変形．

$$\begin{aligned} \int \frac{L}{N(L-N)}dN &= \int k\ dt \\ (\text{左辺}) &= \int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{(L-N)}\right)dN \quad (\text{部分分数分解}) \\ &= \log|N| - \log|L-N| \\ &= -\log\left|\frac{L-N}{N}\right| \\ (\text{右辺}) &= kt + C \quad (C : \text{積分定数}) \\ \therefore -\log\left|\frac{L-N}{N}\right| &= kt + C \end{aligned}$$

これより，

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{L-N}{N}\right| &= e^{-kt-C} \\
\frac{L-N}{N} &= \pm e^{-kt-C} \\
&= Ae^{-kt} \quad (A = \pm e^{C}) \\
\frac{L}{N} - 1 &= Ae^{-kt} \\
N &= \frac{L}{1+Ae^{-}kt}
\end{aligned}
$$

さて，$N(0) = N_0$ なので，

$$
\begin{aligned}
N(0) &= \frac{L}{1+A} \\
\therefore A &= \frac{L-N_0}{N_0}
\end{aligned}
$$

これらより，以下のように人口を推計する式が導き出せる．

$$
N(t) = \frac{LN_0}{N_0 + (L-N_0)e^{-kt}}
$$

L : 環境収容力
N_0 : 初期人口
k : 0 年目での人口増加率

38.3　実際に推計

第 IV 部
解答

謎解き問題

小町算

$1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100$

$-1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100$

$1 + 2 + 34 - 5 + 67 - 8 + 9 = 100$

$1 + 23 - 4 + 5 + 6 + 78 - 9 = 100$ など。

ケーニヒスベルク問題

問題１　不可能

問題２　(1) 不可能　(2) 可能　(3) 可能　(4) 不可能

虫食い算・覆面算

虫食い算

この地点より１日に２１キロメートル
ずつ北に進め。これを８２日間続けよ。
すなはち，ここより 17２２キロメートル
はなれた地点に宝が埋まっている。

二つの数十と九十一は
かけると九百一になり
たすと百一になる。

覆面算

$$\begin{array}{rr} & 1 \\ + & 9 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} & 3 & 7 \\ \times & & 9 \\ \hline 3 & 3 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} & 8 & 6 \\ - & 6 & 8 \\ \hline & 1 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & 9 \\ \hline 5) & 5 & 4 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 1 \\ & 1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 1 \\ & 1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 1 \\ & 1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 1 \\ & 1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 1 \\ + & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 7 & 7 \end{array}$$

融合問題

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 9 & 8 & 6 \\
 & & \times & 3 & 4 & 5 \\
\hline
 & & 4 & 9 & 3 & 0 \\
 & 3 & 9 & 4 & 4 & \\
2 & 9 & 4 & 8 & & \\
\hline
3 & 4 & 0 & 1 & 7 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 9 & 1 & 8 & 8 & 8 & 3 & 7 \\
 & & & & & & \times & 7 & 5 & 4 & 3 & 6 & 9 & 2 & 8 \\
\hline
 & & & & & & & 7 & 3 & 5 & 1 & 0 & 6 & 9 & 6 \\
 & & & & & & 1 & 8 & 3 & 7 & 7 & 6 & 7 & 4 & \\
 & & & & & 8 & 2 & 6 & 9 & 9 & 5 & 3 & 3 & & \\
 & & & & 5 & 5 & 1 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 & & & \\
 & & & 2 & 7 & 5 & 6 & 6 & 5 & 1 & 1 & & & & \\
 & & 3 & 6 & 7 & 5 & 5 & 3 & 4 & 8 & & & & & \\
 & 4 & 5 & 9 & 4 & 4 & 1 & 8 & 5 & & & & & & \\
6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 5 & 9 & & & & & & & \\
\hline
6 & 9 & 3 & 1 & 7 & 7 & 6 & 3 & 5 & 1 & 7 & 2 & 7 & 3 & 6
\end{array}
$$

地図の塗り分け

4 色で塗り分け可能。

「四色定理」参照

日常と数学

RSA 暗号

秘密鍵は $k_2 = 55$

メッセージ文は MATHEMATICS

【参考文献，データ・画像引用元】

白地図専門店

https://www.freemap.jp/itemFreeDlPage.php?b=japan&s=japan2

衛星放送協会

https://www.eiseihoso.org/guide/howto2.html

日本郵政 HP(キャッシュカード)

https://www.jp-bank.japanpost.jp/kojin/chokin/sogou/kj_cho_sg_iccard.html

photolibrary

イラストや

https://www.photolibrary.jp/img177/60119_1045836.html

長洲町 HP(パスポート)

https://www.town.nagasu.lg.jp/kiji0032133/index.html

PAKUTASO

松ぼっくり フリー画像

https://www.pakutaso.com

国土交通省 HP ”警戒標識一覧”

https://www.mlit.go.jp/road/sign/sign/keikoku/47warning.htm

鳥取県観光案内”鳥取旅の生の情報”

https://www.tottori-guide.jp/tourism/tour/view/996

国土交通省中国地方整備局 境港湾・空港整備事務所”江島大橋建設のあゆみ”

http://www.pa.cgr.mlit.go.jp/sakai/eshima/eshima.html