mathematics

Takenaga Koudai

May 6, 2020

Contents

Part I
なぜ？

1　指数

定義

$a^n = a \times a \times \cdots a$
(a を n 回かける。)

これが指数の定義であり，直感的に理解ができるだろう。ただし，以下の定義はどうか。

定義

$a^0 = 1$
$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

0 回かけるとは何か，$\dfrac{1}{2}$ 回や-1 回かけるとは何か，理解に苦しむ。定義なので，どうしてこうなるのかと言われても，こう定義したからとしか言えない。ただ，このように定義したのには，都合がよくなるからである。実際にどのように都合が良いか説明していこう。
そのために，まず指数法則の復習から。

指数法則

$a^m \times a^n = a^{m+n}$
$a^m \div a^n = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{m \times n}$

この法則は n，m が自然数の際に成立していた。これが n，m が自然数以外でも成立すると嬉しい。
$3^5 \div 3^5 = \dfrac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = 1$
ここで，左辺は指数法則より $3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0$
よって $3^0 = 1$ と定義した。
$3^3 \div 3^5 = \dfrac{3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \dfrac{1}{3^2}$
ここで，左辺は指数法則より $3^3 \div 3^5 = 3^{3-5} = 3^{-2}$
よって一般的に $3^{-n} = \dfrac{1}{3^n}$ と定義した。
$(3^{\frac{1}{2}})^2 = 3^{\frac{1}{2} \times 2} = 3^1 = 3$
この式より，$3^{\frac{1}{2}}$ は，2 乗して 3 になる数なので $\sqrt{3}$ と定義した。$\dfrac{1}{n}$ に関しても同様に n 乗根とすればうまく指数法則が成立する。

2　階乗

定義

$n! = n \times (n-1) \times \cdots 2 \times 1$

${}_n\mathrm{P}_k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

${}_n\mathrm{P}_n = n!$

この定義内では n は自然数の範囲でしか計算できない。では，$0!$ はどうするのか？
${}_n\mathrm{P}_k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ と ${}_n\mathrm{P}_n = n!$ から，$k = n$ を代入すると，
${}_n\mathrm{P}_n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = n!$ となり，
$\dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!}$ となる。このとき，$0! = 1$ とすれば，この定義が n が自然数と 0 の時にも成立するようになり都合が良いので，$0! = 1$ と定義した。

実は，$0! = 1$ とすればネイピア数 e のときにも都合の良いことが起こる。
$e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^0}{k!} x^k$ で，$0! = 1$ でないと困る。

3　負 × 負

負の数かける負の数は正の数になるということを説明できますか？
ここでは，中学生でも理解できる方法と高校で数Ⅲを習った方なら理解できる方法の 2 通りで説明していく。

【中学生】

1分に2L増減できる水槽について考える

	L		時間		増減量
(1)	$+2$	$\times$	$+3$	$=$	$+6$
(2)	$+2$	$\times$	-3	$=$	-6
(3)	-2	$\times$	-3	$=$	$+6$

上の図のような 1 分間に 2L ずつ出し入れすることができる水槽について考える。

(1) 2L ずつ水槽に入れ 3 分後には 6L 増加している。
(+2)L ずつ水槽に入れ (+3) 分後には (+6)L 増加している。

(2) 2L ずつ水槽に入れた。3 分前には今より 6L 少なかった。
(+2)L ずつ水槽に入れた。(-3) 分後には今より (-)6L 多かった。

(3) 2L ずつ水槽から出した。3 分前には今より 6L 多かった。
(-2)L ずつ水槽に入れた。(-3) 分後には今より (+6)L 多かった。

この説明により，(1)∼(3) は以下のように立式できる。

(1) $(+2) \times (+3) = (+6)$

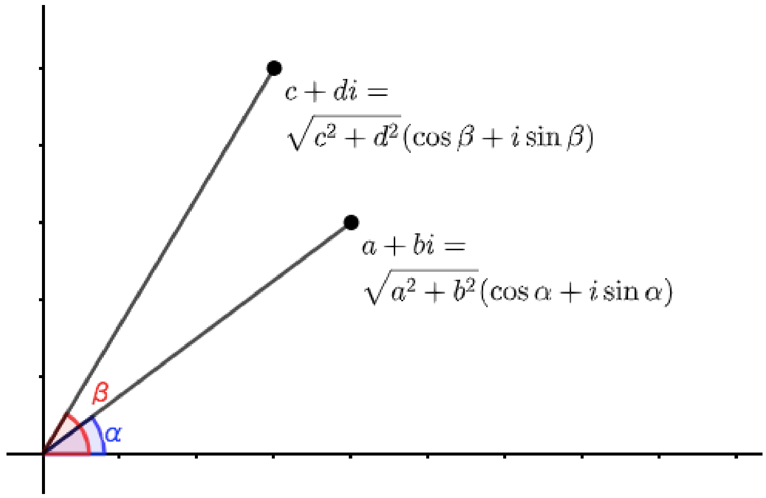
(2) $(+2) \times (-3) = (-6)$

(3) $(-2) \times (-3) = (+6)$

よって，負の数かける負の数は正の数になる。

【高校三年生 (複素数履修者)】

複素数かける複素数は，大きさ同士を掛け合わせてかけた複素数の角度分だけ回転させる作業であった。
ここで，以下のような複素数の積を考える。



$$
\begin{aligned}
(a+bi)(c+di) &= \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i\sin\beta\cos\alpha) \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))
\end{aligned}
$$

ここで，$a=-1,\ c=-1,\ b=d=0$ のとき，つまり，$\alpha=\beta=\pi$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (-1)\times(-1) \\
\text{右辺} &= \sqrt{1^2+0^2}\sqrt{1^2+0^2}(\cos(\pi+\pi) + i\sin(\pi+\pi)) \\
&= \cos 2\pi + i\sin 2\pi \\
&= 1
\end{aligned}
$$

よって，
$(-1)\times(-1) = 1$

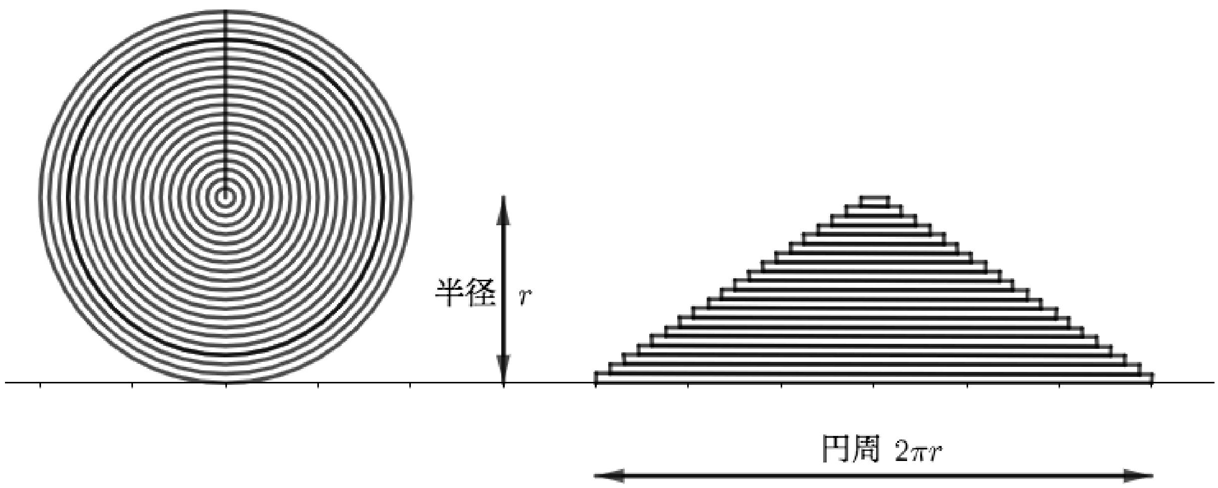
4　円の面積

円の面積

(円の面積)=(半径)×(半径)×π

なぜこの公式で円の面積が出るのか？不思議に思うところである。
この件に関しても，中学生視点と高校生視点の 2 パターンで考えてみる。

【中学生】



円を左の図のような線で切って開くと左の図のようになる。右の図では完全な三角形ではなくでこぼこではあるが，一本一本を細かく切り，ひらけばほぼ三角形とみなせる。その図に三角形の面積公式 (底辺)×(高さ)÷2 を適用すれば
$2\pi r \times r \div 2 = \pi r^2$
となり，円の面積の公式が導かれる。

この，一つ一つを極限まで細かくし足し合わせたり，別の図形とみなし面積や体積を求めることは積分の考え方にもつながるので頭に入れておくとよい。

【高校 2 年生 (積分履修者)】
図的なイメージだけでなく，実際に計算で求めてみよう。
円の式は半径を r として以下のように表せる。

$$x^2+y^2=r^2$$

式変形により

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

第一象限について考えると

$$y=\sqrt{r^2-x^2}\quad(0\leqq x\leqq r)$$

第一象限で表される $\dfrac{1}{4}$ の円の面積 S_1 は，

$$S_1=\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}dx$$

で求められる。$x=r\cos\theta$ と変数変換する。

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & r \\ \hline \theta & \frac{\pi}{2} & \to & 0 \end{array} \qquad dx=-r\sin\theta$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{r^2-r^2\cos^2\theta}(-r)\sin\theta d\theta \\ &= r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2\theta}\sin\theta d\theta \\ &= r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta \\ &= r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta \\ &= r^2\left[\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4}r^2\pi \end{aligned}$$

よって第一象限部分の面積つまり円の $\dfrac{1}{4}$ 分の面積が求まった。
これにより円の面積 S の面積は

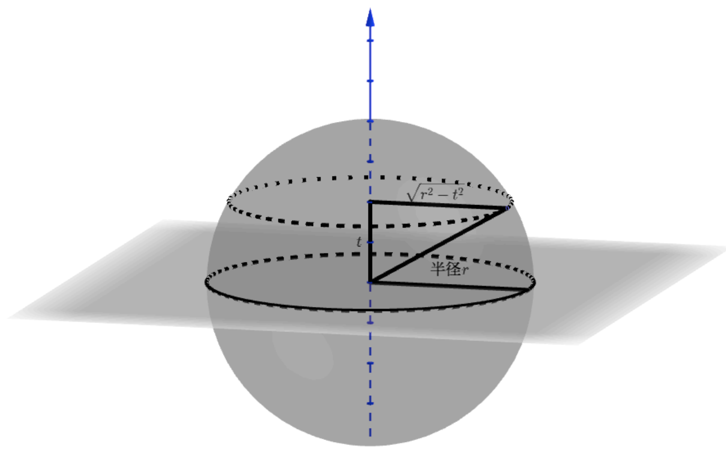
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4}r^2\pi\times 4 \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

5　球の体積

球の体積

$\frac{4}{3}\pi r^3$

球の体積は上の公式で求められます。さて，覚えていましたか？
まあ，覚えていなかったり，忘れていたりしても，自分で導出できれば問題ないですよね。
ということで，積分によって球の体積公式を導出してみましょう。



z 軸に垂直にスライスしてできた円を重ね合わせたとして積分を考える。
原点から z 軸に t 進んだ点での円の半径は三平方の定理より $\sqrt{r^2-t^2}$ なので円の面積は

$$S_t = \pi(r^2 - t^2)$$

これを $-r$ から r で足し合わせれば良いので (積分)，求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} S_t dt \\ &= \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - t^2)dt \\ &= \pi \left[r^2 t - \frac{1}{3}r^3 \right]_{-r}^{r} \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

これで球の体積が求められた。
ちなみにこれを微分すると球の表面積になる。
また，球の表面積を積分すれば球の体積になる。理由は各自考えてみよう。

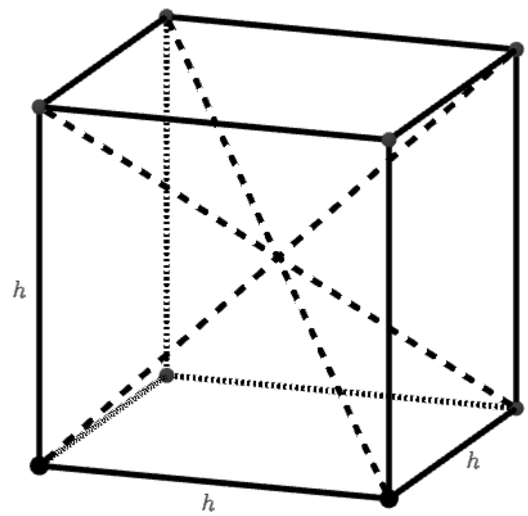
6　錐の体積

錐の体積

(錐の体積)=(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$

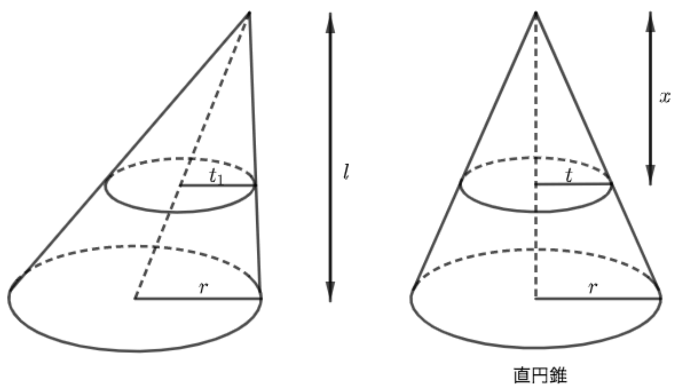
これが錐の体積の公式であり，柱の体積の $\frac{1}{3}$ 倍ですが，なぜ $\frac{1}{3}$ が出てくるのか説明できますか？

【四角錐】
下の図のように立方体の対角線を結び，できた面で切ると四角錐ができる。

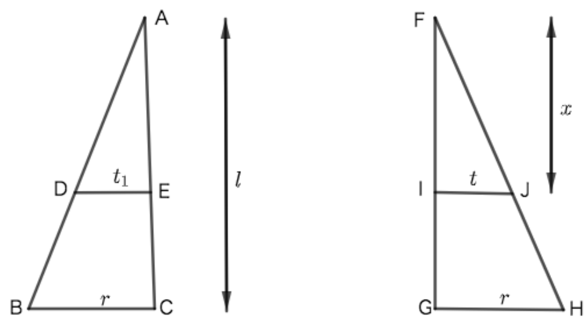


この四角錐は合計 6 個でき，これらの体積は全て等しい。立方体の体積は h^3 であるので，四角錐の体積は $\frac{1}{6}h^3$ である。
四角錐の底面積は h^2，高さは $\frac{1}{2}h$ であるので，立方体から切り出した四角錐の体積は
$\frac{1}{3}\times$ (底面積) $\times$ (高さ) であることがわかった。

【円錐】
まず，のちの議論を簡単にするために，直円錐と，その円錐と底面積と高さが等しく，頂点がずれた円錐の体積が等しくなることについて説明する。



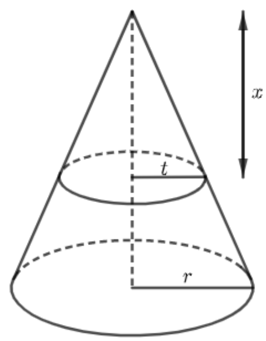
この図において，円錐の軸を含む平面で切った断面図を以下に示す。



直円錐において，IJ : GH=x : l
もう片方の円錐において，DE : BC=x : l
よって，IJ : GH=DE : BC
r : $t = r$: t_1 より $t = t_1$ がわかり，底面積と高さが同じ円錐において，任意の高さで底面と平行に切った時の断面積の円の面積は等しくなるということがわかる。
体積が断面積を集めた (積分した) ものということを踏まえると，底面積と高さが等しい円錐の体積が等しいことがわかる。

実は，他の錐に関しても同じ議論が展開でき，底面積と高さが等しい錐は体積が等しくなる。

では，実際に体積を求めて，$\frac{1}{3}$ が出てくることを確認する。



相似関係から，$x : l = t : r$
よって $t = \frac{rx}{l}$
よって，頂点から x の地点で切った断面の円の面積は

$$S = \pi t^2 = \pi \frac{r^2 x^2}{l^2}$$

と表せる。これを x が 0 から l まで足し合わせる (積分する) と体積が求まる。

$$\begin{aligned} V &= \int_0^l S dx \\ &= \int_0^l \pi \frac{r^2 x^2}{l^2} dx \\ &= \pi \frac{r^2}{l^2} \int_0^l x^2 dx \\ &= \pi \frac{r^2}{l^2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^l \\ &= \pi \frac{r^2}{l^2} \frac{1}{3} l^3 \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 l \end{aligned}$$

よって，円錐の体積が

$$\text{底面積} \times \text{高さ} \times \frac{1}{3}$$

で求められることがわかり，$\frac{1}{3}$ は積分の際に出てきていることがわかった。

7 円周率とは？

7.1 円周率について

さて，円周率とはなんですかと問われた際に答えられますか？
円周率は以下のように定義されます。

定義

$$円周率 = \frac{円周の長さ}{直径}$$

以下に小数点以下 35 桁までの値を記す。

円周率

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288\cdots$$

【性質】

無理性

π は無理数である。つまり，2 つの整数の商で表すことはできない。また，小数展開は循環しない。

超越性

π は超越数である。つまり，有理数係数の代数方程式の根にならない。[1]

ランダム性

2019 年時点で小数点以下 31.4 兆桁を超える桁まで計算されており，わかっている限りでは 0 から 9 までの数字がランダムに現れているように見える。ただし，はっきりと乱数列であるか否かはわかっていない。

[1]「リンデマンの証明」参照

7.2 円周率に関する式

π が出てくる式はたくさんある。そのうちの一部を以下に紹介する。

- $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ (ライプニッツの公式)
- $\pi = \sqrt{12}\left(1 - \dfrac{1}{3 \cdot 3} + \dfrac{1}{5 \cdot 3^2} - \dfrac{1}{7 \cdot 3^3} + \cdots\right)$
- $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2}{1} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{6}{5} \cdot \dfrac{6}{7} \cdot \dfrac{8}{7} \cdot \dfrac{8}{9} \cdots$
- $\zeta(2) = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$ (ゼータ関数) [2]
- $\zeta(4) = \dfrac{1}{1^4} + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{4^4} + \cdots = \dfrac{\pi^4}{90}$
- $\dfrac{\pi^2}{6} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^{n-1}} + (\log 2)^2$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (ガウス積分)
- $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (ガンマ関数)[3]
- $\pi = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
- $\pi = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
- $\pi = 2\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$
- $\pi = 4\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

---

[2] $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

[3] $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$

Part II
数学問題

8 証明の誤り

8.1 $1 = 2$(Part1)

問題
以下の証明の誤りを指摘せよ。

【証明】

$$a = b$$

辺々に a をかける。

$$a^2 = ab$$

両辺から b^2 を引く。

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= ab - b^2 \\ (a-b)(a+b) &= b(a-b) \end{aligned}$$

$a - b$ で割る。

$$a + b = b$$

したがって $1 = 2$

証明の 7 行目で両辺を $a - b$ で割った。
ここで，1 行目の $a = b$ という条件から，$a - b = 0$ である。0 で割る行為は NG。ここが証明の誤りである。

8.2 $1 = 2$(Part2)

問題
以下の証明の誤りを指摘せよ。

【証明】

$$x^2 = x + x + \cdots + x \qquad \leftarrow (x\text{ 個})$$

辺々 x で微分すると，

$$\begin{aligned} 2x &= 1 + 1 + \cdots + 1 \\ 2x &= x \\ 2 &= 1 \end{aligned}$$

微分の定義 $\left(f'(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$ に沿って両辺を微分する。

$$\begin{aligned} (x^2)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2hx + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2x + h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

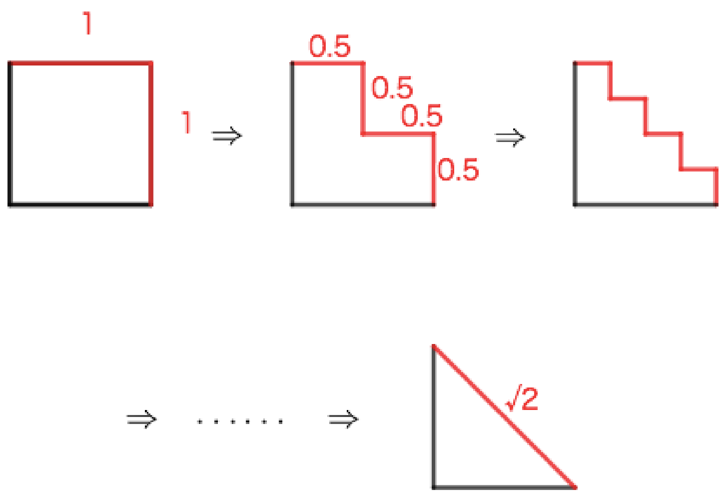
$$\begin{aligned} (x + x + \cdots + x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{((x+h) + (x+h) + \cdots + (x+h)) - (x + x + \cdots + x)}{h} \\ &\quad \bigl(\text{ここで，}(x+h)\text{ は }x\text{ 個ではなく }(x+h)\text{ 個！！ }x\text{ は }x\text{ 個。}\bigr) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(h + h + \cdots + h) + ((x+h) + (x+h) + \cdots + (x+h))}{h} \\ &\quad \bigl(\text{ここで，}h\text{ は }x\text{ 個，}(x+h)\text{ は }h\text{ 個。}\bigr) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(h + h + \cdots + h) + (x + x + \cdots + x)}{h} \\ &\quad \bigl(\text{ここで，}h\text{ は }(x+h)\text{ 個，}x\text{ は }h\text{ 個。}\bigr) \\ &= \lim_{h\to 0}(1 + 1 + \cdots 1) + x \\ &\quad \bigl(\text{ここで，}1\text{ は }(x+h)\text{ 個。}\bigr) \\ &= \lim_{h\to 0}(2x + h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

問題の証明で x が x 個の「x 個」の部分を見かけの定数として微分してしまった点が誤り。

8.3　$2=\sqrt{2}$

問題
以下の証明の誤りを指摘せよ。

【証明】



1 辺の長さが 1 の正方形の赤い辺の長さは 2 である。辺の中点で上の図のように折り返すと長さは同じままである。これを繰り返すと正方形の対角線に限りなく近づく。正方形の対角線は長さが $\sqrt{2}$ なので $2=\sqrt{2}$

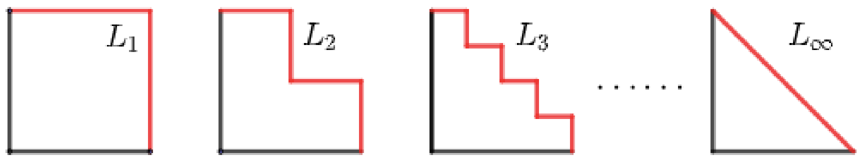
誤りポイントは，曲線に対して長さを求める関数が連続でないという点である。

さて，関数が連続でないと言ってもどういうことかわからない人もいるだろう。次のページから説明していく。

定義

関数とは，ある集合の元に対しその集合もしくは別の集合の元に対応させる関係のこと。

ここでの関数は，折れ線の集合に対し，その折れ線の長さを対応させる関係のこと。



$$
\begin{array}{rcl}
\{\text{折れ線}\} & \Rightarrow & \mathbb{R}(L\text{の長さ}) \\
L_1 & \Rightarrow & 2 \\
L_2 & \Rightarrow & 2 \\
L_3 & \Rightarrow & 2 \\
 & \cdots & \\
L_\infty & \Rightarrow & \sqrt{2}
\end{array}
$$

定義

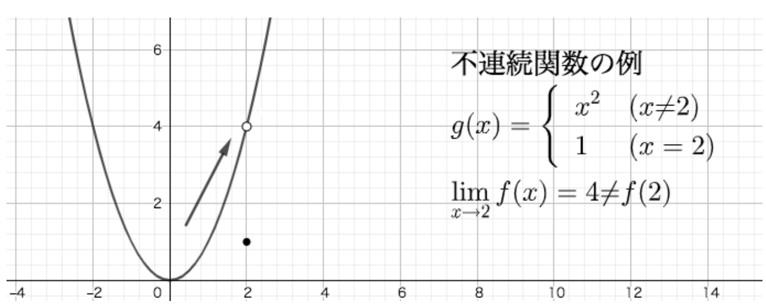
関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続 $\Longleftrightarrow$
$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

さて，極限が出てきた。苦手な人も多いので，極限について確認しよう。

定義

関数 $f(x)$ において，x がa と異なる値を取りながら限りなく a に近づくとき，$f(a)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，$x \to a$ のとき $f(x)$ は α に収束するという。

では，連続でない関数について例をみる。



x をどれだけ 2 に近づけても 4 にはならない。一方で $x=2$ のとき，$f(2)=1$ なのでこの関数は不連続。

では，今回の問題の関数はどうなのか？

$$L_n = \begin{cases} 2 & (n < \infty) \\ \sqrt{2} & (n = \infty) \end{cases}$$

なので

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(L_n) &= \lim_{n\to\infty} 2 = 2 \\ f(\lim_{n\to\infty} L_n) &= f(L_\infty) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

となり，今回の関数は連続でない。
そのため，極限を使った問題の証明は不適切。

ちょうど良いので，極限の練習。

極限は代入ではない！！

では，以下の問題解けますか？

問題
以下の極限値を求めよ。
$\lim_{x\to3} x^2 + 1$
$\lim_{x\to3} [x]^4$
$\lim_{x\to2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

[4] $[x]$ は，x を超えない最大の整数を表す。ガウス記号という。

【解答】

(1) $\lim_{x \to 3} x^2 + 1 = 10$

(2) $\lim_{x \to 3} [x]$: 存在しない

(3) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

【解説】

(1) $f(x) = x^2 + 1$ として，$f(x)$ は連続関数なので
$\lim_{x \to 3} f(x) = f\left(\lim_{x \to 3}\right) = f(3) = 10$

(2) $\lim_{x \to 3} [x]$ は，x を 2 側から近づけると，
$2 \to 2.9 \to 2.99 \to 2.999$ となり，x を超えない最大の整数は 2 になる。
逆に，x を 4 側から近づけると
$4 \to 3.1 \to 3.01 \to 3.001$ となり，x を超えない最大の整数は 3 になる。
よって，x の近づけ方によって極限値が一つに定まらないため，極限値は存在しない。

(3)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} \\
&= \lim_{x \to 2} (x + 2) \\
&= 4
\end{aligned}
$$

1 行目から 2 行目で，$(x-2)$ で約分したけれど $x \to 2$ なので $(x-2) \to 0$ となるが，果たして約分してよかったのか？
答えは，約分して良い。
極限の定義から，x は，<u>2 とは異なる値を取りながら 2 に限りなく近づける</u>とあるので，$(x-2)$ は 0 ではない値をとるので約分して良い。

8.4　$1 = -1$

問題
以下の証明の誤りを指摘せよ。

【証明】

$$
\begin{aligned}
1 &= \sqrt{1} \\
&= \sqrt{(-1)(-1)} \\
&= \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} \\
&= i^2 \\
&= -1 \\
\therefore 1 &= -1
\end{aligned}
$$

平方根の乗法と除法について。

乗法　$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

除法　$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

これは，a，b が正の数のときに成立する定理であるので，
$\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)}$
は NG。
このように，式変形をする際は使える条件を確認しておく必要がある。

Part III
発展数学

9　乱数による円周率の生成 (モンテカルロ法)

定義

円周率 $\pi = \dfrac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$

円周率は上のような定義で与えられるが，ここでは別の方法で円周率の近似値を求めてみる。

定義

乱数：次の数を決める規則が一切存在しない数

【モンテカルロ法を用いた円周率の求め方】

STEP1 $(0, 1)$ 区間のなかで 2 つの乱数を生成する。

STEP2 2 個の乱数を xy 座標とする点をおく。

STEP3 これを何回も繰り返し，多数の点をおく。

STEP4 多数の点は，1 辺の長さが 1 の正方形の上に置かれる。この正方形の上に，半径が 1 の扇型を描く。正方形の面積は 1 で，扇形の面積は $\frac{1}{4}1 \cdot 1 \cdot \pi$ である。つまり，正方形に占める扇形の面積の割合は $\frac{\pi}{4}$ ということになる。

STEP5 乱数生成によってランダムに生成された点は，正方形の上におくと扇型の中に入る確率は $\frac{\pi}{4}$ になる。よって，点の数を増やしていき，扇型の中に入った点の割合を数え求めていけばその値は $\frac{\pi}{4}$ に近づく。このことから，π の値を求めることができる。

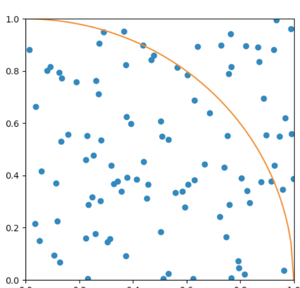


Figure 1: 100 個の点

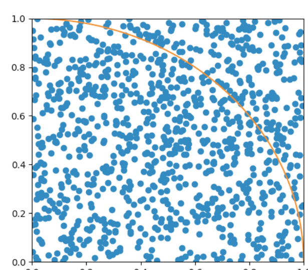


Figure 2: 100 個の点

プログラムを書いて求めてみた。
以下に python ソースコードを書く。

Listing 1: montecarlo

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import math
3 import numpy as np
4 q=0;p=0;N=1000000
5 l=list()
6 for i in range(N):
7     x=np.random.uniform(0,1)
8     y=np.random.uniform(0,1)
9     z=np.sqrt(x**2+y**2)
10    if z>1:
11        q=q+1
12    else:
13        p=p+1
14    a=4*p/(i+0.001)
15    l.append(a)
16 for i in range(N):
17    if i%100000:
18        continue
19    print('N='+str(i)+'|| π='+str(l[i]))
20
21 j=np.array(range(0,N))
22 pi=[3.14159265]*N
23 plt.plot(j,l)
24 plt.plot(j,pi)
25 plt.xlim([0,N])
26 plt.ylim([3.1,3.2])
27 plt.show()
```

7,8 行目で x,y の値をランダムに生成
9 行目で生成された点と原点との距離を計算
10〜13 行目で扇型内に入るか否かのカウンティング
14 行目で π の計算 (0.001 の加算は分母 0 の回避のため)
16 行目以降実行結果の表示用プログラム

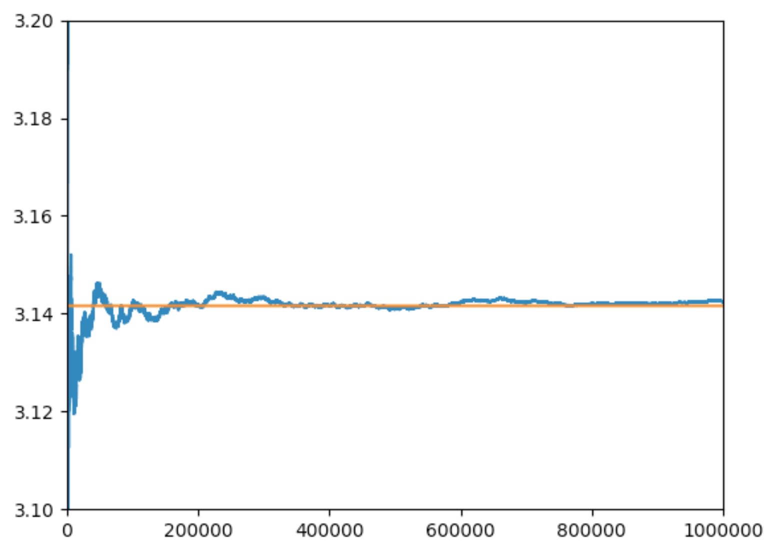
次のページに実行結果をまとめて表示する。

以下実行結果

Listing 2: montecarlo

```
(base) takenagdainoAir:math koudai$ python montecarlo.py
N=0|| π=4000.0
N=100000|| π=3.1318799686812
N=200000|| π=3.1322799843386004
N=300000|| π=3.136986656210045
N=400000|| π=3.1376399921559
N=500000|| π=3.138567993722864
N=600000|| π=3.139573328100711
N=700000|| π=3.1394399955150853
N=800000|| π=3.140174996074781
N=900000|| π=3.140404440955106
```

数字を見てわかるように，繰り返し回数が増えるごとに π の値が $3.1415\cdots$ に近づいていってることがわかる。
さらに見やすいようにグラフで可視化する。



100 万回程度の繰り返しでもおおよそ π の値に収束していることがわかる。
さらに繰り返していけば，もっと精度よく真の π の値に近づいていく。

10 テイラー展開

テイラー展開とは，関数 $f(x)$ を多項式で近似する手法である。

テイラー展開

(1) 関数 $f(x)$ が $x = a$ を含むある区間で無限回微分可能

(2) テイラーの定理における剰余項 R_n が $n \to \infty$ のとき 0 に収束する。

という条件のもとで，$f(x)$ は以下のような無限級数で表すことができる。[5]

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

ここで，テイラーの定理とは

テイラーの定理

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

ここで，$R_{n+1}(x)$ は剰余項[6]という。

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

マクローリン展開

テイラー展開の $a = 0$ の場合について考えたもの。

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

指数関数と三角関数が，整数だけを使った美しい式に変形できる！

指数関数

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\times 2} + \frac{x^3}{1\times 2\times 3} + \frac{x^4}{1\times 2\times 3\times 4} + \frac{x^5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} + \frac{x^6}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6} + \cdots$$

三角関数 (正弦)

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\times 2\times 3} + \frac{x^5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} - \frac{x^7}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7} + \cdots$$

三角関数 (余弦)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\times 2} + \frac{x^4}{1\times 2\times 3\times 4} - \frac{x^6}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6} + \frac{x^8}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8} + \cdots$$

[5] $f^{(k)}$ ： $f(x)$ を k 回微分した関数

[6] 剰余項 $R_{n+1}(x)$ は $f(x)$ と多項式との間の誤差を表す項。この誤差項の表し方はいくつかあり，上で提示したものは標準的なラグランジュの剰余項である。

11 オイラーの等式

オイラーの公式

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

オイラーの公式に出てくる虚数乗とは一体なんなのか？
べき乗は本来実数の範囲で定義されたものであった。それを虚数の範囲に以下のように拡張することを考える。

定義 (e^i)

e^x をテイラー展開した式に，$x = i$ を代入したものを，e^i の定義とする。

三角関数に対しても同じように定義する。

【オイラーの公式の証明】
e^x をテイラー展開した式に $x = ix$ を代入。

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} + \frac{(ix)^2}{1\times 2} + \frac{(ix)^3}{1\times 2\times 3} + \frac{(ix)^4}{1\times 2\times 3\times 4} + \frac{(ix)^5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} + \frac{(ix)^6}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6} + \frac{(ix)^7}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7} + \cdots$$

右辺を整理する。

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1} + \frac{-x^2}{1\times 2} + \frac{-ix^3}{1\times 2\times 3} + \frac{x^4}{1\times 2\times 3\times 4} + \frac{ix^5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} + \frac{-x^6}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6} \\ &\quad + \frac{-ix^7}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7} + \cdots = \left(1 + \frac{-x^2}{1\times 2} + \frac{x^4}{1\times 2\times 3\times 4} + \frac{-x^6}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6} + \cdots\right) \\ &\quad + \left(\frac{ix}{1} + \frac{-ix^3}{1\times 2\times 3} + \frac{ix^5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} + \frac{-ix^7}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7} + \cdots\right) \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{1\times 2} + \frac{x^4}{1\times 2\times 3\times 4} - \frac{x^6}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6} + \cdots\right) \quad (\cos x \text{ をテーラー展開した式}) \\ &\quad + i\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\times 2\times 3} + \frac{x^5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} - \frac{x^7}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7} + \cdots\right) \quad (\sin x \text{ をテーラー展開した式}) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

これによりオイラーの公式が示せた。
この公式に $x = \pi$ を代入。

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= \cos \pi + i \sin \pi \\ &= -1 + i \times 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

したがって，以下が導かれる。

オイラーの等式

$e^{i\pi} + 1 = 0$

12　ネイピア数

ネイピア数 e はもともとはお金の計算から生まれたらしい。
【銀行に預けたお金は 1 年後にいくらになるか？】
$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ の n に 2 を代入すると，$\dfrac{1}{2}$ 年 (半年) 後に預金額が $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 倍になる場合の 1 年後の預金額を計算できる。この n を大きくして，利息がつくまでの時間を短くしていくと 1 年後の預金額が自然対数 $e = 2.718281828459041$ に近づく。

n	利息がつくまでの時間 $\left(\dfrac{1}{n}\text{年}\right)$	利息	1 年後の預金額 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
1	1 年	$\dfrac{1}{1}$	2
2	半年	$\dfrac{1}{2}$	2.25
4	3 ヶ月	$\dfrac{1}{4}$	2.44240625
12	1 ヶ月	$\dfrac{1}{12}$	$2.6130352902\cdots$
365	1 日	$\dfrac{1}{365}$	$2.7145674820\cdots$
8760	1 時間	$\dfrac{1}{8760}$	$2.7181266916\cdots$
525600	1 分	$\dfrac{1}{525600}$	$2.7182792425\cdots$

このことから，ネイピア数を以下のように定義する。

定義

$$(1)e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$= \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

この定義から，以下の定理が導かれる。

定理

(2) $y = e^x,\quad y' = e^x$

(3) $y = e^x$ の $x = 0$ における接線の式は $y = x + 1$

(4) $y = \log_e x,\quad y' = \dfrac{1}{x}$

実は，(1) を定義とせずに，(2)~(4) のうちのいずれかを定義としても，残りの 3 つを定理として導くことができる。なので，(1)~(4) のうちどれを定義としても大丈夫である。
(1) を定義した際の (2)~(4) の導きを次のページで紹介する。

・$y=a^x$ の，$x=0$ のときの接線の傾きが 1 となるときの a の値について考える。

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h} \\ &= a^x\left(\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}\right) \end{aligned}$$

$x=0$ で傾き 1 つまり $y'=1$ なので

$$\begin{aligned} y'=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h} &= 1 \\ \therefore y' &= a^x \end{aligned}$$

逆関数 $y=\log_a x$ について考える。
これも $x=1, y=0$ のとき，$y'=1$ なので，

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+h) \\ &= \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=1 \end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=a$ である。
これは，定義からまさに $a=e$ であり，$y=a^x,\ y'=a^x$ を満たす a の値は e である。
また，$y=e^x$ の $(0,1)$ での接線の傾きが 1 になることもこれからすぐに示せる。
・$y=\log_e x$ について考える。

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_e(x+h)-\log_e x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right) \end{aligned}$$

$\dfrac{h}{x}=t$ とおく。$h\to 0$ に対し，$t\to 0$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{xt}\log_e(1+t) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log_e(1+t)^{\frac{1}{t}} \end{aligned}$$

e の定義から $\log_e(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ より，

$$y'=\frac{1}{x}$$

13　双子素数

定義

p と $p+2$ が互いに素数のとき，$(p,\ p+2)$ のことを双子素数という

【例】

$(3,\ 5),\ (5,\ 7),\ (11,\ 13),\ (17,\ 19)$

未解決問題

双子素数は無限にあるか[7]

研究の流れ

○ $B_2 = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\cdots$ (双子素数の逆数和)
は収束する。(1919)
$\rightarrow$ 有限の可能性 (cf. 素数の逆数和は発散)

○ P_n：n 番目の素数として，$\mathrm{P}_{n+1}-\mathrm{P}_n \leqq 7\times 10^7$ なる n は無限個存在する。(2013)
$\rightarrow$ 限られた範囲内にも無数に存在。

$\downarrow$

$\mathrm{P}_{n+1}-\mathrm{P}_n \leqq 600$　(2013)

$\downarrow$

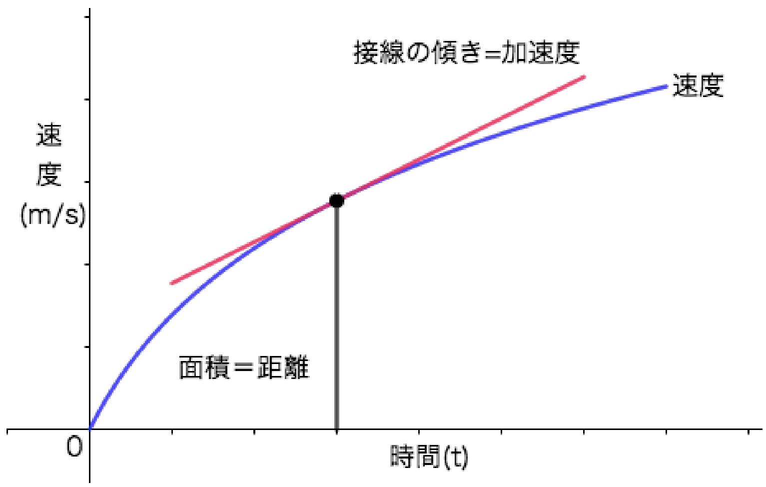
$\mathrm{P}_{n+1}-\mathrm{P}_n \leqq 246$　(2014)

[7] 素数が無限にあることはすでに証明されている

14　物理と数学

14.1　距離・速度・加速度の関係

縦軸速度，横軸時間のグラフにおいて，時間 t における接線の傾きは加速度，区間 $[0, t]$ での面積は時間 t で進んだ距離を表す。



ここで，曲線の微分が接線の傾き，積分が面積なので

$$\text{距離} \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}} \text{速度} \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}} \text{加速度}$$

という関係が成り立つ。

14.2　等加速度運動

ボールを上に投げ上げる場合を考える。ボールの質量を m，速度を v，時間を t，重力加速度を g とおく。軸は上向きを正とする。
物体の質量に加速度をかけたものは，その物体に働く力に等しいので，
$m\dfrac{dv}{dt} = -mg$
この式全体を時間 t で積分する。すると以下のようになる。
$m\displaystyle\int \dfrac{dv}{dt}dt = -mg\int dt$
$v = -gt + v_0$
ここで，v_0 は積分定数であり，$t = 0$ のとき $v = v_0$ より，この積分定数 v_0 は時間 $(t = 0)$ の時の速度 (初速度)。
速度の時間積分が距離，逆に速度の時間微分が加速度である。
・積分すると
$\displaystyle\int v\ dt = \int (-gt + v_0)dt$
また，速度は距離の時間微分より $v = \dfrac{dy}{dt}$
よって
$\displaystyle\int \dfrac{dy}{dt}\ dt = \int (-gt + v_0)dt$
$y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$
$t = 0$ とすると $y = y_0$ なので y_0 は初期位置。・微分すると
$a = -g$
まとめると以下のようになる。

まとめ

ボールの投げ上げにおいて，
ボールの位置　:$y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$
ボールの速度　:$v = -gt + v_0$
ボールの加速度 :$a = -g$

一般化すると，

等加速度運動の公式

a:加速度，t:時間，y:変位，v:速度，v_0:初期速度，y_0:初期位置 とすると，
$y = \dfrac{1}{2}at^2 + v_0t + y_0$
$v = at + v_0$
と表せる。

$2ay = v^2 - v_0^2$ は上の二つの式変形と代入で求めることができる。

Part IV
入試問題

15　入試史上最難関問題

問題

グラフ $G=(V,\ W)$ とは，有限個の頂点の集合 $V=\{\mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_n\}$ とそれらの間を結ぶ辺の集合 $W=\{\mathrm{E}_1,\ \cdots,\ \mathrm{E}_m\}$ からなる図形とする。各辺 E_j はちょうど 2 つの頂点 $\mathrm{P}_{i_1}, \mathrm{P}_{i_2}$ $(i_1 \neq i_2)$ をもつ。頂点以外での辺同士の交わりは考えない。さらに，各頂点には白か黒の色がついていると仮定する。

例えば，図 1 のグラフは頂点が $n=5$ 個，辺が $m=4$ 個あり，辺 E_i $(i=1,\ \cdots,\ 4)$ の頂点は P_i と P_5 である。$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ は白頂点であり，$\mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4, \mathrm{P}_5$ は黒頂点である。

出発点とするグラフ (図 2) は，$n=1,\ m=0$ であり，ただ 1 つの頂点は白頂点であるとする。

与えられたグラフ $G=(V,\ W)$ から新しいグラフ $G'=(V',\ W')$ を作る 2 種類の操作を以下で定義する。これらの操作では頂点と辺の数がそれぞれ 1 つだけ増加する。

(操作 1) この操作は G の頂点 P_{i_0} を 1 つ選ぶと定まる。V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする。W' は W に新しい辺 E_{m+1} を加えたものとする。E_{m+1} の頂点は P_{i_0} と P_{n+1} とし，G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする。G において頂点 P_{i_0} の色が白または黒ならば，G' における色はそれぞれ黒または白に変化させる。それ以外の頂点の色は変化させない。また，P_{n+1} は白頂点にする (図 3)。

(操作 2) この操作は G の辺 E_{j_0} を 1 つ選ぶと定まる。V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする。W' は W から E_{j_0} を取り去り，新しい辺 E_{m+1}，E_{m+2} を加えたものとする。E_{j_0} の頂点が P_{i_1} と P_{i_2} であるとき，E_{m+1} の頂点は P_{i+1} と P_{n+1} であり，$\mathrm{E}m+2$ の頂点は P_{i_2} と P_{n+1} であるとする。G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする。G において頂点 P_{i_1} の色が白又は黒ならば，G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる。P_{i_2} についても同様に変化させる。それ以外の頂点の色は変化させない。また P_{n+1} は白頂点にする (図 4)。

出発点のグラフ G_1 にこれら 2 種類の操作を有限回繰り返し施して得られるグラフを可能グラフと呼ぶことにする。以下の問いに答えよ。

(1) 図 5 のグラフは全て可能グラフであることを示せ。ここで，全ての頂点の色は白である。

(2) n を自然数とするとき，n 個の頂点を持つ図 6 のような棒状のグラフが可能グラフになるために n のみたすべき必要十分条件を求めよ。ここで，すべての頂点の色は白である。

(1)∼(6) の図は次のページに記載。

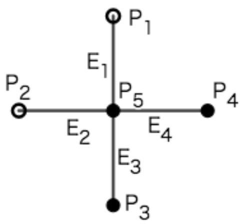


図1

図2

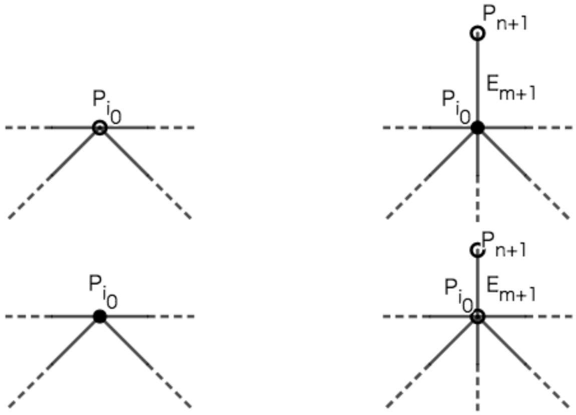


図3

図4

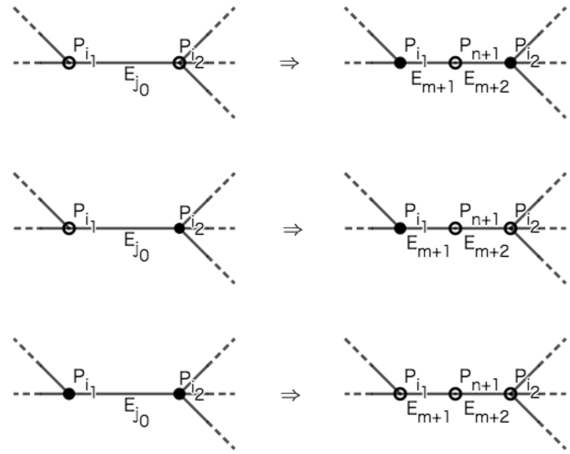


図5

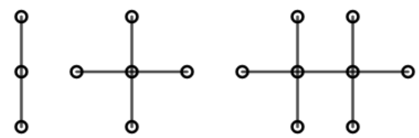


図6

この問題は 1998 年東京大学後期入試で出題された，大学入試史上第 1 位にランクされる超難問である。なぜ難しいかというと，この問題には大学で習う「グラフ理論」をもとに作問されており，高校までに習う「グラフ」とは全く異なる「グラフ」を扱っているからである。

また，この問題の模範解答を作成する際に，とある大手予備校講師は作成を中断し帰宅したという話もある。

このような問題に出くわした際には，無理して手を出さずにほかの問題に取り掛かること。また，この問題も (1) に関しては容易に解けるので (1) のみ解き，ほかの問題に時間を割くなど，焦らずに落ち着いて試験に取り組もう。