

# ニム (石取りゲーム)

Takenaga Koudai

2021年8月31日

# 1 ニム

## 1.1 ルール

### ルール

- 2人制
- 複数の山に複数個の石がある
- プレーヤーは交互に石を取っていく  
1回で複数個の石を取れるが、同時に取れるのは同じ山の石のみ
- 最後の石を取った方が勝利

ここでは勝利条件を最後の石を取った者としたが、逆のパターンもある。

### 表し方

山の石の数を並べて、 $(a, b, c)$  と表す。

### 例

スタート...  $(4, 6, 9)$

A が 1 番の山から石を 4 個とる...  $(0, 6, 9)$

B が 3 番の山から石を 5 個とる...  $(0, 6, 4)$

A が 2 番の山から石を 1 個とる...  $(0, 5, 4)$

B が 2 番の山から石を 4 個とる...  $(0, 1, 4)$

A が 3 番の山から石を 3 個とる...  $(0, 1, 1)$

B が 3 番の山から石を 1 個とる...  $(0, 1, 0)$

A が 2 番の山から石を 1 個とる...  $(0, 0, 0)$

A の勝利

さて、このゲームにおいてはうまく立ち回することで必ず勝つことができる形にもていくことが可能である。それを見ていく。

## 1.2 必勝法

必勝法の説明のため、必勝形を定義する。

必勝形

以下の状態のことを「必勝形」とよぶ。

各山の石の数を二進数で表したとき、各桁の和が全て偶数である。

(i.e. 各桁の排他的論理和が 0, 排他的論理和のことをニム和ともいう)

例

(3,5,7)

二進数で表すと (11,101,111) となり、各桁の和は 223 で奇数が存在する。これは必勝形ではない。

(2,5,7)

二進数で表すと (10,101,111) となり、各桁の和は 222 で全て偶数。これは必勝形である。

### ニムの必勝法の概略

自分の手番終了時に必勝法に持っていくことができれば勝利可能。

- スタートが「必勝形」 $\implies$  後手が勝てる。
- スタートが「必勝形」でない $\implies$  以下の方法で先手が勝てる。

「必勝形でない状態」からスタートした時の先手必勝法

1. 「必勝形でない形」からうまく石を取ることで、「必勝形」にすることができる。  
∴ 自分の手番終了後には必ず「必勝形」になる。
2. 「必勝形」からどのように石を取っても「必勝形でない形」になる  
∴ 相手の手番終了時は常に「必勝形でない形」になる。
3. 終了時 (石がない状態) は必勝形であるので、自分の手番終了後に必ずゲームが終了する。

さて、この必勝法が成立することを示すために、1,2 のことを示さなければならない。

<証明>

1. 「全ての山のニム和」において、1 である桁を反転させるような石の取り方ができれば良い。  
これは、ニム和の最高位が 1 である山  $X$  を選ぶことで実現できる。  
(例) (3,5,7) のとき。  
つまり、(11,101,111) のとき、ニム和は 001 である。  
よって、一桁目を反転させるように石を取れば良い。さて、どの山から何個石を取るか。  
ニム和の最高位は一桁目なので、一桁目が 1 である山を選ぶ。つまり、一つ目の山の 11 を 10 にすれば良い。  
(この操作が必ずできる理由)  
ニム和の最高位が 1 である山を選んでるので、反転させた後の数が元の数よりも小さくなるから。
2. 全体のうちの 1 つの山のみ値を変えると、どこかの桁の排他的論理和が必ず変わるので、どのように石を取ってもニム和が変化する。そのため、必勝形からどのように石を取っても「必勝形ではない形」になる。

□