

# ピザ

Takenaga Koudai

2021年8月31日

# 1 ピザ

さて、皆さんはピザは好きでしょうか？ピザについて的小ネタを含めて紹介していく。

## 1.1 小ネタ

ピザを英語で書くと "pizza" となる。さて、ピザの体積を求めていく。  
半径を  $z$  , 高さを  $a$  , 円周率を  $\pi$  ( $pi$ ) とすると、体積  $V$  は、

$$V = pi \times z \times z \times a (= pizza)$$

となる。つまり、"pizza" の体積は  $pizza$  である。

## 1.2 ピザの定理

ピザを切り分けることを考えましょう。まずは2人で等分しようと思います。皆さんならどのように切るだろうか。以下で、等分する方法の一つを紹介する。

ピザの定理 (Upton, 1968)

$\rho$ : 円盤内部の任意の点,  $n \geq 8$ :  $n$  は 4 の倍数.

以下の手順でピザを切っていく。

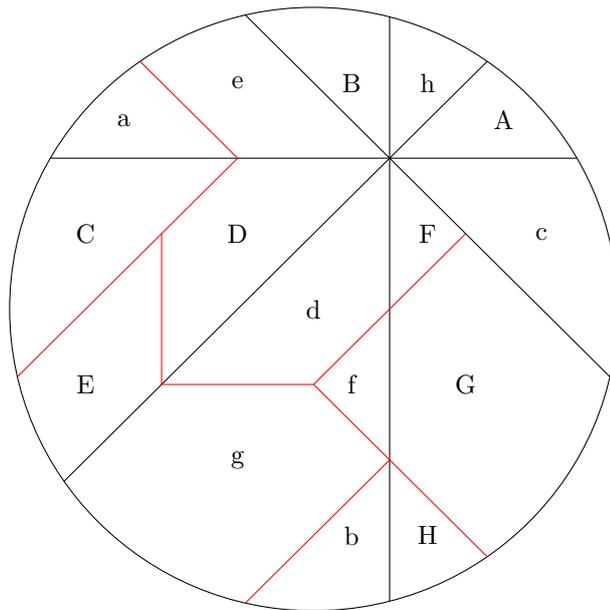
1.  $\rho$  を通る任意の直線で切る.
2. 直線を  $\rho$  を中心に,  $\frac{2\pi}{n}$  ラジアン回転し, その線で切る.
3. 2 を  $\frac{n}{2} - 1$  回繰り返す.

結果,  $\frac{n}{2}$  本の直線で円盤を  $n$  個の部分に切り分けた.

時計回り (半時計回り) に交互に取ることで, ピザの面積は等しくなる.

### <証明>

ここでは、絵による直感的な証明を行う。それに際し、 $n = 8$  の場合について具体的に考えることにする。



大文字と小文字の対応しているアルファベットが同じ面積であるから交互に取ることで同じ面積にピザを分けることができる。

□

### 1.3 ピザの定理関連事項

ピザの定理に関連して、以下のことも示されている。

定理

ピザが公平に二分される時は、耳の部分も公平に二分される。(Mabry Deiermann, 2009)

定理

トッピングが切り分けの中心を含む円盤上に分布していれば、トッピングも公平な分割となる。(Hirschhorn et al, 1999)

これらのことにより、耳の多さやトッピングの偏りで喧嘩になることもないので安心できる。

また、関連定理として、以下も紹介する。

定理

$n$  枚に切り分けられたピザは  $\frac{n}{4}$  人で分け合える。

つまり、ピザの定理は拡張ができるということです。ただし、もし 5 人で分けようと思えば 20 分割しなければならず、めんどくさそう…

ハムサンドイッチの定理 (簡易的な理解 ver)

生地、トマト、チーズを全て同体積に二分割するような平面による切断が存在する。

つまり、サンドイッチは 1 回のナイフで内容物まで均等に切ることができるということ。

これを数学的に書くと次のようになる。

ハムサンドイッチの定理

$n$  次元空間内に与えられた  $n$  個の可測な物体に対し、それぞれの量を一度に等分することができるような  $(n - 1)$  次元超平面が存在する。

## 参考文献

- [1] Larry Carter, Stan Wagon, Proof without Words: Fair Allocation of a Pizza, Mathematics Magazine, Oct., 1994, Vol.67, No.4 (Oct., 1994), p.267