文・理 共通 (5題)

(1).(2).(3) 各10点

1

(1) $S = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + \cdots + 20\cdot 22$

$= \sum_{k=1}^{20} k(k+2)$ 5

$= \sum_{k=1}^{20} (k^2 + 2k)$

$= \frac{1}{6}\cdot 20\cdot(20+1)(40+1) + \cancel{2}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}\cdot 20\cdot(20+1).$

$= 20\cdot 21\cdot\left(\frac{41}{6}+1\right).$

$= \frac{1}{\cancel{6}}\cdot \overset{10}{\cancel{20}}\cdot\underset{7}{\cancel{21}}\cdot(41+6)$

$= 10\cdot 7\cdot 47$

$= 3290$ // 5

(2) $S = 1\cdot 1 + 3\cdot 3 + 5\cdot 3^2 + \cdots + (2n-1)\cdot 3^{n-1}$

$-)\ 3S = \quad 1\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \cdots + (2n-3)\cdot 3^{n-1} + (2n-1)3^n.$ 5

$-2S = 1\cdot 1 + 2(\underbrace{3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}}_{\frac{1}{2}(3^n-3)}) - (2n-1)\cdot 3^n$ 2

$\therefore -2S = 1 + (3^n - 3) - (2n-1)\cdot 3^n$

$= -2 + 2\cdot 3^n - 2n\cdot 3^n$

$\therefore S = n\cdot 3^n - 3^n + 1.$

$= (n-1)\cdot 3^n + 1$ // 3

(3) $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \times \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}$

$= \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.$ 有理化 5

$\therefore \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$= \sqrt{2} - 1$

$+ (\sqrt{3} - \sqrt{2})$

$+ (\sqrt{4} - \sqrt{3})$

$+ \ \vdots$

$+ (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

$= \sqrt{n+1} - 1$ // 5

(文) 7ufu.

2 各10.

(1) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$ — (*1)

<証明>.

(i) $n=1$のとき

$(左辺)=\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2}$

$(右辺)=2-\frac{1+2}{2^1}=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ でOK $n=1$. 3.

(ii) $n=k$のとき (*1)が成立と仮定.

i.e. $\frac{1}{2}+\cdots+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k}$ と仮定. 3 仮定

さて, $n=k+1$のとき

$(左辺)=\underbrace{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{k}{2^k}}+\frac{k+1}{2^{k+1}}$

$=2-\frac{k+2}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}$ ($\because$仮定)

$=2-\frac{2(k+2)}{2^{k+1}}+\frac{k+1}{2^{k+1}}$

$=2-\frac{k+3}{2^{k+1}}$

$=2-\frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}$ 3 であり, $n=k+1$でも成立.

(i).(ii)より すべての自然数nで (*1)は成立 1 □

(2) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$ — (*)

<証明>.

(i) $n=2$のとき.

$(左辺)=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$

$(右辺)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\frac{5}{4}<\frac{3}{2}$ より OK 3 $n=1$

(ii) $n=k$のとき (*)が成立を仮定.

i.e. $1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$ と仮定 3

さて $n=k+1$のとき.

$(左辺)=\underbrace{1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}}+\frac{1}{(k+1)^2}$

$<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$ 2

$=2-\frac{(k+1)^2}{k(k+1)^2}+\frac{1}{k(k+1)^2}$

$=2-\frac{\cancel{k}^2+2\cancel{k}}{\cancel{k}(k+1)^2}$

$=2-\frac{k+2}{(k+1)^2}$

$=2-\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k+2}{k+1}$

$<2-\frac{1}{k+1}$ ($\because \frac{k+2}{k+1}>1$) 1

よって $n=k+1$でも成立.

(i).(ii)より 2以上のすべての自然数で (*)は成立 □

(文). ちんてん. (理④と共通).

文 25点
理 20点

3

①　　②　　　　③　　　　　　　　⑪

1, 2 | 3, 4, 5, 6 | 7, … | … |

2コ　4コ　6コ　　　　　2nコ

(1)

$n-1$群までのコ数は,

$2+4+\cdots+2(n-1)$

$=\frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot 2n = n(n-1)$ コ.

∴ n群の初項は

n^2-n+1 項目.

さて, a_n の一般項は $a_n=n$ より,

n^2-n+1 項目は,

n^2-n+1. // 5

(2) n群には, $2n$コの数がある.

初項 n^2-n+1. 3

末項 $n^2-n+1+(2n-1)$.

$=n^2+n$ 3

∴ 和 $=\frac{1}{2}\cdot 2n\cdot\left((n^2-n+1)+(n^2+n)\right)$

$=n(2n^2+1)$ // 4

(3). n群目の初項は n^2-n+1 より.

9群目の初項 $81-9+1=73$.

10 〃 $100-10+1=91$. 3

よって 10群目は

| 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, …

　1　2　3　4　5　6　7　8　9　10　4

上の列から, 100は

第10群の 10項目 // 3.

(文) ちんた.

(1), (3) 10点
(2) 5点

4

(1). $a_n = a + (n-1)d$.
$b_n = b \cdot r^{n-1}$ とおく.

条件より

$$\begin{cases} a + (a+2d) = 12 \\ a + 4d = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2d = 12 \\ a + 4d = 15 \end{cases}$$

$\therefore a = 3.\ d = 3$

$\therefore a_n = 3n$ // 5

また,

$$\begin{cases} br = 2. \\ br^3 = 8. \end{cases} \qquad \therefore r = 2.\ b = 1.$$

$\therefore b_n = 2^{n-1}$ // 5

(2) 数列 a_n は 3の倍数 であり.
b_n は 2のべき乗 であり.
数列 b_n が 3の倍数にはなり得ない
$\therefore$ 共通項はない // 4

理由 + Ans 5.
(理由なし −3)

(3)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	3	6	9	12	15				
b_n	1	2	4	8	16	32	64	128	256

さて,
$a_{10} = 30$
$a_{20} = 60$
$a_{30} = 90$
$a_{40} = 120$

$\therefore$
$a_1 \sim a_{40} \cdots 3 \sim 120$ であり. b_8 より小さい

$a_{41} = 123$
$a_{42} = 126$. 表2

よって 小さい順に並べてできる 50コの列は,
a_1 から a_{42} までと b_1 から b_8 までを
あわせたもの. 4

$\therefore p = (a_1 + \cdots + a_{42}) + (b_1 + \cdots + b_8)$

$= \frac{1}{2} \cdot 42 \cdot (\overset{3}{\cancel{4}} + 126) + (256 - 1)$

$= 21 \cdot \overset{129}{\cancel{127}} + 255$

$= \overset{2709}{\cancel{2667}} + 255$

$= \overset{2964}{\cancel{2922}}$ // 4

理 5ぺん

$a_1 = 1$

3 $a_{n+1} = a_n^2 - n^2 \cdot a_n + (n+1)^2$

(1)

$a_2 = 1^2 - 1^2 \cdot 1 + (1+1)^2 = 4$ 2

$a_3 = 4^2 - 2^2 \cdot 4 + (2+1)^2 = 9$ 2

$a_4 = 9^2 - 3^2 \cdot 9 + (3+1)^2 = 16.$ 2

$a_5 = 16^2 - 4^2 \cdot 16 + (4+1)^2 = 25$ 2

(2) 予想.

$a_n = n^2$ 5

(3) 〈証明〉.

$a_n = n^2$ が成立することを示す。

(i) $n=1$ のとき

$n^2 = 1^2$ で ok　$n=1$　2

(ii) $n=k$ のとき成立と仮定

i.e. $a_k = k^2$ と仮定　仮定 2

このとき.

$a_{k+1} = a_k^2 - k^2 \cdot a_k + (k+1)^2$

$= (k^2)^2 - k^2 \cdot k^2 + (k+1)^2$　合計 3

$= (k+1)^2$　導 3

となり. $n=k+1$ でも成立.

以上より.

すべての自然数 n で $a_n = n^2$ は成立　四 2

$a_2 = a_1^2 - 1^2 \cdot a_1 + (1+1)^2$

$= 4 - 2 + 4 = 6.$ 5　$2 \cdot 3$

$a_3 = 6^2 - 2^2 \cdot 6 + (2+1)^2$

$= 36 - \cancel{12}\ 24 + 9 = 21.$ 5　$3 \cdot 7$

$a_4 = 21^2 - 3^2 \cdot 21 + (3+1)^2.$

$= 21 \times \cancel{18}\ 12 + 4^2$

~~$= 378 + 16 = 394$~~

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times\ 18 \\ \hline 168 \\ 21 \\ \hline 378 \end{array}$$

$= 21 \cdot 3 \cdot 4 + 4^2$

$= 4 \cdot 67 = 268$ 5　$4 \cdot 67$

$a_5 = (4 \cdot 67)^2 - 4^2 \cdot 4 \cdot 67 + 5^2$

~~$= 4^2 \cdot 67^2 - 4^2 \cdot 4 \cdot 67 + 5^2$~~

~~$= 4^2 (67 \cdot 63 + 5^2$~~

$268^2 - \underset{16}{4^2} \cdot 268 + 5^2$

$268 \times 252 + 5^2$

全員 +10

作問ミス。スミマセン。

理 6これ．

4

(1) 1回の試行で 3の倍数… $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore P_1=\frac{1}{3}$ // 1

P_2について．

2回の試行で 1回奇数．

$\therefore P_2={}_2C_1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$ // 2

P_3について．

2回目		3回目
3の倍数/偶数回 $\frac{5}{9}$	$\xrightarrow{\frac{1}{3}}$	P_3．
3の倍数奇数回 $\frac{4}{9}$	$\xrightarrow{\frac{2}{3}}$	

$P_3=\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}$

$=\frac{13}{27}$ // 2

(2)

n−1回目		n回目
偶数回．$(1-P_{n-1})$	$\xrightarrow{\frac{1}{3}}$	P_n．
奇数回 P_{n-1}	$\xrightarrow{\frac{2}{3}}$	

推移 5

上の表より．

$P_n=\frac{1}{3}(1-P_{n-1})+\frac{2}{3}P_{n-1}$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}P_{n-1}$ // 5

(3) 漸化式

$P_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}P_{n-1}\quad P_1=\frac{1}{3}$ を解く．

$P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(P_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$ より． 2

数列$\{P_n-\frac{1}{2}\}$は．

初項 $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{6}$

公比 $\frac{1}{3}$ 2

$\therefore P_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

$\therefore P_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$ // 3

(4)

$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$=\frac{1}{2}$ // 3