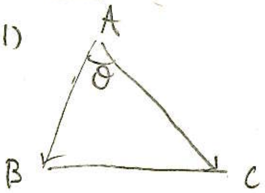
(1) 10点

(2) 15点

$\boxed{1}$

(1)



$\theta = \angle BAC$ とおく.

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\sin\theta$$

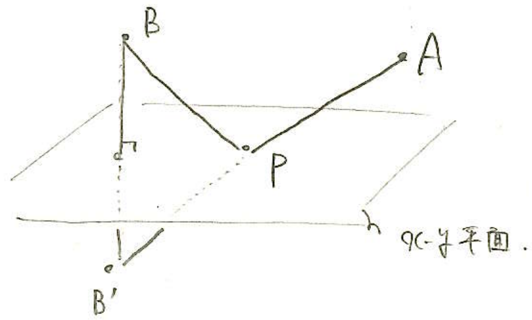
$$= \frac{1}{2}|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cdot\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{AB}|^2\cdot|\vec{AC}|^2-(|\vec{AB}||\vec{AC}|\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{AB}|^2\cdot|\vec{AC}|^2-(\vec{AB}\cdot\vec{AC})^2}$$

■

(2)



2点A,Bはともに x-y平面上の $z>0$ 側にある。

B′を x-y平面に対して Bと対称な点とする。

AP+PBの最小値は 3点 A,P,B′が同一直線上にあるとき。 説明 ⑤

B′(8,5,−6) であり, P(x,y,0)とおくと. 対称点 ②

$$\vec{AP} = k\vec{AB'} \quad (k\in\mathbb{R})$$

が成立.

$$\vec{AB'} = \begin{pmatrix}8\\5\\-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\3\\-9\end{pmatrix}$$

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix}x+1\\y-2\\-3\end{pmatrix}$$ より

$$\begin{cases}x+1 = 9k\\ y-2 = 3k\\ -3 = -9k\end{cases}$$

$k=\frac{1}{3}$.
$x=2,\ y=3$.

∴ P(2,3,0) Pの座標 ④

また,最小値は $AB' = 3\sqrt{9+1+9}$
$= 3\sqrt{19}$ min ④

(1) 7
(2) 13
(3) 5

$\boxed{2}$

(1). $\boxed{1}$より

$$\triangle BCD = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{CB}|^2|\vec{CD}|^2 - (\vec{CB}\cdot\vec{CD})^2}$$

ここで

$$\vec{CB} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$$ ②

$$\vec{CD} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$$ ②

$|\vec{CB}|^2 = 4+4=8$, $|\vec{CD}|^2 = 1+1+16=18$

$\vec{CB}\cdot\vec{CD} = -2+2+0 = 0$ ①

$$\therefore \triangle BCD = \frac{1}{2}\sqrt{8\cdot 18 - 0}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 = \underline{6}$$ // ②

(2) 直線AB⊥平面BCD を示す

⇔ $\vec{AB}\perp\vec{CB}$ かつ $\vec{AB}\perp\vec{CD}$ を示す

⇔ $\vec{AB}\cdot\vec{CB}=0$ かつ $\vec{AB}\cdot\vec{CD}=0$ を示す. ③説明

ここで $\vec{AB} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$ より

$$\vec{AB}\cdot\vec{CB} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = -4+4=0$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{CD} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} = 2+2-4=0$$

⑦式で示す.

よって

$\vec{AB}\cdot\vec{CB}=0$ かつ $\vec{AB}\cdot\vec{CD}=0$ が成立するので

直線AB⊥平面BCD 四 ③まとめ.

(3).

$$V = \triangle BCD \times AB \times \frac{1}{3}$$

ここで $\vec{AB} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$ より

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\therefore V = 6\times 3\times\frac{1}{3} = \underline{6}$$ // 5

(1) 10
(2) 15

3

(1) $(\vec{a}+2\vec{b}) \perp (\vec{a}-2\vec{b})$ なので

$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=0$ ②

$\Leftrightarrow |\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2=0$

$\therefore |\vec{a}|=2|\vec{b}|$ ③

また、

$|\vec{a}+2\vec{b}|=2|\vec{b}|$

$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=4|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=4|\vec{b}|^2$ ②

$4\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|^2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{4}|\vec{a}|\cdot 2|\vec{b}|$

$=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

内積の定義より

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ ②

$\underline{\theta=\frac{2}{3}\pi}$ ①

(2)

$\left|t\vec{a}+\frac{1}{t}\vec{b}\right|^2$ 2乗を考える ①

$=t^2|\vec{a}|^2+2t\cdot\frac{1}{t}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{t^2}|\vec{b}|^2$

$=t^2+2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{4}$ ④

$\left(\because \vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{4},\ |\vec{b}|=\frac{1}{2}\right)$

$=t^2+\frac{1}{4t^2}-\frac{1}{2}$

$t^2>0,\ \frac{1}{4t^2}>0$ より 相加相乗平均

必 なしは △2

$t^2+\frac{1}{4t^2}\geq 2\sqrt{t^2\cdot\frac{1}{4t^2}}$

$=1$ ③

等号成立は

$t^2=\frac{1}{4t^2}$

$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ② $(\because t>0)$

$\therefore \left|t\vec{a}+\frac{1}{t}\vec{b}\right|^2$ は $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ で min $\frac{1}{2}$

i.e. $\left|t\vec{a}+\frac{1}{t}\vec{b}\right|$ は

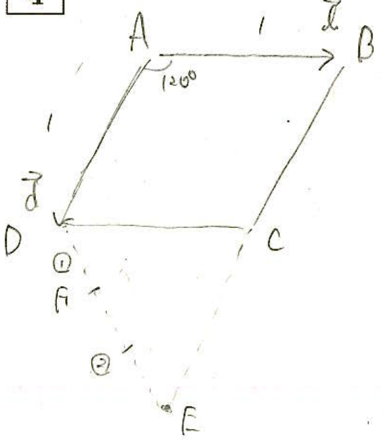
$\underline{t=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ で min } \frac{1}{\sqrt{2}}}$ ⑤

(1) 5

(2) 10

(3) 10

4



(1) 内積の定義より

$\vec{b}\cdot\vec{d} = |\vec{b}|\cdot|\vec{d}|\cdot\cos 120°$

$= 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ 2

$\vec{AE} = \vec{AB} + 2\vec{BC}$

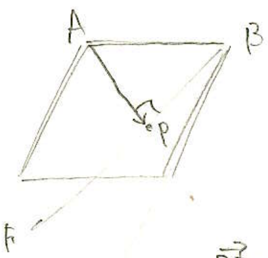
$= \vec{b} + 2\vec{d}$ 3

(2) $\vec{AF} = \vec{AD} + \vec{DF}$

$= \vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

$= \vec{d} + \frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d})$

$= \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{4}{3}\vec{d}$ 3



$\vec{BF} = \vec{AF} - \vec{AB}$

$= -\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{4}{3}\vec{d}$ 1.

$\vec{BP} = t\vec{BF}$ とすると

$\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP}$

$= \vec{AB} + t\vec{BF}$

$= \vec{b} + t\left(-\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{4}{3}\vec{d}\right)$

$= \left(1-\frac{2}{3}t\right)\vec{b} + \frac{4}{3}t\vec{d}$ 1

$\vec{AP}\perp\vec{BF} \iff \vec{AP}\cdot\vec{BF} = 0$ 1

$\iff \left(\left(1-\frac{2}{3}t\right)\vec{b} + \frac{4}{3}t\vec{d}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{4}{3}\vec{d}\right) = 0$

$\iff -\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}t\right)|\vec{b}|^2 + \frac{16}{9}t|\vec{d}|^2 + \frac{4}{3}\left(1-\frac{2}{3}t\right)\vec{b}\cdot\vec{d} - \frac{8}{9}t\vec{b}\cdot\vec{d} = 0$

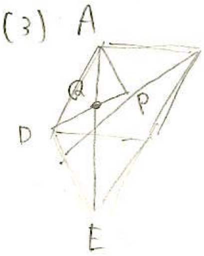
$\iff -\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}t\right) + \frac{16}{9}t - \frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}t\right) + \frac{4}{9}t = 0$

$\iff -2(3-2t) + 16t - 2(3-2t) + 4t = 0$

$\iff 28t - 12 = 0$

$t = \frac{3}{7}$ 4.

(3)



3点 A, Q, E は同一直線上より

$\vec{AQ} = k\vec{AE}$ 条件 1 $(k\in\mathbb{R})$. —①

同様に 3点 D, Q, P で

$\vec{DQ} = l\vec{DP}$ $(l\in\mathbb{R})$ 条件 1

① より

$\vec{AQ} = k(\vec{b}+2\vec{d})$

$= k\vec{b} + 2k\vec{d}$ 2

② より

$\vec{DQ} = l\vec{DP}$

$\vec{AQ} - \vec{AD} = l\vec{AP} - l\vec{AD}$

$\vec{AQ} = l\vec{AP} + (1-l)\vec{AD}$

$= l\left(\frac{5}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}\vec{d}\right) + (1-l)\vec{d}$

$= \frac{5}{7}l\vec{b} + \left(1-\frac{3}{7}l\right)\vec{d}$ 2

$\vec{b}$, $\vec{d}$ は互いに一次独立なので 7ないは △3

$$\begin{cases} k = \frac{5}{7}l \\ 2k = 1 - \frac{3}{7}l \end{cases}$$

解いて $k = \frac{5}{13}$ 1, $l = \frac{7}{13}$ 1

$\therefore \vec{AQ} = \frac{5}{13}\vec{b} + \frac{10}{13}\vec{d}$ 2