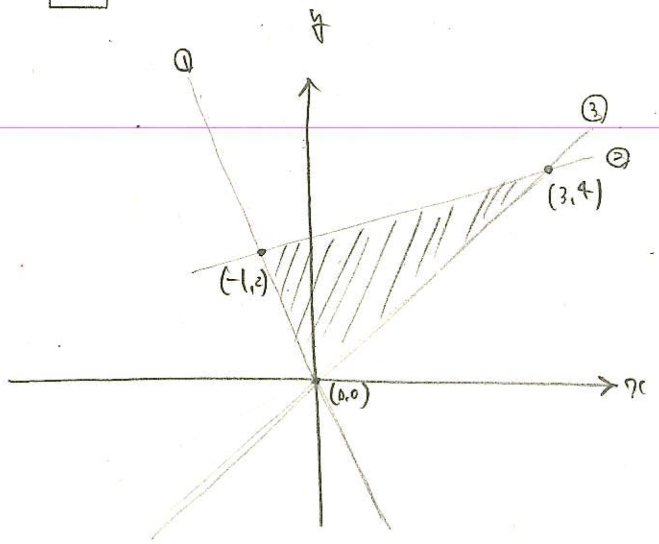
Legend 191

$\boxed{1}$



3つの不等式をみたす領域について、端点は、

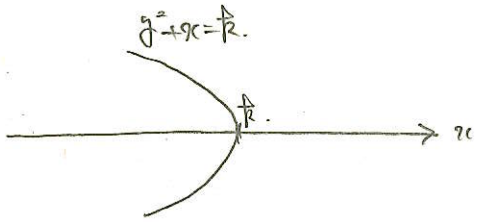
$2x+y=0$ —①
$x-2y+5=0$ —②
$4x-3y=0$ —③

①,②より $(-1,2)$.
①,③より $(0,0)$
②,③より $(3,4)$ であり、
境界線を含む図の斜線部.

5

$y^2+x=k$ とおくと、

y^2+x の最大値 $=$ kの最大値.
y^2+x の最小値 $=$ kの最小値.



kの値は、上図の放物線の x軸切片.

5

点$(3,4)$を通るときkは最大値をとり、

$$k_{max} = 4^2+3 = 19.$$

5

$y^2+x=k$ と $2x+y=0$ が接するとき

$$4x^2+x=k.$$
$$\left(2x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}=k.$$

$k=-\frac{1}{16}$ で接する.

このとき接点は $\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$.

不等式内に存在.

∴点$\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$のとき$k$は最小値をとり、

$$k_{min} = -\frac{1}{16}$$

5

Legend 10-3

2

$x=3\cos\theta$, $y=\sin\theta$ とおく。 5 アイデア

$\sqrt{3}x^2+\frac{2}{3}xy+7\sqrt{3}y^2$

$=9\sqrt{3}\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+7\sqrt{3}\sin^2\theta$

$=2\sqrt{3}\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+7\sqrt{3}$.

$=\sqrt{3}(\cos 2\theta+1)+\sin 2\theta+7\sqrt{3}$

$=\sin 2\theta+\sqrt{3}\cos 2\theta+8\sqrt{3}$. 5

$=2\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta\right)+8\sqrt{3}$

$=2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)+8\sqrt{3}$ 5

よって.

$-1\le\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$.

$-2\le 2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)\le 2$

$8\sqrt{3}-2\le 2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)+8\sqrt{3}\le 2+8\sqrt{3}$ 5

最大値は $8\sqrt{3}+2$

最小値は $8\sqrt{3}-2$.

また. $\theta=\frac{\pi}{12}$ のとき $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$

$\theta=-\frac{5\pi}{12}$ のとき $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-1$

$\therefore$ $x=3\cos\frac{\pi}{12}$, $y=\sin\frac{\pi}{12}$ で

Max $2+8\sqrt{3}$. 5

$x=3\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$, $y=\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ で

Min $8\sqrt{3}-2$. 5

Legend III

3

$y = ax + b$ の逆関数は、

$y = \frac{1}{a}(x - b)$ で表せる。 5

これが、もとの関数と一致するのは、

$f(x) = ax + b$ としたとき、

$f(f(x)) = x$ となる。 立式 5

$a(ax+b) + b = x$

$a^2x + (a+1)b = x$

恒等式なので、係数を比較して

$a^2 = 1$

$(a+1)b = 0$

$a = \pm 1$

$a = 1$ のとき、$b = 0$ 5

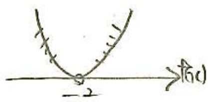
$a = -1$ のとき b はすべての実数 5

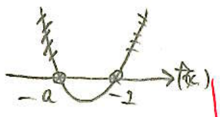
Legend 13

$\boxed{4}$

$$f(f(x)) = (f(x)+a)(f(x)+2) > 0.$$

$a \geq 2$より 以下の2つの状況が考えられる





5 状況[illegible]

(i) $a=2$のとき.

$$f(f(x)) = (f(x)+2)^2$$

$$= \left((x+2)^2+2\right)^2 > 0.$$

$$\left(\because\ (x+2)^2 \geq 0 \text{より} \quad (x+2)^2+2 \geq 2.\right)$$

が, すべての実数xで成立. 5 $a=2$

(ii) $a>2$のとき.

$$\underset{①}{f(x) < -a}, \quad \underset{②}{-2 < f(x)}.$$

①について

$$(x+a)(x+2) < -a.$$

$$x^2+(2+a)x+3a < 0.$$

これがすべての実数xで成立しない.

($\because$ 下に凸). 5

②について.

$$-2 < (x+a)(x+2)$$

$$x^2+(2+a)x+2a+2 > 0.$$

$$\left(x+\frac{2+a}{2}\right)^2 + \underbrace{2a+2-\left(\frac{2+a}{2}\right)^2}_{\sim} > 0$$

$\sim > 0$をみたせばよい. 5

(判別式でもOK)

$$2a+2-\left(\frac{2+a}{2}\right)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 8a+8-(2+a)^2 > 0$$

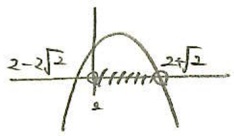
$$\Leftrightarrow -a^2+4a+4 > 0$$

ここで,

$-a^2+4a+4=0$ とすると

$$a = -\left(-2 \pm \sqrt{4+4}\right)$$

$$= 2 \pm 2\sqrt{2}.$$



$2 < a$より.

$$2 < a < 2+2\sqrt{2}$$ 5

(i)(ii)より

$$2 \leq a < 2+2\sqrt{2}$$ 5