1 　35点

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

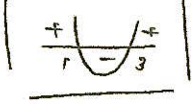
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$= 3(x^2 - 4x + 3)$

$= 3(x-1)(x-3)$

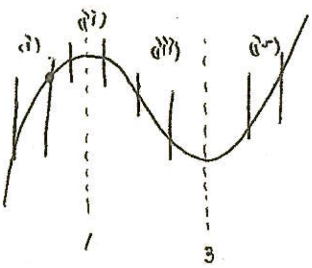
$f'(x) = 0$ となるのは $x = 1, 3$　3

f'の符号



x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗	3	↘	-1	↗

3



3

(iii)と(iv)の境界について.

$f(t) = f(t+1)$ なる t について考える。　3

$f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 1.$

$f(t+1) = (t+1)^3 - 6(t+1)^2 + 9(t+1) - 1.$

$f(t) = f(t+1)$

$\Leftrightarrow\ 0 = (3t^2 + 3t + 1) - 6(2t+1) + 9$

$\Leftrightarrow\ 3t^2 - 9t + 4 = 0$

$t = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-48}}{6}$

$= \dfrac{9 \pm \sqrt{33}}{6}$

題意より t は $2 \leq t$.

$\therefore\ t = \dfrac{9+\sqrt{33}}{6}$　3

(5×4)

(i) $t+1 < 1$ i.e. $t < 0$ のとき.

$x = t+1$ で Max.

$M(t) = f(t+1)$

$= (t+1)^3 - 6(t+1)^2 + 9(t+1) - 1.$

$= t^3 + 3t^2 + 3t + 1$
$\quad - 6t^2 - 12t - 6$
$\quad + 9t + 9 - 1$

$= t^3 - 3t^2 + 3.$　3

(ii) $t < 1 < t+1$ i.e. $0 < t < 1$ のとき.

$x = 1$ で Max.

$M(t) = f(1)$

$= 3.$　3

(iii) $1 < t$ かつ $t < \dfrac{9+\sqrt{33}}{6}$ のとき

i.e. $1 < t < \dfrac{9+\sqrt{33}}{6}$ のとき

$x = t$ で Max.

$M(t) = f(t)$

$= t^3 - 6t^2 + 9t - 1.$　3

(iv) $\dfrac{9+\sqrt{33}}{6} < t$ のとき

$x = t+1$ で Max.

$M(t) = f(t+1)$

$= t^3 - 3t^2 + 3.$　3

よって

$$M(t) = \begin{cases} t^3 - 3t^2 + 3 & \left(t < 0,\ \dfrac{9+\sqrt{33}}{6} < t\right) \\ 3 & (0 \leq t \leq 1) \\ t^3 - 6t^2 + 9t - 1 & \left(1 < t \leq \dfrac{9+\sqrt{33}}{6}\right) \end{cases}$$

2 3点

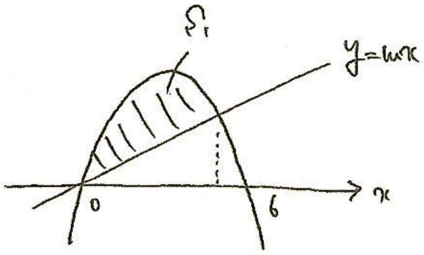


図 5

まず、x軸と $y=-x(x-6)$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_0^6 -x(x-6)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 6^3 = 36.$$ S 5

題意をみたすには、上図の斜線部の面積 S_1 が

$S_1=18$ をみたす。 —(※) 題意 5

$y=-x(x-6)$ と $y=mx$ の共有点のx座標は、

$$-x(x-6)=mx$$

$$x(x-6)+mx=0$$

$$x\left(x-(6-m)\right)=0.$$

$$x=0,\ 6-m.$$ 共有点 5

$$\therefore\ S_1=\int_0^{6-m}\{-x(x-6)-mx\}\,dx$$ 式 5

$$=\int_0^{6-m} -x\left(x-(6-m)\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}\cdot(6-m)^3$$ 計算 5

(※)より

$$\frac{1}{6}(6-m)^3=18$$

$$(6-m)^3=6\cdot 18$$

$$(6-m)^3=2^2\cdot 3^3$$

$$6-m=3\cdot\sqrt[3]{4}.$$

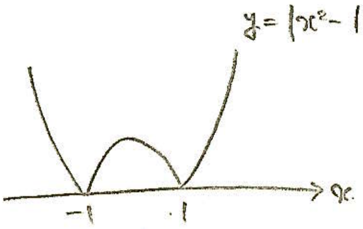
$$\therefore\ m=\underline{6-3\sqrt[3]{4}}$$ 5

・グラフ (フツウ/メニセキ剣補) 4, 4
・共有点 5
・立式(面積) 5
・S = 4
・最小値 (S'=0) そのときのS 4, 4

30点

3

$y=|x^2-1|$ のグラフは下図.

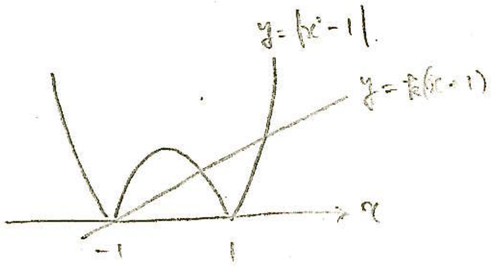


求める図形の面積は.

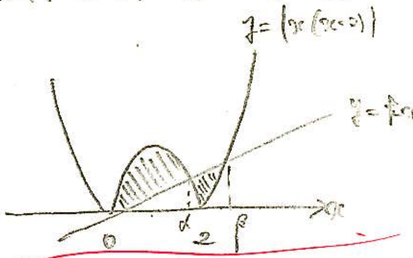
$y=|x^2-1|$ と $y=kx+k$

で囲まれた部分の面積と等しい。

(∵ x軸方向に1だけ平行移動しても不変)



x軸方向に1だけ動かしても同様.



共有点のx座標を図のように α, β とおく.

(i) α について.

$-x(x-2)=kx$

$x(x-2+k)=0$

$x=0,\ 2-k.$

$\therefore\ \alpha=2-k.$

(ii) β について

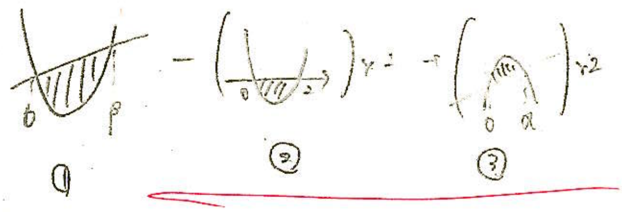
$x(x-2)=kx$

$x(x-2-k)=0$

$x=0,\ 2+k.$

$\therefore\ \beta=2+k.$

S =



$$①=\int_0^\beta \left(kx-x(x-2)\right)dx=\int_0^\beta -x(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}\beta^3$$

$$②=\int_0^2 -x(x-2)\,dx=\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{4}{3}$$

$$③=\int_0^\alpha \left(-x(x-2)-kx\right)dx=\int_0^\alpha -x(x-\alpha)\,dx=\frac{1}{6}\alpha^3$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{6}\beta^3-2\cdot\frac{4}{3}+2\cdot\frac{1}{6}\alpha^3=\frac{1}{6}(\beta^3+2\alpha^3)-\frac{8}{3}$$

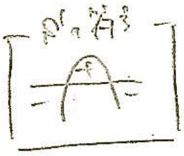
ここで $\alpha^3=8-12k+6k^2-k^3$

$\beta^3=8+12k+6k^2+k^3$

$$\therefore\ S=\frac{1}{6}(24-12k+18k^2-k^3)-\frac{8}{3}=-\frac{1}{6}k^3+3k^2-2k+\frac{4}{3}$$

$S'=-\frac{1}{2}k^2+6k-2=-\frac{1}{2}(k^2-12k+4)$ $k=6\pm4\sqrt{2}$ で $S'=0$.

S'の符号



k	0	…	$6-4\sqrt{2}$	…	2
S'		−	0	+	
S		↘		↗	

$k=6-4\sqrt{2}$ で Min.

このときの面積は…

$k=6-4\sqrt{2}$ のとき $k^2-12k+4=0$ より.

$$S=-\frac{1}{6}k(12k-4)+3(12k-4)-2k+\frac{4}{3}$$
$$=-2k^2+\frac{2}{3}k+36k-12-2k+\frac{4}{3}$$
$$=-2(12k-4)+\frac{2}{3}k+34k-\frac{32}{3}$$
$$=\frac{32}{3}k-\frac{8}{3}$$
$$=\frac{8}{3}(4k-1)$$
$$=\frac{8}{3}(24-16\sqrt{2}-1)$$
$$=\frac{8}{3}(23-16\sqrt{2})$$