1 この設問は，答えのみでよい．

(1) 13 3	(2) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$ 3	(3) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ 3
(4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{23}{12}\pi+i\sin\frac{23}{12}\pi\right)$ 3	(5) $\frac{1}{2}(1-3\sqrt{3})+\frac{1}{2}(3+\sqrt{3})i$ 3	(6) $-512-512\sqrt{3}i$ 3
(7) $z=1\pm i,\ -1\pm i$ 4	(8) 2点 $A(-7i)$，$B(2-i)$ を結ぶ線分の垂直二等分線 3	(9) 中心 点$(-2i)$ 半径 2の円 3
(10) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$ 4	(11) 90° 4	(12) 中心 点i 半径 1の円 4

以下，計算スペース (裏面も使用可)．採点の対象外．

(1) 15
(2) 15
(3) 10

$\boxed{2}$

(1) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3+4i}{1+3i} \times \frac{1-3i}{1-3i}$

$= \frac{1}{10}(3+12-5i)$

$= \frac{1}{2}(3-i)$

$\therefore\ \alpha = \beta \times \frac{1}{2}(3-i)$

$= \beta \times \frac{\sqrt{10}}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}}i\right)$ 5

OAとOBのなす角をαとすると

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ をみたす。

γは、lに関してBと対称なので、

$\gamma = \alpha \times \frac{2}{\sqrt{10}}\left(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}}i\right)$ 5

$= (3+4i)\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i\right)$

$= \frac{1}{5}(9+4+12i-3i)$

$= \frac{1}{5}(13+9i)$ 5

(2) <証明>

ド・モアブルの定理より

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$ 5

よって

$(\text{左辺}) = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3\cdot\cos\theta\cdot(i\sin\theta)^2 - i\sin^3\theta$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) + 3i(1-\sin^2\theta)\sin\theta - i\sin^3\theta$

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + i(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$ 5

実部・虚部を比較して

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

(証) 5

(3) $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

α, β≠0より 両辺をβ^2でわって

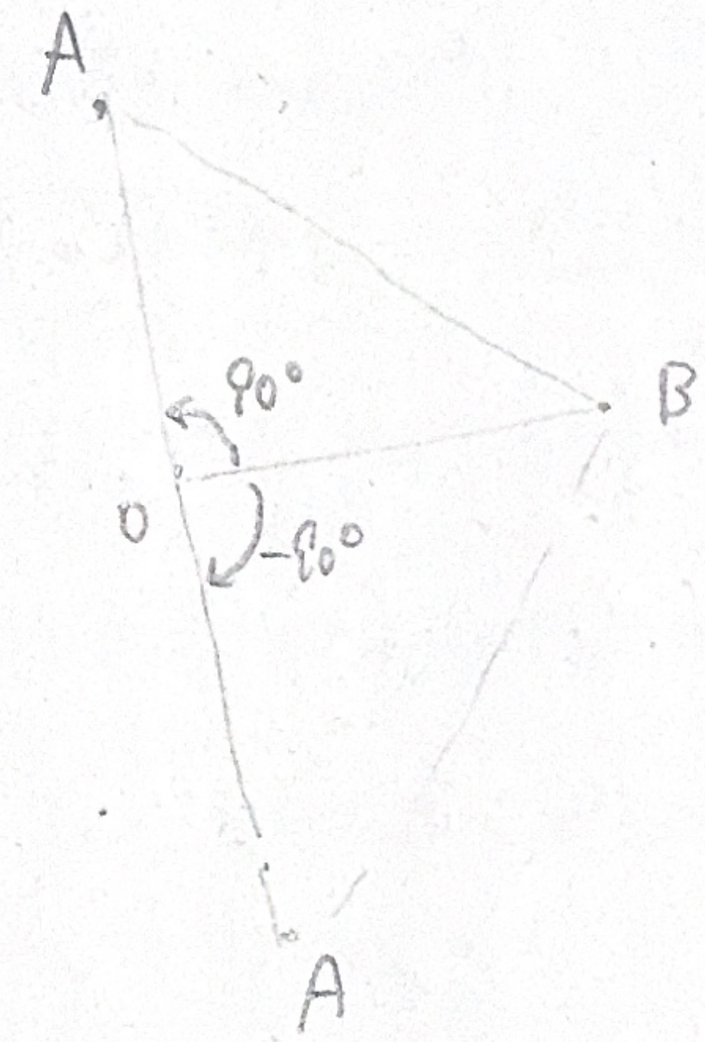
$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = -1$

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = -1$

$\therefore\ \frac{\alpha}{\beta} = \pm i$

$\alpha = \beta \times (\pm i)$ 5

よって点Bは、原点中心に、±90°回転させた点。



∴ △OABは、OA=OBの直角二等辺三角形。 5

(1) 10
(2) 5
(3) 5

3

(1) $w = \dfrac{1}{z - i}$ より

$z - i = \dfrac{1}{w}$

$z = \dfrac{1}{w} + i$ 1

$\bar{z} = \dfrac{1}{\bar{w}} - i$ 1

$z \cdot \bar{z} = 2$ より 2

$2 = \left(\dfrac{1}{w} + i\right) \cdot \left(\dfrac{1}{\bar{w}} - i\right)$

$2 w \cdot \bar{w} = (1 + i w) \cdot (1 - i \bar{w})$

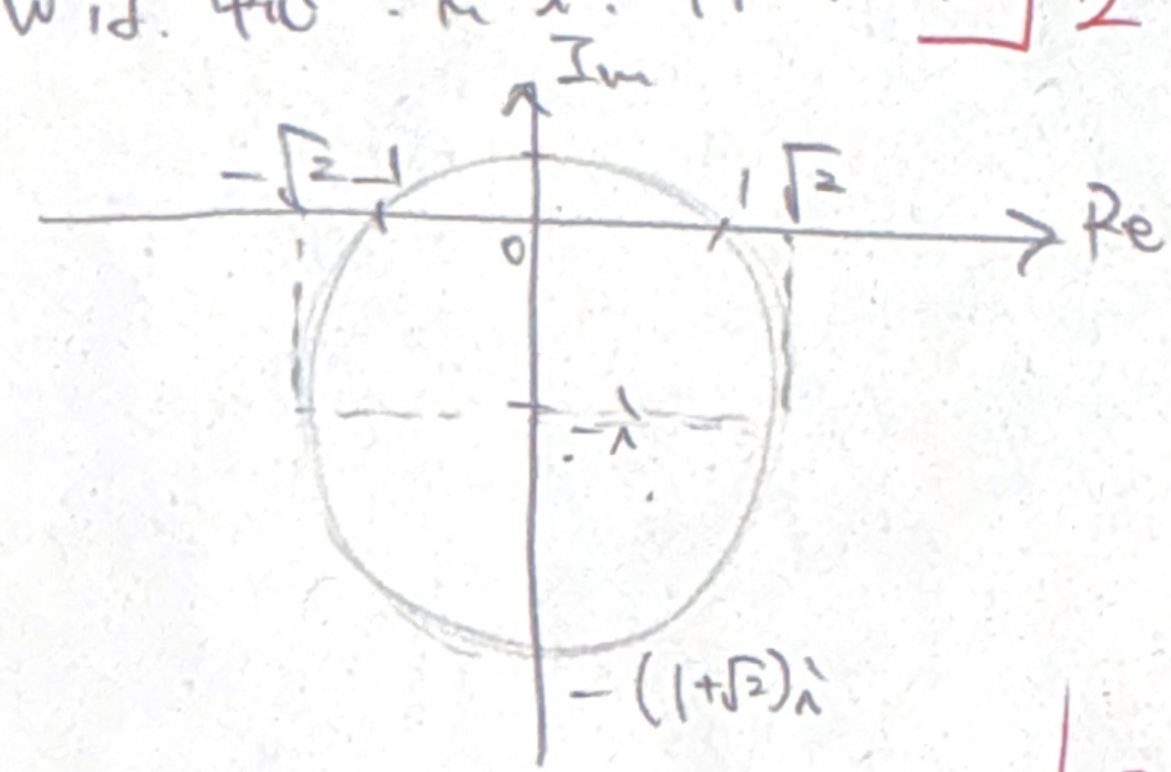
$= 1 + i w - i \bar{w} + w \cdot \bar{w}$

$w \cdot \bar{w} - i w + i \bar{w} = 1.$

$(w + i) \cdot (\bar{w} - i) = 2$

$\therefore |w + i| = \sqrt{2}$ 2

よって w は 中心：点 $-i$、半径 $\sqrt{2}$ の円 2



2

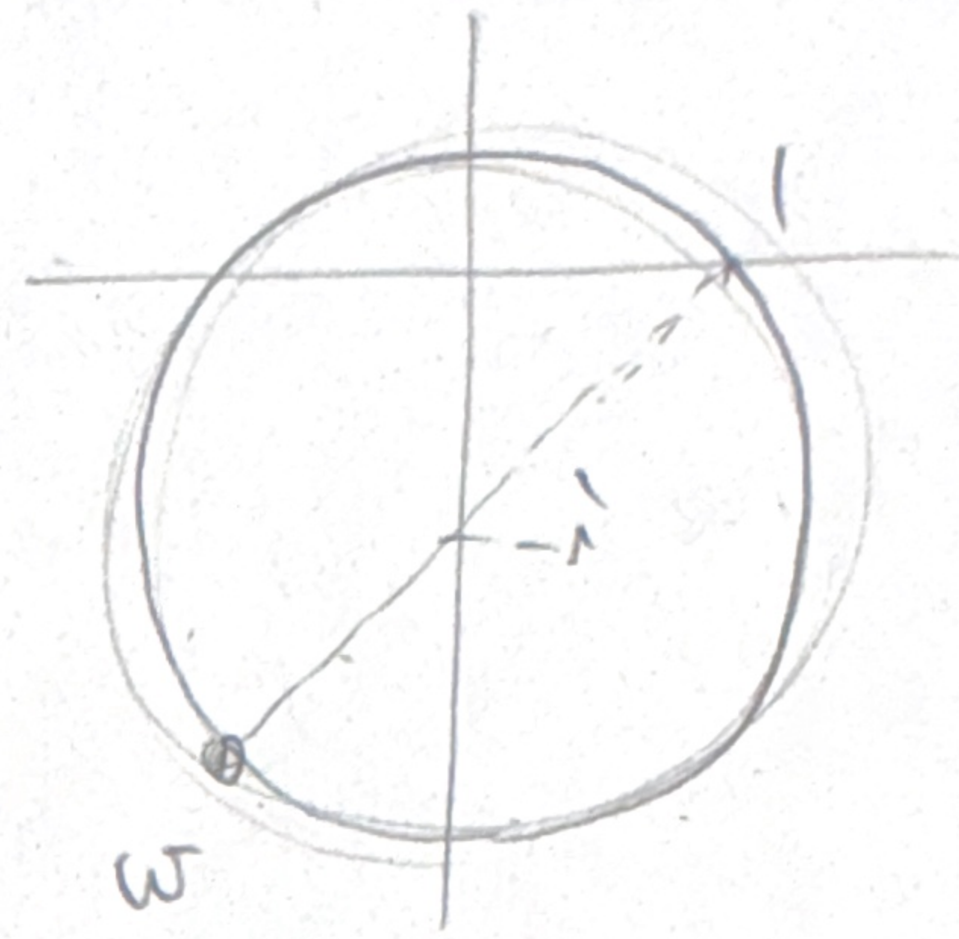
(2) $|w|$ の最大値は、上図より

$1 + \sqrt{2}$

このとき $w = -(1+\sqrt{2})i$ 5

（∵ $|w|$ は原点から w までのキョリを表す。）

(3) $|w - 1|$ は 点1から w までのキョリを表す。



2

図のように、w は 点1を $-i$ を中心に 180°回転した点 であるときに

$|w - 1|$ は max. 値は 2 2

$\therefore w - (-i) = (1 - (-i))(\cos 180° + i \sin 180°)$

$w = (1 + i) \cdot (-1) + (-i)$

$= -1 - i - i$

$= -1 - 2i$ 1