九大 平成の過去問 < 理系 ver>
H1(1989)→H31(2019)

Takenaga Koudai

2021 年 6 月 25 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ 区間 $[a, b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるとは,

$$a \leqq x \leqq b \text{ ならば, } a \leqq f(x) \leqq b$$

が成り立つこととする。$f(x) = 4x(1-x)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $[0, 1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変であることを示せ。

(2) $0 < a < b < 1$ とする。このとき，$[a, b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではないことを示せ。

(2006-5)

$\boxed{\textbf{2}}$ 0 でない 2 つの整式 $f(x),\ g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2) = (x^2+2)g(x) + 7,\ g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

(2019-2)

$\boxed{\textbf{3}}$ 実数 $a,\ b$ は $0 < a < b$ を満たすとする。次の 3 つの数の大小関係を求めよ。

$$\frac{a+2b}{3},\quad \sqrt{ab},\quad \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}$$

(1999-5)

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $x \geqq y \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x}{1+x} \geqq \dfrac{y}{1+y}$ がなりたつことを示せ。

(2) i. 不等式 $\dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|} + \dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$
がなりたつことを示せ。

ii. (i) の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か調べよ。

(1998-4)

$\boxed{\textbf{5}}$ 座標平面上の 4 点 $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(0,\ 1)$ からなる集合を L, 不等式 $ax+by-d \geqq 0$ を満たす実数 x, y を座標としてもつ点 $(x,\ y)$ からなる集合を D とする。すなはち,

$$\begin{aligned} L &= \{(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 1)\}, \\ D &= \{(x,\ y) | ax+by-d \geqq 0\} \end{aligned}$$

である。このとき, L と D の共通集合 $L \cap D$ について次の問いに答えよ。

(1) 実数 a, b, d をどのように選んでも, $L \cap D = \{(0,\ 0),\ (1,\ 1)\}$ にならないことを示せ。

(2) $L \cap D = \{(1,\ 1)\}$ ならば $\dfrac{d}{\sqrt{2}} \leqq \sqrt{a^2+b^2} < \sqrt{2}d$ であることを示せ。

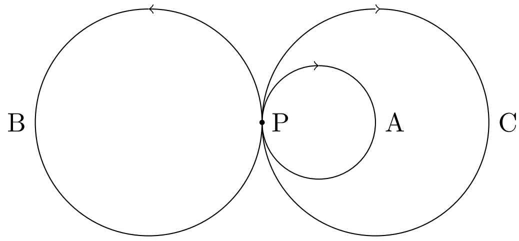
(1994-1)

6 ある公園に，同一地点 P を通る 1 周 1km のジョギングコース A と 1 周 2km のジョギングコース B, C がある。各コースはそれぞれ定められた方向のみに走るとして，P を出発点とし P をゴールとする $n$km のコースを考え，$n$km のコースの総数を f_n とする。

(1) 2 次方程式 $t^2-t-2=0$ の 2 つの解を α, β とし，$g_n=f_n-\alpha f_{n-1}$ とおくと，$n \geqq 2$ のとき $g_{n+1}=\beta g_n$ が成り立つことを示せ。

(2) f_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log f_n}{n}$ を求めよ。



(1989-5)

$\boxed{\textbf{7}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2) 自然数 a, b, c が $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすと仮定すると，a, b, c は全て 3 の倍数であることを証明せよ。

(3) $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ。

(2014-2)

8 座標平面上で，不等式

$$2|x-4|+|y-5| \leqq 3,\ 2||x|-4|+||y|-5| \leqq 3$$

が表す領域を，それぞれ A, B とする。

(1) 領域 A を図示せよ。

(2) 領域 B を図示せよ。

(3) 領域 B の点 (x, y) で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_x |y|$ が有理数となる点を，理由を示して全て求めよ。

(2003-2)

$\boxed{\mathbf{9}}$ 正の整数 a に対し，a の約数全体の和を $f(a)$ で表す。ただし，1 および a 自身も約数とする。例えば $f(1)=1$ であり，$a=15$ ならば 15 の約数は 1，3，5，15 なので，$f(15)=24$ となる。次の問いに答えよ。

(1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a=2^m b$ と表されるとする。このとき

$$f(a)=(2^{m+1}-1)f(b)$$

が成り立つことを示せ。

(2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a=pq$ と表されるとする。
このとき

$$f(a) \geqq (p+1)q$$

が成り立つことを示せ。また，等号成立は，$p=1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ。

(3) 正の偶数 a，b は，ある整数 m，n とある奇数 r，s を用いて $a=2^m r$，$b=2^n s$ のように表すことができる。このとき a，b が

$$\begin{cases} f(a)=2b \\ f(b)=2a \end{cases}$$

を満たせば，r，s は素数であり，かつ $r=2^{n+1}-1$，$s=2^{m+1}-1$ となることを示せ。

(2002-2)

$\boxed{\textbf{10}}$ $p,\ q$ を整数とし，$x,\ y$ を未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} 4x+9y=p \\ 2x+6y=q \end{cases}$$

を考える。

(1)　この方程式を行列を用いて表し，係数行列の逆行列を求めよ。

(2)　上の連立方程式の解，$x,\ y$ が共に整数であるような組 $(p,\ q)$ を全て求めよ。ただし

$$0 \leqq p \leqq 5,\quad 0 \leqq q \leqq 5$$

とする。

(3)　正の整数 d で，「d のどんな倍数 $p,\ q$ に対しても上の連立方程式の解 $x,\ y$ が整数になる」ものが存在することを示せ。

(4)　(3) における d のうちで最小のものを求めよ。

(2001-5)

$\boxed{\mathbf{11}}$ 係数が 0 か 1 である x の整式を，ここでは **M 多項式**とよぶことにする。整数を係数とする x の整式は，偶数の係数を 0 で置き換え，奇数の係数を 1 で置き換えると M 多項式になる。2 つの整式は，この置き換えによって等しくなるとき**合同**であるという。例えば，$5x^2+4x+3$ と x^2-1 とは対応する M 多項式が共に x^2+1 となるので合同である。

M 多項式は，2 つの 1 次以上の M 多項式の積と合同になるとき**可約**であるといい，可約でないとき**既約**であるという。例えば，x^2+1 は $(x+1)^2$ と合同であるから，可約である。

(1) x^2+x+1 は既約な M 多項式であることを示せ。

(2) 1 次から 3 次までの既約な M 多項式を全て求めよ。

(3) x^4+x+1 は既約な M 多項式かどうか判定せよ。

(2000-1)

$\boxed{\mathbf{12}}$ 複素数 $z = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$ と、それに共役な複素数 $\overline{z}$ に対し

$$\alpha = z + \overline{z}$$

とする。

(1) α は整数を係数とするある 3 次方程式の解となることを示せ。

(2) この 3 次方程式 3 個の実数解をもち，そのいずれも有理数ではないことを示せ。

(3) 有理数を係数とする 2 次方程式で，α を解とするものは存在しないことを背理法を用いて示せ。

(2000-4)

$\boxed{\mathbf{13}}$ 次の問いに答えよ。

（1） n が正の偶数のとき，$2^n - 1$ は 3 の倍数であることを示せ。

（2） n を自然数とする。$2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素であることを示せ。

（3） $p,\ q$ を異なる素数とする。$2^{p-1} - 1 = pq^2$ を満たす $p,\ q$ の組を全て求めよ。

(2015-5)

$\boxed{\mathbf{14}}$ 整数 $a,\ b$ は 3 の倍数ではないとし，$f(x)=2x^3+a^2x^2+2b^2x+1$ とおく。以下の問いに答えよ。

（1） $f(1)$ と $f(2)$ を 3 で割った余りをそれぞれ求めよ。

（2） $f(x)=0$ を満たす整数 x は存在しないことを示せ。

（3） $f(x)=0$ を満たす有理数 x が存在するような組 $(a,\ b)$ を全て求めよ。

(2018-4)

$\boxed{\textbf{15}}$ 3 桁の自然数 $N = 100a + 10b + c$ $(a,\ b,\ c$ は, $1 \leqq a \leqq 9,\ 0 \leqq b \leqq 9,\ 0 \leqq c \leqq 9$ を満たす整数$)$ を考える。

(1) 平方数かつ奇数である N で，二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と接するようなものを全て求めよ。

(2) 命題「N および a が平方数のとき二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは x 軸と接する。」
は正しいか。正しければそれを示し，正しくなければ反例をあげよ。

(3) ある N について，二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは座標が整数である相異なる 2 点で x 軸と交わり，グラフと x 軸とで囲まれる部分の面積が 4 となる。このときの N を求めよ。

(1998-9)

$\boxed{\textbf{16}}$ 次の命題 (1), (2), (3) について，真のときは証明を与え，偽のときは反例を与えよ。

（1） $x,\ y$ を実数とする。

$$|x| \leqq 1 \text{ かつ } |y| \leqq 1 \text{ ならば，} (x+y)^2 \leqq (xy+1)^2$$

である。

（2） $a,\ b,\ c$ を実数とする。

全ての実数 x について $ax^2+bx+c>0$ ならば，$b^2-4ac<0$ である。

（3） a を整数とする。

2 次方程式 x^2+3x+a が有理数の解をもつならば，a は偶数である。

(1997-4)

$\boxed{\textbf{17}}$ A さんは 5 円硬貨を 3 枚，B さんは 5 円硬貨を 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚持っている。2 人は自分が持っている硬貨全てを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は，相手の裏が出た硬貨を全てもらう。なお，表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし，硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて，以下の問いに答えよ。

(1) A さんが B さんに勝つ確率 p，および引き分けとなる確率 q を求めよ。

(2) ゲーム終了時に A さんが持っている硬貨の合計金額の期待値を求めよ。

(2014-4)

18 横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して，以下の操作 L と操作 R を考える。

L サイコロを投げて，出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R サイコロを投げて，出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

例えば，表表裏表裏表 と並んだ状態で操作 L を行うときに，3 の目が出た場合は，裏裏表表裏表 となる。

以下,「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

(1) 最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき，表が 1 枚となる確率を求めよ。

(2) 最初の状態から L, R の順で操作を行うとき，表の枚数の期待値を求めよ。

(3) 最初の状態から L, R, L の順に操作を行うとき，全ての硬貨が表となる確率を求めよ。

(2013-3)

$\boxed{\textbf{19}}$ いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき，次の試行 T を考える。

(試行 T) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ，その後，箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉 3 個，箱 B に白玉 2 個入っているとき，以下の問いに答えよ。

(1) 試行 T を 1 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n = 1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(2) 試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n = 1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(3) 試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中が全て黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。

(2012-5)

$\boxed{\textbf{20}}$ 1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ，以下の操作を考える。

操作 1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の玉が入っている袋から同時に 2 個の玉を取り出す。玉に書かれた数字が i と j ならば，i と j ならば，i のカードと j のカードを入れ替える。その後，2 個の玉は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1，2，3，4 と並べ，上の操作を n 回繰り返した後のカードについて，以下の問いに答えよ。

(1) $n=2$ のとき，カードが左から順に 1，2，3，4 と並ぶ確率を求めよ。

(2) $n=2$ のとき，カードが左から順に 4，3，2，1 と並ぶ確率を求めよ。

(3) $n=2$ のとき，左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。

(4) $n=3$ のとき，左端のカードの数字の期待値を求めよ。

(2011-5)

$\boxed{\textbf{21}}$ 次のような競技を考える。競技者がサイコロをふる。もし，出た目が気に入ればその目を得点とする。そうでなければ，もう一回サイコロを振って，2 つの目の合計を得点とすることができる。ただし，合計が 7 以上になった場合は得点は 0 点とする。この取り決めによって，2 回ふると得点が下がることもあることに注意しよう。次の問いに答えよ。

(1) 競技者が常にサイコロを 2 回ふるとすると，得点の期待値はいくらか？

(2) 競技者が最初の目が 6 のときだけ 2 回目をふらないとすると，得点の期待値はいくらか。

(3) 得点の期待値を最大にするには，競技者は最初の目がどの範囲にあるときに 2 回目をふるといいか。

(2010-2)

$\boxed{\mathbf{22}}$ k は 2 以上の自然数とする。「1」と書かれたカードが 1 枚,「2」と書かれたカードが 2 枚, $\cdots$,「k」と書かれたカードが k 枚ある。そのうち偶数が書かれたカードの枚数を M, 奇数が書かれたカードの枚数を N で表す。この $(M+N)$ 枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し, そこに書かれた数を記録して戻すという操作を n 回繰り返す。記録された n 個の数の和が偶数となる確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1) p_1, p_2 を M, N で表せ。

(2) p_{n+1} を p_n, M, N で表せ。

(3) $\dfrac{M-N}{M+N}$ を k で表せ。

(4) p_n を n, k で表せ。

(2009-2)

$\boxed{\textbf{23}}$ 1 から 10 までの番号が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。k を 2 から 9 までの整数の 1 つとする。よくきった 10 枚のカードから 1 枚を抜き取り，そのカードの番号が k より大きいなら，抜き取ったカードの番号を得点とする。抜き取ったカードの番号が k 以下なら，そのカードを戻さずに，残りの 9 枚のカードの中から 1 枚を抜き取り，2 回目に抜き取ったカードの番号を得点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 得点が 1 である確率と 10 である確率をそれぞれ求めよ。

(2) 2 以上 9 以下の整数 n に対して，得点が n である確率を求めよ。

(3) 得点の期待値を求めよ。

(2008-2)

$\boxed{\mathbf{24}}$ サイコロを 3 回続けて投げて出た目を順に a, b, c とする。これらの数 a, b, c に対して 2 次方程式

$$(\star)\quad ax^2+bx+c=0$$

を考える。ただし，サイコロはどの目も同様に確からしく出るものとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式 $(\star)$ が異なる 2 つの実数の解をもつとき，積 ac の取りうる値を求め，積 ac の各値ごとに可能な a, c の値の組 $(a,\ c)$ がそれぞれ何通りあるかを求めよ。

(2) 2 次方程式 $(\star)$ が異なる 2 つの有理数の解をもつ確率を求めよ。ただし，一般に自然数 n が自然数の 2 乗でなければ $\sqrt{n}$ は無理数であることを用いてよい。

(2007-4)

$\boxed{\mathbf{25}}$ n を 3 以上の自然数とする。スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に n 個並んでいる。これらの n 個の電球のスイッチを同時に入れたあと，左から電球の色を見ていき，色の変化の回数を調べる。

(1) 赤青 $\cdots$ 青，赤赤青 $\cdots$ 青，$\cdots\cdots$ のように左端が赤で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ。

(2) 色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ。

(3) 色の変化がちょうど m 回 $(0 \leqq m \leqq n-1)$ 起きる確率を求めよ。

(4) 色の変化の回数の期待値を求めよ。

(2004-5)

$\boxed{\textbf{26}}$ 座標平面上に $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(0,\ 1)$ を頂点とする正方形がある。ボールはこの正方形の中の全ての点に同様に確からしく落ちて，$y \leqq x(a-x)$ の部分に落ちれば当たりとする。ただし，$0 < a \leqq 2$ とする。

(1) ボールを 1 回落とす。当たる確率を求めよ。

(2) 1 回目は $a = \dfrac{1}{2}$，2 回目は $a = \dfrac{3}{2}$ として，ボールを 2 回落とす。1 回だけ当たる確率を求めよ。

(3) a の値を変えずにボールを 3 回落とす。少なくとも 1 回は当たる確率が $\dfrac{19}{27}$ 以上であり，当たりの数の期待値が $\dfrac{3}{2}$ 以下になるような a の値の範囲を求めよ。

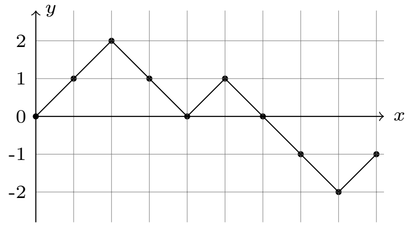
(2003-4)

$\boxed{\textbf{27}}$ 平面上の点の x 座標と y 座標がどちらも整数であるとき，その点を格子点という。与えられた格子点を第 1 番目とし，この点から右斜め 45°，または右斜め $-45°$ の方向にもっとも近い第 2 番目の格子点をとり，この 2 点を線分で結ぶ。同様にして第 2 番目の格子点から第 3 番目の格子点をとり，第 2 番目と第 3 番目を線分で結ぶ。以下これを有限回繰り返し，こうしてできる線分をつないだものを折れ線グラフと呼ぶことにする。下図に原点 O と格子点 $(9,\ -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例を示す。以下の問いに答えよ。

(1) n は正の整数，k は $0 \leqq k \leqq n$ なる整数とする。原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するための必要十分条件は $n+k$ が偶数であることを示せ。また，この必要十分条件が満たされているとき，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数を求めよ。

(2) n は 2 以上の整数，k は $0 \leqq k \leqq n-2$ なる整数で，$n+k$ は偶数とする。原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k), \cdots,\ (n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの 2 倍に等しいことを示せ。

(3) コインを 9 回投げる。1 回から i 回までの試行において，表の出た回数から裏の出た回数を引いた数を T_i で表す。このとき各格子点 $(i,\ T_i)$，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 9$ を順番に線分で繋げば折れ線グラフが得られる。ただし，$T_0 = 0$ とする。$T_9 = 3$ が起きたとき，どの $T_i (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$ も 3 にならない条件付き確率を求めよ。



(2002-4)

28 サイコロを n 回振って，出た目の小さい方から順に並べ，第 i 番目を X_i $(i=1,\ \cdots,\ n)$ とする。

(1) $n=7$ のとき，3 の目が 3 回，5 の目が 2 回出たとする。このとき X_4 のとりうる値を全て求めよ。

(2) 一般の n に対して，$X_1=2$ となる確率 $P(X_1=2)$ を求めよ。

(3) 一般の n に対して，X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(E(X_1)-1)$ を求めよ。ここで log は自然対数を表す。

(5) 一般の n に対して，期待値 $E(X_1+X_n)$ を求めよ。

(2001-4)

$\boxed{\textbf{29}}$ 袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

(操作): 袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉なら代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉なら代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう。

(1) 2 回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。

(2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。

(3) 8 回目の操作で初めて硬貨をもらう確率を求めよ。

(4) 8 回目の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚である確率を求めよ。

(2015-4)

$\boxed{\mathbf{30}}$ 座標平面上で円 $x^2+y^2=1$ に内接する正六角形で，点 $P_0(1,\ 0)$ を一つの頂点とするものを考える。この正六角形の頂点を P_0 から反時計回りに順に P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 とする。ある頂点に置かれている 1 枚のコインに対し，1 つのサイコロを投げ，出た目に応じてコインを次の規則に従って頂点上を動かす。

(規則) (i) 1 から 5 までの目が出た場合は，出た目の数だけコインを反時計回りに動かす。たとえば，コインが P_4 にあるときに 4 の目が出た場合は P_2 まで動かす。

(ii) 6 の目が出た場合は，x 軸に対称な位置にコインを動かす。ただし，コインが x 軸上にあるときには動かさない。たとえばコインが P_5 にあるときに 6 の目が出た場合は P_1 に動かす。

はじめにコインを 1 枚だけ P_0 におき，1 つのサイコロを投げて何回か投げて，1 回投げるごとに上の規則に従ってコインを動かしていくゲームを考える。以下の問いに答えよ。

(1) 2 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。

(2) 3 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。

(3) n を自然数とする。n 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。

(2016-3)

$\boxed{\textbf{31}}$ 赤玉 2 個，青玉 1 個，白玉 1 個が入った袋が置かれた円形のテーブルのまわりに A, B, C の 3 人がこの順番で時計回りに着席している。3 人のうち，ひとりが袋から玉を 1 個取り出し，色を確認したら袋に戻す操作を考える。1 回目は A が玉を取り出し，次のルール (a), (b), (c) に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す。

(a)　赤玉を取り出したら，取り出した人を勝者とする。

(b)　青玉を取り出したら，次の回も同じ人が玉を取り出す。

(c)　白玉を取り出したら，取り出した人の左隣の人が次の回に玉を取り出す。

A, B, C の 3 人が n 回目に取り出す確率をそれぞれ $a_n,\ b_n,\ c_n\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$ とする。ただし，$a_1 = 1,\ b_1 = c_1 = 0$ である。以下の問いに答えよ。

(1)　A が 4 回目に玉を取り出す確率と 7 回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ。

(2)　$d_n = a_n + b_n + c_n\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$ とおくとき，d_n を求めよ。

(3)　自然数 $n \geqq 3$ に対し，a_{n+1} を a_{n-2} と n を用いて表せ。

(2017-4)

$\boxed{\mathbf{32}}$ 1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚のカードを取り出して元に戻す試行を n 回続けて行う。k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし，積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とする。p_n，q_n，r_n，s_n を求めよ。

(2018-3)

$\boxed{\textbf{33}}$ A, B の 2 名で次のゲームを行う。A, B はそれぞれ表に 1 から n までの数字がひとつづつ書かれた n 枚のカードを持っている (裏には何も書かれていない)。A は自分のすべてのカードを表を下にして並べる。B は，A が並べたそれぞれのカードの前に自分のカードを表を上にして 1 枚ずつ並べる。次に A のカードを表向きにし，B は数字が一致したカードの枚数だけ得点を得る。確率変数 X を B が 1 回のゲームで得る点数とするとき次の問いに答えよ。

(1) $n=5$ のとき確率 $P(X=2)$ を求めよ。

(2) B のカードのうち数字が 1 のものが一致する確率を p とする。

$$p=\sum_{k=1}^{n} a_k P(X=k)$$

と表すとき，$a_k (k=1,\ 2,\ \cdots, n)$ を求めよ。

(3) 期待値 $E(X)$ を求めよ。

(1999-6)

$\boxed{\mathbf{34}}$ 下の図のように円周を 12 等分する点 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L が与えられている。

これらの中から相異なる 3 点を選んで線分で結ぶと三角形が得られる。例えば，A, D, I を選べば，図のような三角形が得られる。

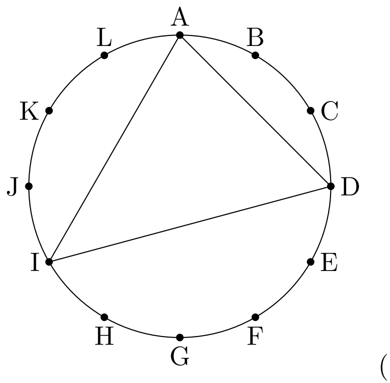
このとき，次の問いに答えよ。

(1) 正三角形を与えるような 3 点の選び方の総和を求めよ。

(2) 二等辺三角形を与えるような 3 点の選び方の総和を求めよ。

(3) 直角三角形を与えるような 3 点の選び方の総和を求めよ。

(4) 3 点を選んで得られる三角形のうち，互いに合同でないものは全部でいくつあるか。



(1998-2)

$\boxed{\textbf{35}}$ n 個の袋があり，それぞれの袋には金色のカード 3 枚と銀色のカード $(3n-3)$ 枚入っている。それぞれの袋から 1 枚ずつカードを抜き出すとき，確率変数 X_n を抜き出された金色のカードの枚数とおく。

(1) X_4 が値 3 をとる確率 $P(X_4=3)$，および，値 2 をとる確率 $P(X_4=2)$ を求めよ。

(2) 金色のカードを 1 枚抜き出すごとに賞金 100 円を受け取る。$n=4$ のときに受け取る賞金の期待値を求めよ。

(3) 一般の n $(n \geqq 3)$ について，X_n が値 3 を取る確率 $P(X_n=3)$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P(X_n=3)$ を求めよ。

(1997-8)

$\boxed{\textbf{36}}$ 1から9までの数字が1つずつ書いてあるカードが，それぞれ1枚ずつ，合計9枚ある。これらを3枚ずつの3つのグループに無作為に分け，それぞれのグループからもっとも小さい数の書かれたカードを取り出す。

次の問いに答えよ。

(1) 取り出された3枚のカードの中に4が書かれたカードが含まれている確率を求めよ。

(2) 取り出された3枚のカードに書かれた数字の中で4が最大である確率を求めよ。

(1996-4)

$\boxed{\textbf{37}}$ A, B どちらの袋にも，赤球と白球が 1 個ずつ入っているとして，次の操作を行う。2 つの袋から無作為に 1 個ずつ取り出し，同じ色なら 2 つとも A の袋に入れ，異なる色なら 2 つとも B の袋に入れる。この操作をどちらかの袋の球がなくなるまで続けるとする。n を自然数とし，$2n$ 回までこの操作が続いた後，A の袋に 4 個の球が入っている確率を p_n，赤，白の球が 1 個ずつ入っている確率を q_n，同じ色の球 2 個が入っている確率を r_n，球が入ってない確率を s_n とする。次の問いに答えよ。

(1) p_1，q_1，r_1，s_1 を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n，s_n を q_{n-1}，r_{n-1} を用いて表せ。

(3) p_n，q_n，r_n，s_n を求めよ。

(1995-5)

$\boxed{\mathbf{38}}$ 3 つのタイプからなる合計 10 枚の同じ形状のカードがある。第 1 のタイプは 3 枚で両面が黒，第 2 のタイプは 3 枚で両面が白，第 3 のタイプは 4 枚で片面が白で他面が黒である。これらのカードの中から 1 枚を無作為に取り出すとき，次の問いに答えよ。

(1) 上面が白であったとき，下面が黒である確率を求めよ。

(2) 下面のカードの色を言い当てるゲームをするとき，答として

(i) 上面と同じ色を答える

(ii) 上面と異なる色を答える

(iii) 上面の色と無関係に平等な確率で白または黒と答える

場合を考える。それぞれの場合に答が当たる確率を求めよ。

(1994-5)

$\boxed{\textbf{39}}$ x と書いた玉が a 個，y と書いた玉が b 個入っている袋がある。この中から 2 個取り出して x と y の個数を調べて元に戻す。ただし，$a \geqq 2,\ b \geqq 2$ とする。このとき，xy 平面上で点 P を

- 2 個とも x ならば x 軸の正の方向に 2,
- x が 1 個と y が 1 個ならば x 軸, y 軸の正の方向にそれぞれ 1,
- 2 個とも y ならば y 軸の正の方向に 2,

だけ進ませる試行を考える。点 P が原点 $(0,\ 0)$ から出発し，この試行を繰り返し行うとき，次の問いに答えよ。

(1) 1 回後に点 P が存在しうる点とその点に存在する確率をそれぞれ求めよ。

(2) 2 回後に点 P が存在しうる点とその点に存在する確率をそれぞれ求めよ。

(3) $a = b$ のとき 2 回後に点 P が存在する確率が一番大きな点を求めよ。

(1992-5)

$\boxed{\textbf{40}}$ 4 枚の硬貨を投げる試行を考える。表の出た枚数を x，裏の出た枚数を y とする。$x > y$ ならば右に 1 歩，$x < y$ ならば左に 1 歩進み，$x = y$ のときはその場にとどまる。

(1) 3 回の試行の後，はじめにいた場所から右に 1 歩進んだところにいる確率を求めよ。

(2) 3 回の試行の後，はじめにいた場所から右に k 歩 ($k = 1,\ 2,\ 3$) 離れている場合の得点は k とし，それ以外の場合の得点は 0 とする。得点の期待値を求めよ。

(1990-3)

$\boxed{\textbf{41}}$ m 枚の硬貨を同時に投げて，表が k 枚出るとき $X=a^k$ $(a>0)$ とする。

(1) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ に対して，$\dfrac{\sqrt{V(X)}}{E(X)}=\sqrt{\dfrac{2^m(1+a^2)^m}{(1+a)^{2m}}-1}$ が成り立つことを示せ。

(2) a が $a>0$ の範囲を動くとき，$\dfrac{\sqrt{V(X)}}{E(X)}$ のとりうる範囲を求めよ。

(1989-4)

$\boxed{\textbf{42}}$ p, q は共に整数であるとする。2 次方程式 $x^2+px+q=0$ が実数解 α, β を持ち，条件 $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)\neq 0$ を満たしているとする。このとき，数列 $\{a_n\}$ を

$$\{a_n\}=(\alpha^n-1)(\beta^n-1)\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定義する。以下の問いに答えよ。

(1) a_1, a_2, a_3 は整数であることを示せ。

(2) $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)>0$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ は整数であることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるとき，p と q の値を全て求めよ。ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

(2012-4)

$\boxed{\textbf{43}}$ 数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots a_n,\ \cdots$ は

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1-a_n^2} \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

を満たしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，一般項 a_n を求めよ。

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3) $a_1 = \tan\dfrac{\pi}{20}$ とするとき，

$$a_{n+k} = a_n,\ n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$$

を満たす最小の自然数 k を求めよ。

(2011-3)

$\boxed{\textbf{44}}$ 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は, $a_1 = b_1 = 1$ および, 関係式

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n b_n \\ b_{n+1} &= 2a_n^2 + b_n^2 \end{aligned}$$

を満たすものとする。

(1) $n \geqq 3$ のとき, a_n は 3 で割り切れるが, b_n は 3 では割り切れないことを示せ。

(2) $n \geqq 2$ のとき, a_n と b_n は互いに素であることを示せ。

(2006-3)

$\boxed{\textbf{45}}$ 座標平面上で，x 座標と y がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし，辺の長さが 1 である正方形 (周は含まない) を単位正方形と呼ぶことにする。$p,\ n$ を自然数とし，領域

$$D_n = \{(x,\ y)|0 \leqq x,\ x^p \leqq y \leqq n\}$$

を考え，その面積を S_n とする。L_n と M_n を，それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

(1) グラフ $y = x^p\ (0 \leqq x \leqq n^{\frac{1}{p}})$ と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ。

(2) 不等式 $M_n < S_n < M_n + n$ を示せ。また，面積 S_n を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n$ を求めよ。

(2003-3)

$\boxed{\textbf{46}}$ 自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

（1） a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

（2） a_1，a_2，$\cdots$，a_6 を求めよ。

（3） 以下の 3 条件を満たす自然数 N を全て求めよ。

(i) N を十進法で表示したとき 6 桁となる。

(ii) N を十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を除くと 2016 となる。

(iii) N は 13 で割り切れる。

(2016-4)

$\boxed{\textbf{47}}$ 初項 $a_1 = 1$，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7 の倍数である項の個数を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7^2 の倍数である項の個数を求めよ。

(3) 初項から第 n 項までの積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

(2017-3)

48 関数 $f(x)=1-x^2$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f(a)=a$ を満たす正の実数 a を求めよ。

(2) a を (1) で求めた実数とする。

$$x \geqq \frac{1}{2} \text{ ならば，} |f(x)-f(a)| \geqq \frac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$$

となることを示せ。

(3) a を (1) で求めた実数とする。

$\dfrac{1}{2} \leqq x_1 \leqq 1$ として，

$$x_{n+1}=f(x_n), \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,$$

で決まる数列 $\{x_n\}$ を考える。すべての n に対して $\dfrac{1}{2} \leqq x_n \leqq 1$ がなりたつならば $x_1=a$ であることを示せ。

(1999-4)

$\boxed{\textbf{49}}$ (1) 自然数 $n=1,\ 2,\ \cdots$ について，次の等式が成り立つことを示せ。

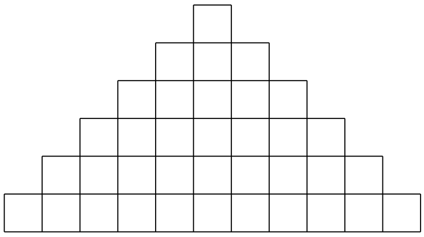
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2) 辺の長さ 1 の正三角形のタイルをいくつか用意して，辺の長さが自然数 m の正三角形をタイルで張りつめたい。

(i) $m=2,\ 3,\ 4$ のとき，どのようにタイル張りすれば良いか図示せよ。

(ii) 一般に，辺の長さ m の正三角形をタイルで張りつめるのに必要なタイルの個数を m に形で表し，その式が成り立つ理由を述べよ。

(3) 辺の長さ 1 の正三角柱のブロックをいくつか用意して隙間なく並べて高さ 1 の正三角柱の台を作る。このような台を n 段積み上げ，高さ n の台を作る。この台を真横から見たとき下図のように見えたという。ただし，図の小四角形はすべて辺の長さ 1 の正方形である。このとき台全体の体積を求めよ。



(1998-5)

$\boxed{\mathbf{50}}$ (1) $2^m \leqq 4m^2$ であるが，$2^{m+1} > 4(m+1)^2$ である最小の自然数 m を求めよ。

(2) m を (1) で求めた自然数とする。そのとき，$m < n$ を満たす全ての自然数 n について，$4n^2 < 2^n$ が成り立つことを示せ。

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 4k^2$ とする。n を動かしたときの S_n の最小値を求めよ。

(1997-3)

$\boxed{\textbf{51}}$ 正の数 c の k 乗根 $\sqrt[k]{c}$ (k は 2 以上の整数) の近似値を求めるため

$$f(x) = x^k - c,\ g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\ (x > 0)$$

とおき,

$$\sqrt[k]{c} < a_1,\ a_{n+1} = g(a_n),\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とする。

(1) $\sqrt[k]{c} < a_n$ ならば, $\sqrt[k]{c} < a_{n+1} < a_n$ を示せ。

(2) $k = 3$ のとき, $\sqrt[3]{c} < a_n$ ならば,

$$a_{n+1} - \sqrt[3]{c} < \frac{1}{\sqrt[3]{c}}(a_n - \sqrt[3]{c})^2 \text{ を示せ。}$$

(3) $k = 3,\ c = 2,\ a_1 = 1.3$ のとき, $a_5 - \sqrt[3]{2} < \dfrac{1}{2^5 \cdot 10^{16}}$ を示せ。

(1997-11)

$\boxed{\mathbf{52}}$ 0 と 1 を有限個並べたものを語ということにする。語の例としては，0, 010, 00101, 100110 などがある。いま 2 つの語 $A=1,\ B=10$ をもとにして

$$C_1=A,\ C_2=B,\ C_n=C_{n-2}C_{n-1}C_{n-2}\quad (n \geqq 3)$$

のように定める。例えば，$C_3=1101$ である。次の問いに答えよ。

(1) $n \geqq 3$ のとき，語 C_n に対して，最初，または最後の数字を 1 個か 2 個取り去ると，残りは同じ語が循環して現れている。このことを数学的帰納法により示せ。

(2) 語 C_n に現れる 0 の個数を a_n とし，1 の個数を b_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ を求めよ。

(1996-5)

$\boxed{\mathbf{53}}$ $n > 2$ とする。1 から n までの数字を k 個の空でない部分に分割する方法の数を $S_n(k)$ で表す。たとえば $n = 3,\ k = 2$ のとき分割は $\{1\} \cup \{2,\ 3\},\ \{2\} \cup \{1,\ 3\},\ \{3\} \cup \{1,\ 2\}$ となるので $S_3(2) = 3$ である。次の問いに答えよ。

(1) $S_n(n-1)$ を求めよ。

(2) $S_n(n-2)$ を求めよ。

(3) $S_n(2)$ を求めよ。

(4) $k > 1$ のとき $S_{n+1}(k)$ を $S_n(k-1)$ と $S_n(k)$ を用いて表せ。

(1993-3)

$\boxed{\mathbf{54}}$ 直線 L は，L 上の異なる k 個 $(k \geqq 1)$ の点によって $P_1(k) = k-1$ 個の長さが有限な部分と 2 個の長さが有限でない部分に分かれる。平面 Π 上に k 本の直線が，どの 2 本も平行でなく，どの 3 本も 1 点で交わらないように与えられている。Π はこれらの直線によって $P_2(k)$ 個の大きさが有限な部分と何個かの大きさが有限でない部分に分かれるとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $P_2(4)$，$P_2(5)$ を求めよ。

(2) $P_2(k)$ と $P_2(k+1)$ の関係式を求めよ。

(3) $P_2(k)$ を k で表せ。

(1991-2)

$\boxed{\textbf{55}}$ 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$ で定めるとき，次の問いに答えよ。

(1) すべての n に対して $a_n>1$ および $a_{n+1}<a_n$ が成り立つことを示せ。

(2) a_3 の値を求めよ。また，$n \geqq 3$ のとき $a_{n+1}-1 \geqq \dfrac{20}{41}(a_n-1)^2$ が成り立つことを示せ。

(3) $p_n=2^{n-3}$ とし，$b_n=\dfrac{41}{20}\left(\dfrac{1}{82}\right)^{p_n}$ とおく。$n \geqq 3$ のとき，$a_n-1 \geqq b_n$ を示せ。

(1991-4)

$\boxed{\textbf{56}}$ 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n \times \left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right)$ $(n \geqq 1)$ で定める。

（1） $a_2,\ a_3$ を計算し，答を小数でかけ。

（2） $n \geqq 2$ のとき $a_n \leqq 0.9$ かつ $a_n - a_{n+1} \leqq \dfrac{9}{10^{n+1}}$ が成り立つことを示せ。

（3） すべての n に対して $a_n > 0.89$ が成り立つことを示せ。

(1990-2)

$\boxed{\textbf{57}}$ 三角形 ABC の 3 辺の長さを $a=$BC, $b=$CA, $c=$AB とする。実数 $t \leqq 0$ を与えたとき，A を始点とし B を通る半直線上に AP$=tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

(1) CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ。

(2) 点 P が CP$=a$ を満たすとき，t を求めよ。

(3) (2) の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，$\angle$A と $\angle$B に関する条件を求めよ。

(2010-1)

$\boxed{\mathbf{58}}$ 座標平面上に 3 点 $O(0,\ 0)$, $A(2,\ 6)$, $B(3,\ 4)$ をとり，点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす。また，実数 s と t に対し，点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 C の座標を定め，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を s と t を用いて表せ。

(2) s を定数として，t を $t \leqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値を求めよ。

(2009-1)

$\boxed{\textbf{59}}$ $\triangle$OAB において，辺 AB 上に点 Q をとり，直線 OQ 上に点 P をとる。ただし，点 P は点 Q に関して点 O と反対側にあるとする。3 つの三角形 $\triangle$OAP, $\triangle$OBP, $\triangle$ABP の面積をそれぞれ a, b, c とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, a, b$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, a, b, c$ を用いて表せ。

(3) 3 辺 OA, OB, AB の長さはそれぞれ 3, 5, 6 であるとする。点 P を中心とし，3 直線 OA, OB, AB に接する円が存在するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2008-3)

$\boxed{\textbf{60}}$ いくつかの半径 3 の円を，半径 2 の円 Q に外接し，かつ，互いに交わらないように配置する。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 半径 3 の円の 1 つを R とする。円 Q の中心を端点とし，円 R に接する 2 本の半直線のなす角を θ とおく。ただし，$0 < \theta < \pi$ とする。このとき，$\sin\theta$ を求めよ。

(2) $\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ。

(2008-5)

$\boxed{\textbf{61}}$ $\triangle$OAB において，辺 OB の中点 M，辺 AB を $\alpha\ :\ 1-\alpha$ に内分する点を P とする。ただし，$0<\alpha<1$ とする。線分 OP と AM の交点を Q とし，Q を通り，線分 AM に垂直な直線が，辺 OA またはその延長と交わる点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$ として，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ および α を用いて表せ。

(2) $|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=3$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ で $\cos\theta=\dfrac{1}{6}$ とする。このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{a}$ と α を用いて表せ。

(3) (2) の条件のもとで，点 R が辺 OA の中点であるときの α の値を求めよ。

(2006-2)

$\boxed{\mathbf{62}}$ 3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする。

(1) xy 平面上の点 $(p,\ q)$ に関する，点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ。

(2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。

(3) 直線

$$mx + ny = 0$$

に関する，点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ。ただし $m,\ n$ は共には 0 でないとする。

(4) G は原点を通るどんな直線に関しても線対称でないことを示せ。

(2001-2)

$\boxed{\textbf{63}}$ t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA，をそれぞれ $2:1$, $t:1-t$, $1:3$ に内分する点を D, E, F とする。また，AE と BF，BF と CD，CD と AE の交点をそれぞれ P，Q，R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下，t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする。

(2) AP=kAE, CR=lCD を満たす実数 k, l をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。

(2016-2)

$\boxed{\textbf{64}}$ 座標平面上の 3 点 O(0, 0), A(2, 0), B(1, $\sqrt{3}$) を考える。点 P_1 は線分 AB 上にあり，A, B とは異なる点とする。

線分 AB 上の点 P_2, P_3, $\cdots$ を以下のように定める。点 P_n が定まったとき，点 P_n から線分 OB に下ろした垂線と OB との交点を Q_n とし，点 Q_n から線分 OA に下ろした垂線と OA との交点を R_n とし，点 R_n から線分 AB に下ろした垂線と AB との交点を P_{n+1} とする。

$n \to \infty$ のとき，P_n が限りなく近づく点の座標を求めよ。

(2019-4)

$\boxed{\textbf{65}}$ 平面上に四角形 ABCD と，この四角形の外部に点 E がある。これらの点から得られるベクトルについて，関係式

$$2\overrightarrow{\mathrm{AE}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AD}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{0},\ 8\overrightarrow{\mathrm{EA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 3(\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}})$$

が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{EA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{EB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{EC}}$, $\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{ED}}$ とおくとき，$\vec{c}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ で表せ。

(2) 四角形 BCDE はどのような四角形か。

(3) 直線 EA と直線 BD の交点を F とするとき，EA と AF の長さの比を求めよ。

(4) 四角形 ABCD と四角形 BCDE の面積の比を求めよ。

(1992-1)

$\boxed{\mathbf{66}}$ 一辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし，点 P を頂点とする四角錐 POABC がある。ただし，点 P は内積に関する条件 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}$，および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}$ をみたす。辺 AP を $2:1$ に内分する点を M とし，辺 CP の中点を N とする。さらに，点 P と直線 BC 上の点 Q を通る直線 PQ は，平面 OMN に垂直であるとする。このとき，長さの比 BQ:QC，および線分 OP の長さを求めよ。

(2013-2)

$\boxed{\textbf{67}}$ 空間内の 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(0,\ 2,\ 3),\ \mathrm{B}(1,\ 0,\ 3),\ \mathrm{C}(1,\ 2,\ 0)$$

を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 4 点 O, A, B, C を通る球面の中心 D の座標を求めよ。

(2) 3 点 A, B, C を通る平面に点 D から垂線を引き，交点を F とする。線分 DF の長さを求めよ。

(3) 四角錐 ABCD の体積を求めよ。

(2011-4)

$\boxed{\mathbf{68}}$ $a,\ b$ を正の数とし，空間内の 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a,\ b)$, $\mathrm{B}(-a,\ a,\ b)$, $\mathrm{C}(a,\ a,\ b)$ を考える。A, B, C を通る平面を α, 原点 O を中心とし A, B, C を通る球面を S とおく。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 線分 AB の中点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DO}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であることを示せ。また $\triangle\ \mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ のなす角を θ とするとき $\sin\theta$ を求めよ。また，平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき，線分 OH の長さを求めよ。

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。ただし，P は平面 α 上にはないものとする。

(2007-3)

69 座標空間内の三角柱

$$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x \geqq y,\ 0 \leqq z \leqq 1$$

を考え，その xy 平面内の面を S，xz 平面内の面を T とする。点 $A(a,\ b,\ 0)$ を S 内に，点 $B(c,\ 0,\ d)$ を T 内にとり，また $C(1,\ 1,\ 1)$ とする。ただし，点 A, B は原点 O とは異なるとする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直行する単位ベクトルを求め，その単位ベクトルとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積の絶対値を求めよ。

(2) 四面体 OABC の体積を求めよ。ただし，点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。

(3) 点 A が S 内を，点 B が T 内を動くとする。このときの，四面体 OABC の体積の最大値，および最大値を与える点 A，B の位置を全て求めよ。

(2004-4)

$\boxed{\textbf{70}}$ 空間内に四面体 OABC があり $\angle$AOB, $\angle$BOC, $\angle$COA は全て 90° であるとする。辺 OA, OB, OC の長さを，それぞれ a, b, c とし，三角形 ABC の重心を G とする。

(1) $\angle$OGA, $\angle$OGB, $\angle$OGC が全て 90° であるための条件を a, b, c の関係式で表せ。

(2) 線分 BC を $1:2$ に内分する点を点 D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ。

(2003-4)

$\boxed{\textbf{71}}$ 空間内の図形について以下の問いに答えよ。

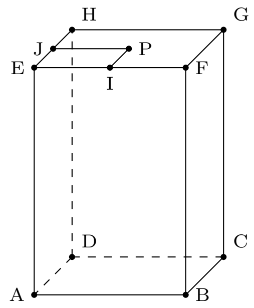
(1) $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

に等しいことを示せ。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を表す。必要ならば，二つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係の式を用いて良い。

(2) 下の図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|=2$ とし，$\angle\mathrm{FBC}=\angle\mathrm{BCD}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{EAB}=\theta$ とする。ここで θ は $0<\theta<\pi$ なる定数とする。面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI をおろし，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x=\left|\overrightarrow{\mathrm{EI}}\right|$，$y=\left|\overrightarrow{\mathrm{EJ}}\right|$ とするとき，$\triangle$ACP の面積を θ，x，y を用いて表せ。

(3) 問 (2) で点 P が面 EFGH 上を動くとき，$\triangle$ACP の面積の最小値を求めよ。



(2002-4)

$\boxed{\textbf{72}}$ 空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える。円柱の中心軸は x 軸で，中心軸に直行する平面による切り口は半径 r の円である。正四角柱の中心軸は z 軸で，xy 平面による切り口は一辺の長さが $\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で，その正方形の対角線は x 軸と y 軸である。$0 < r \leqq \sqrt{2}$ とし，円柱と正四角中の共通部分を K とする。

(1) 高さが $z = t\ (-r \leqq t \leqq r)$ で xy 平面に平行な平面と K との交わりの面積を求めよ。

(2) K の体積 $V(r)$ を求めよ。

(3) $0 < r \leqq \sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求めよ。

(2001-3)

$\boxed{\textbf{73}}$ $a,\ b,\ c$ を 0 でない実数として，空間内に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ をとる。

(1) 空間内の点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$ を満たしながら動くとき，この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ。

(2) (1) における定点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にあることを示せ。

(3) (1) における P について，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。

(2000-4)

$\boxed{\textbf{74}}$ 座標空間内に，原点 O$(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球がある。下の概略図のように，y 軸の負の方向から仰角 $\dfrac{\pi}{6}$ で太陽光線が当たっている。この太陽光線はベクトル $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$ に平行である。球は光を通さないものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 球の $z \geqq 0$ の部分が xy 平面上に作る影を考える。k を $-1 < k < 1$ を満たす実数とするとき，xy 平面上の直線 $x = k$ において，球の外で光が当たらない部分の y 座標の範囲を k を用いて表せ。

(2) xy 平面上において，球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ。

(3) $z \geqq 0$ において，球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ。

(2015-3)

$\boxed{\textbf{75}}$ 2 つの定数 $a>0$ および $b>0$ に対し，座標空間内の 4 点を $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{D}(a,\ b,\ 1)$ と定める。以下の問いに答えよ。

(1) 点 A から線分 CD に下ろした垂線と CD の交点を G とする。G の座標を a, b を用いて表せ。

(2) さらに，点 B から線分 CD に下ろした垂線と CD の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ がなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を a, b を用いて表せ。

(2017-2)

$\boxed{\mathbf{76}}$ 座標空間において，xy 平面上にある双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ のうち $x \geqq 1$ を満たす部分を C とする。また，z 軸上の点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を考える。点 P が C 上を動くとき，直線 AP と平面 $x = d$ との交点の軌跡を求めよ。ただし，d は正の定数とする。

(2018-1)

$\boxed{\textbf{77}}$ 大きさ 1 の空間ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{2},\ \vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

を満たすように与えられているとする。また，空間ベクトル $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ が

$$\begin{aligned}&\vec{a}\cdot\vec{d}=1, \quad \vec{b}\cdot\vec{d}=0, \quad \vec{c}\cdot\vec{d}=0,\\ &\vec{a}\cdot\vec{e}=0, \quad \vec{b}\cdot\vec{e}=1, \quad \vec{c}\cdot\vec{e}=0,\\ &\vec{a}\cdot\vec{f}=0, \quad \vec{b}\cdot\vec{f}=0, \quad \vec{c}\cdot\vec{f}=1\end{aligned}$$

を満たすとき，点 $\mathrm{D}(\vec{d})$, $\mathrm{E}(\vec{e})$, $\mathrm{F}(\vec{f})$ および原点 O について次の問いに答えよ。

(1) $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ となるような実数 x, y, z を求めよ。同様に $\vec{f}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

(2) ベクトル $\vec{d}$, $\vec{f}$, $\vec{d}-\vec{f}$ の大きさを求めよ。

(3) 三角形 ODF の面積を求めよ。

(4) 四面体 ODEF の体積を求めよ。

(1999-8)

$\boxed{\textbf{78}}$ 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおき，線分 OA を $m:n$ に内分する点を P，線分 BC を $m:n$ に内分する点を Q，線分 CO を $m:n$ に内分する点を R，線分 AB を $m:n$ に内分する点を S とする。(ただし，m, $n > 0$ とする。)

(1) (i) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ で表せ。

(ii) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積を求めよ。

(iii) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が垂直かどうか調べよ。

(2) (i) 点 P, Q, R, S が同一平面上にあるときの m, n の関係を求めよ。

(ii) $m = n$ のとき，P, Q, R, S は同一平面上にあることを示せ。

(iii) このとき PQ, RS の交点を G として，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ で表せ。

(iv) G は正四面体 OABC に外接する球の中心であることを示し，その球の半径を求めよ。

(1998-7)

$\boxed{\textbf{79}}$ 四面体 OABC において，点 G を

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = k(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

である点とする，また，3 点 P, Q, R を，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = p\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = q\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}} = r\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad (0 < p < 1,\ 0 < q < 1,\ 0 < r < 1)$$

である点とする。

(1) 点 G が四面体 OABC の内部にあるとき，k の満たすべき条件を求めよ。ただし，四面体の内部とは，四面体からその表面を除いた部分をさす。

(2) 四面体 OABC と四面体 OPQR の体積をそれぞれ $V,\ V'$ とするとき，$\dfrac{V'}{V}$ を $p,\ q,\ r$ を用いて表せ。

(3) 4 点 G, P, Q, R が同一平面上にあるとき，k を $p,\ q,\ r$ を用いて表せ。

(4) $p = 3k = \dfrac{1}{2}$ であって，4 点 G, P, Q, R が同一平面上にあるとき，$\dfrac{V'}{V}$ の最小値を求めよ。

(1997-6)

$\boxed{\textbf{80}}$ 原点 O を中心とする半径 1 の球面を S とし，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を S 上の点とする。点 P を通る平面 α に対して S と α が交わってできる円周を C とする。

次の問いに答えよ。

(1) 平面 α 上での点 P における C の接線 l は，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ に直交することを示せ。

(2) 球面 S と点 P で接する平面を β とする。平面 β と xy 平面とのなす角を θ として，$\cos\theta$ を求めよ。

(3) 平面 α が点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ 0\right)$ を通り，さらに直線 l と xy 平面のなす角が上で求めた θ であるとする。このとき，平面 α の方程式を求めよ。

(1996-2)

$\boxed{\mathbf{81}}$ xyz 空間内に 4 点 A(0, 1, 2), B(0, -1, 2), C(0, 0, 1), P(a, b, 3) をとる。ただし，$a \geqq 0$, $b \geqq 0$ とする。点 P と点 A，B，C とを結ぶ直線が xy-平面と交わる点をそれぞれ A', B', C' とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 A', B', C' の座標を a, b を用いて表せ。

(2) 三角形 A'B'C' が正三角形となる点 P=P$_0$ を求めよ。

(3) 点 Q が 3 点 A, B, C を通る半円周

$$y^2 + (z-2)^2 = 1,\ x = 0,\ z \leqq 2$$

上を動くとき，2 点 P$_0$, Q を結ぶ直線と，xy-平面との交点 Q' の軌跡を求めよ。

(1995-2)

$\boxed{\textbf{82}}$ 中心が C(0, 1, 1) である半径 1 の球を S とする。点 A(0, 0, 2) および球 S 上の点 B(0, 1, 0) を考える。点 B を通り AC に垂直な平面で球 S を切ることにより得られる円を K とする。点 P が円 K 上にあるとき，直線 AP が xy 平面と交わる点を Q とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積を計算せよ。

(2) 点 Q の座標を $(x,\ y,\ 0)$ とし，$\angle\mathrm{QAC}=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ を $x,\ y$ を用いて表せ。

(3) 点 P が円 K 上を動くときの点 Q の軌跡の方程式を求めよ。

(1993-2)

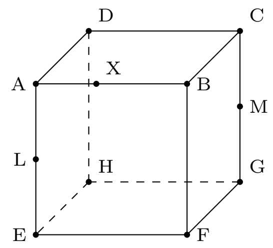
$\boxed{\textbf{83}}$ 立方体 ABCD-EFGH の辺 AE, CG の中点を，それぞれ L, M とする。点 X が辺 AB 上を動くとき，3 点 L, M, X を通る平面によるこの立体の切り口を K_X とし，この多角形 K_X の周の長さが最小となる点を X_0 とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) AB$=2$，AX$=2t$ として，K_X の周の長さ $s(t)$ を表す式を求めよ。

(2) X_0 は辺 AB の中点であることを示せ。

(3) 直線 DF は L, M, X_0 を通る平面に垂直であることを証明せよ。

(4) $\angle\mathrm{LX_0M}$ を求めよ。



(1992-4)

$\boxed{\textbf{84}}$ 1辺の長さ x の正方形 ABCD の中心を O とし，O を通りこの正方形に垂直な直線上に頂点 E をもつ四角錐 ABCDE を考える。

（1） 半径 1 の球がこの四角錐に内接しているとき，高さ $\overline{\mathrm{EO}}$ を x で表せ。

（2） (1) の四角錐の体積が最小となる x の値とその最小値を求めよ。

(1991-1)

$\boxed{\mathbf{85}}$ 関数 $f(x)$ が 0 でない定数 p に対して，つねに $f(x+p)=f(x)$ を満たすとき $f(x)$ は周期関数であるといい，p を周期という。正の周期のうち最小のものを特に基本周期という。例えば，関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $y=|\sin x|$ のグラフをかき，関数 $|\sin x|$ の基本周期を求めよ。

(2) 自然数 m，n に対して関数 $f(x)$ を $f(x)=|\sin mx|\sin nx$ とおく。p が関数 $f(x)$ の周期ならば $f(\frac{p}{2})=f(-\frac{p}{2})=0$ が成り立つことを示せ。

また，このとき mp は π の整数倍であり，np は 2π の整数倍であることを示せ。

(3) m，n は 1 以外の公約数を持たない自然数とする。(2) の結果を用いて関数 $|\sin mx|\sin nx$ の基本周期を求めよ。

(2007-5)

86 関数

$$f(x)=\left|\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}\right|$$

を考える。ただし，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする。さらに，$0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対して，

$$F(a)=\int_0^a f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$$

とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $f(x)=0$ となる x を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3) $F(a)$ を求めよ。

(2006-4)

$\boxed{\mathbf{87}}$ 実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。例えば，$\left[\dfrac{3}{2}\right]=1, [2]=2$ である。このとき，$0<\theta<\pi$ として次の問いに答えよ。ただし，必要なら $\sin\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい。

(1) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2) 不等式 $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2005-4)

$\boxed{\textbf{88}}$ $f(x) = ax + e^{-x}\sin x$, $g(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$ とする。

(1) $y = g(x)$ $(x \geqq 0)$ のグラフの概形を描け。

(2) $f(x)$ が区間 $0 < x < 2\pi$ 内で極値として極大値のみを 1 つだけもつとき，a の範囲を定めよ。

(1991-5)

$\boxed{\mathbf{89}}$ 2 以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = (x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$$

と定義する。$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを証明せよ。

(2014-5)

$\boxed{\mathbf{90}}$ 曲線 $y=e^x$ 上を動く点 P の時刻 t における座標を $(x(t),\ y(t))$ と表し，P の速度ベクトルと加速度ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と $\overrightarrow{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ とする。全ての時刻 t で $|\overrightarrow{v}|=1$ かつ $\dfrac{dx}{dt}>0$ であるとして，次の問いに答えよ。

(1)　P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における速度ベクトル $\overrightarrow{v}$ を s を用いて表せ。

(2)　P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における加速度ベクトル $\overrightarrow{\alpha}$ を s を用いて表せ。

(3)　P が曲線全体を動くとき，$|\overrightarrow{\alpha}|$ の最大値を求めよ。

(2009-5)

$\boxed{\textbf{91}}$ $n=0,\ 1,\ 2,\cdots$ に対して

$$I_n=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^n e^x dx$$

とおく。ただし，0!=1 とする。

(1) I_0 の値を求め，$n=1,\ 2,\ \cdots$ のとき I_n と I_{n-1} の関係式を求めよ。また，これらを用いて I_3 の値を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 2$ に対して $e^x\leqq e^2$ であることを利用して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}$ を求めよ。

(2004-1)

$\boxed{\mathbf{92}}$ n を 2 以上の自然数とする。数列 $\{S_k\}$ が $S_k = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{k}$ で与えられている。

(1) 不等式

$$\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$$

が成り立つことを示せ。

(2) 一般に数列 $\{c_k\}$ に対して，$\Delta c_k = c_{k+1} - c_k$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。数列 $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} \Delta a_k$$

が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k S_k = \left(S_n - \frac{1}{2}\right) p(n)$ となる n の整式 $p(n)$ を求めよ。

(3) 不等式

$$\left| \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k S_k - \log n \right| < \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ。

(2003-5)

$\boxed{\textbf{93}}$ 次の問いに答えよ。

(1) 全ての正の実数 $x,\ y$ に対して，不等式

$$x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$$

が成り立つことを示せ。ここで log は自然対数を表す。

(2) $a,\ b$ は実数で $a < b$ とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数で

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

を満たす。このとき，不等式

$$\int_a^b f(x)\log f(x)dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)dx$$

が成り立つことを示せ。

(3) $1,\ b$ は実数で $a < b$ とする。閉区間 $[a,\ b]$ で正の値を取る連続関数 $f(x)$ に対して正の実数 M を

$$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

とする。不等式

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)dx \geqq M\log M$$

が成り立つことを示せ。

(2002-3)

$\boxed{\textbf{94}}$ 正の実数 a の 3 乗根 $\sqrt[3]{a}$ を近似することを考える。与えられた 2 以上の整数 p に対して関数 $f(x),\ g(x)$ を

$$\begin{cases} f(x) = x^p - ax^{p-3} \\ g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

とする。ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。次の問いに答えよ。

(1) $g(x) - \sqrt[3]{a}$ は

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^2 \times \frac{x\text{ の 2 次式}}{x\text{ の 3 次式}}$$

の形で表されることを示せ。

(2) $p = 2$ とする。このとき，$g(x) - \sqrt[3]{a}$ は

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^3 \times \frac{x\text{ の 1 次式}}{x\text{ の 3 次式}}$$

の形で表されることを示せ。

(3) $a = 9,\ p = 2$ とする。$2 < \sqrt[3]{9} < 2.1$ に注意して，不等式

$$0 < \sqrt[3]{9} - g(2) < \frac{1}{1000}$$

が成り立つことを示せ。また，$\sqrt[3]{9}$ を小数第 3 位まで求めよ (すなはち，小数第 4 位以下を切り捨てよ)。

(2005-5)

$\boxed{\textbf{95}}$ 関数 $f(x) = \dfrac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$ を考える。

(1) 関数 $f(x)$ が常に増加するための a, b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2) $a=0$ の時，関数 $f(x)$ が $x > -1$ において常に増加するための b の条件を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ が $x > -1$ において常に増加するための a, b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2001-1)

96 以下の問いに答えよ。

(1) e を自然対数の底とし，

$$f(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$$

とおく。$0 < x < 1$ においては $0 < f(x) < x^3$ が成り立つことを示せ。また

$$\lim_{n\to\infty} n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

を示せ。必要であれば $e < 3$ を使ってよい。

(2) 関数 $g(x) = e^x$ を考える。区間 $0 \leqq x \leqq 1$ を n 個の小区間に等分して，各小区間を底辺，小区間の左端の点における関数 $g(x)$ の値を高さとする長方形の面積の和を K_n とする。$n \to \infty$ のとき

$$n^k \left| \int_0^1 g(x)dx - K_n \right|$$

が有限の値に収束するような最大の自然数 k とそのときの極限値を求めよ。

(2001-5)

$\boxed{\textbf{97}}$ n を自然数として，$f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$ とおく。

(1) $x<1$ において，

$$f(x)=-\log(1-x)-\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$$

が成り立つことを示せ。ここで，log は自然対数を表す。

(2) $|x| \leqq \dfrac{1}{3}$ とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

i. $x \geqq 0$ において，$\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leqq \frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}$

ii. $x<0$ において，$\displaystyle\left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt\right| \leqq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$

iii. $\displaystyle\left|f(x)-f(-x)-\log\frac{1+x}{1-x}\right| \leqq \frac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$

(3) この不等式を用いて，$\log 2$ の近似値を誤差が $\dfrac{1}{100}$ 以下となるような分数で求めよ。

(2000-3)

$\boxed{\textbf{98}}$ 以下の問いに答えよ。

（1） 関数 $y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において単調に減少することを示せ。

（2） 不定積分 $\displaystyle\int \dfrac{1}{x(\log x)^2}dx$ を求めよ。

（3） n を 3 以上の整数とするとき，不等式 $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \dfrac{1}{k(\log k)^2} < \dfrac{1}{\log 2}$ が成り立つことを示せ。

(2015-2)

$\boxed{\textbf{99}}$ n を自然数とする。x, y が全ての実数を動くとき，定積分

$$\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 dt$$

の最小値を I_n とおく。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。

(2019-1)

$\boxed{\textbf{100}}$ m を 2 以上の自然数，e を自然対数の底とする。

(1) 方程式 $xe^x - me^x + m = 0$ を満たす正の実数 x の値はただ 1 つであることを示せ。また，その値を c とするとき，$m-1 < c < m$ となることを示せ。

(2) $x > 0$ の範囲で $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^m}$ は $x = c$ で最小となることを示せ。

(3) a_m を (2) で求められる $f(x)$ の最小値とするとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{\log a_m}{m \log m}$ を求めよ。

(1999-1)

$\boxed{\textbf{101}}$ 以下において，$f(x)$ はすべての実数 x において微分可能な関数とし，$F(x) = e^x f(x)$ とおく。e は自然対数の底である。

(1) 定数関数でない関数 $f(x)$ で条件 (A)

「すべての x に対して $f(x+1) = f(x)$ である」

を満たすものの例をあげよ。

(2) 関数 $f(x)$ が条件 (B)

「すべての x に対して $f'(x) + f(x) \leqq 0$ である」

を満たすとき，$a < b$ ならば $F(a) \geqq F(b)$ であることを示せ。

(3) 関数 $f(x)$ が (1) の条件 (A) を満たすとき，$F(x+n)$(ただし，n は正の整数) を $F(x)$ を用いて表せ。

(4) 関数 $f(x)$ が (1),(2) の条件 (A), (B) をともに満たすとする。

i. $f(c) \geqq 0$ となる c が存在すれば，$f(c) = 0$ であることを示せ。

ii. ある c で $f(c) = 0$ であれば，すべての x で $f(x) = 0$ となることを示せ。

(1998-1)

$\boxed{\mathbf{102}}$ 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x = r(t)\cos t,\ y = r(t)\sin t$ で与えられている。ただし，$r(t) = 1 + \cos t$ であるとする。

（1） $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で，点 P の速さ（速度の大きさ）が 1 となる時刻を求めよ。

（2） $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の間に，点 P が動いた道のりを求めよ。

（3） 点 P が $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で描く曲線と x 軸，y 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ。

(1997-1)

$\boxed{\textbf{103}}$ m を正の定数とし，$x \geqq 0$ で定義された連続関数 $S(x)$ が常に正の値をとるとき，$x \geqq 0$ において関数 $u(x),\ v(x),\ f(x),\ g(x)$ を

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x S(t)dt + m, & v(x) &= \int_0^x tS(t)dt + m, \\ f(x) &= \frac{v(x)}{u(x)}, & g(x) &= v(x) - xu(x) \end{aligned}$$

とおく。

(1) $g(0) > 0,\ g(1) < 0$ および $x > 0$ において $g'(x) < 0$ を示せ。

(2) $f(x) = x$ を満たす x の値がただ1つ存在することを示せ。

(3) $f(x) = x$ を満たす x の値を a とするとき，$f(x)$ の最小値を求めよ。

(1997-2)

$\boxed{\mathbf{104}}$ 自然数 $n>1$ に対して $a_n=\log[(n-1)!]+\dfrac{1}{2}\log n$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y=\log x$ 上の点 $(k,\ \log k)$ における接線と 2 直線 $x=k-\dfrac{1}{2}$ と $x=k+\dfrac{1}{2}$，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。ただし $k\geqq 2$ とする。

(2) $\log[(n-1)!]>\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\log\left(n-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{2}\log\left(\dfrac{3}{2}\right)-(n-2)$ を示せ。

(3) $a_n>n\log n-n+\dfrac{3}{2}\left[1-\log\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]$ を示せ。

(1996-3)

$\boxed{\textbf{105}}$ m, n を正の整数とし，a, b, c を実数とするとき，次の問いに答えよ。

（1） 次の定積分の値を求めよ。

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \ dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin mx \ dx$

（2） $I = \displaystyle\int_0^{\pi} (a\sin x + b\sin 2x + c\sin 3x - x)^2 dx$ とおく。I を最小にするような a, b, c の値と I の最小値を求めよ。

(1994-4)

$\boxed{\textbf{106}}$ 曲線 $y=f(x)$ 上の任意の点 $(a,\ f(a))$ における法線は点 $(0,\ cf(a))$ を通るものとする。ただし，c は $c \neq 1$ を満たす定数である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) この曲線は微分方程式 $(c-1)y\dfrac{dy}{dx}=x$ を満たすことを証明せよ。

(2) (1) の微分方程式を満たす曲線が $(0,\ 1)$ を通るとき，その曲線の方程式を求め，その図をかけ。

(3) $c<1$ のとき，(2) で得た曲線を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積が π となるように c を定めよ。

(1992-3)

$\boxed{\mathbf{107}}$ 数直線上を，時刻 $t=0$ に原点 O を出発して，次の速度 $v(t)$ で運動している点 P がある。

$$v(t)=t-3\ (0 \leqq t \leqq 8 \text{ のとき})$$
$$v(t)=5e^{8-t}\ (t \geqq 8 \text{ のとき})$$

(1) P が最も左にくるときの時刻と，その位置を求めよ。

(2) 時刻 t における P の位置を $p(t)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} p(t)$ を求めよ。

(1990-5)

$\boxed{\textbf{108}}$ 関数 $f(x)$ は，$f(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)(f(t)-1)dt+\frac{1}{3}$ を満たすものとする。

（1） $f(x)$ を求めよ。

（2） 曲線 $y=f(x)$ の凹凸および変曲点を調べ，概形を描け。

(1989-1)

$\boxed{\textbf{109}}$ 関数 $f(x)=x-\sin x \quad (0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2})$ を考える。曲線 $y=f(x)$ の接線で傾きが $\dfrac{1}{2}$ となるものを l とする。

（1） l の方程式と接点の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。

（2） a は (1) で求めたものとする。曲線 $y=f(x)$，直線 $x=a$，および x 軸で囲まれた領域を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(2014-1)

$\boxed{\textbf{110}}$ $a > 1$ とし，2 つの曲線

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \quad (x \geqq 0) \\ y = \dfrac{a^3}{x} \quad (x > 0) \end{cases}$$

を順に C_1，C_2 とする。また，C_1 と C_2 の交点 P における C_1 の接線を l_1 とする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 と y 軸および直線 l_1 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ。

(2) 点 P における C_2 の接線と直線 l_1 のなす角を $\theta(a)$ とする $\left(0 < \theta(a) < \dfrac{\pi}{2}\right)$。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a\sin\theta(a)$ を求めよ。

(2013-1)

$\boxed{\mathbf{111}}$ 原点 O を中心とし，点 $A(0,\ 1)$ を通る円を S とする。点 $B(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})$ で円 S に内接する円 T が，点 C で y 軸に接しているとき，以下の問いに答えよ。

(1) 円 T の中心 D の座標と半径を求めよ。

(2) 点 D を通り x 軸に平行な直線 l とする。円 S の短い方の弧 $\overset{\frown}{AB}$，円 T の短い方の弧 $\overset{\frown}{BC}$，および線分 AC で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

(2013-4)

$\boxed{\mathbf{112}}$ 円 $x^2+(y-1)^2=4$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

(2012-1)

$\boxed{\mathbf{113}}$ 実数 a と自然数 n に対して，x の方程式

$$a(x^2+|x+1|+n-1)=\sqrt{n}(x+1)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　この方程式が実数解を持つような a の範囲を，n を用いて表せ。

(2)　この方程式が，すべての自然数 n に対して実数解を持つような a の範囲を求めよ。

(2012-3)

$\boxed{\textbf{114}}$ 曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$ から直線 $y=x$ へ垂線を引き，交点を H とする。ただし，$t>1$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) H の座標を t を用いて表せ。

(2) $x \geqq 1$ の範囲において，曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ。

(3) 曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1=S_2$ であるとき，t の値を求めよ。

(2011-1)

$\boxed{\mathbf{115}}$ a の正の定数とする。以下の問いに答えよ。

（1） 関数 $f(x)=(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}$ の極大値および極小値を求めよ。

（2） $x \geqq 3$ の時，不等式 $x^3e^{-x} \leqq 27e^{-3}$ が成り立つことを示せ。さらに，極限値

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}$$

を求めよ。

（3） k を定数とする。$y=x^2+2x+2$ のグラフと $y=ke^x+a^2$ のグラフが異なる 3 点で交わるための必要十分条件を，a と k を用いて表せ。

(2011-2)

$\boxed{\textbf{116}}$ xy 平面上に曲線 $y=\dfrac{1}{x^2}$ を描き，この曲線の第 1 象限内の部分を C_1，第 2 象限内の部分を C_2 と呼ぶ。C_1 上の点 $\mathrm{P}_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ から C_2 に向けて接線を引き，C_2 との接点を Q_1 とする。次に点 Q_1 から C_1 に向けて接線を引き，C_1 との接点を P_2 とする。次に，点 P_2 から C_2 に向けて接線を引き，接点を Q_2 とする。以下同様に続けて，C_1 上の点列 P_n と C_2 上の点列 Q_n を定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点 Q_1 の座標を求めよ。

(2) 三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ の面積 S_1 を求めよ。

(3) 三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の面積 S_n を求めよ。

(4) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

(2010-3)

$\boxed{\mathbf{117}}$ 曲線 C_1： $y=\dfrac{x^2}{2}$ の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における法線と点 $\mathrm{Q}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の交点を R とする。ただし，$b \neq a$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) b が a に限りなく近づくとき，R はある点 A に限りなく近く。A の座標を a で表せ。

(2) 点 P が曲線 C_1 上を動くとき，(1) で求めた点 A が描く軌跡を C_2 とする。曲線 C_1 と軌跡 C_2 の概形を描き，C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ。

(3) 曲線 C_1 と軌跡 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2009-3)

$\boxed{\mathbf{118}}$ $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ とおく。ただし，e は自然対数の底とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ の増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフをかけ。

(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$ を求めよ。

(2008-1)

$\boxed{\textbf{119}}$ $a>0$ に対して，$f(x)=a+\log x\ (x>0)$，$g(x)=\sqrt{x-1}\ (x \geqq 1)$ とおく。2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が，ある点 P を共有し，その点での共有の接線 l を持つとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) a の値，点 P の座標，および接線 l の方程式を求めよ。

(2) 2 曲線は点 P 以外の共有点を持たないことを示せ。

(3) 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2008-4)

$\boxed{\mathbf{120}}$ $f(x)=xe^x$ とおく。また，p を $p \geqq 0$ を満たす数とし，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線の方程式を $y=g(x)$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 0$ において $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) L を正の数とする。曲線 $y=f(x)$，接線 $y=g(x)$，および 2 直線 $x=0$，$x=L$ で囲まれた部分の面積を $S(p)$ とするとき，$p \geqq 0$ における $S(p)$ の最小値を与える p の値を求めよ。

(2007-1)

$\boxed{\textbf{121}}$ 次の問いに答えよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であること，また，e は自然対数の底で，$e<3$ であることを用いてよい。

(1)　自然数 n に対して，方程式 $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$ は $x>0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ。

(2)　(1) の二つの実数解を α_n，β_n $(\alpha_n<\beta_n)$ とするとき，

$$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}},\ ne<\beta_n$$

が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ を求めよ。

(2006-1)

$\boxed{\textbf{122}}$ 直線 $l: y = x + a$ が曲線 $C: y = 2\sin x$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ に接しているとき，次の問いに答えよ。ただし，$a \geqq 0$ とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 l で囲まれた図形の $y \geqq 0$ の範囲にある部分を，x 軸のまわりに回転する。この回転体の体積を求めよ。

(2005-1)

$\boxed{\textbf{123}}$ 定数 $a,\ b$ を係数とする 2 次関数 $y=-ax^2+b$ のグラフが，原点を中心とする半径 1 の円と異なる 2 点で接している。ただし，$a>0$ とする。

(1) $a,\ b$ の条件式，および接点の座標を求めよ。

(2) 与えられた二次関数のグラフと x 軸で囲まれる部分を，y 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積 V を a を用いて表せ。

(3) V を最小にする $a,\ b$ の値，およびそのときの V の値を求めよ。

(2002-2)

$\boxed{\textbf{124}}$ C_1, C_2 をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部分とする。

$$C_1 : y = -x^2 + 2x \ (0 \leqq x \leqq 2),\ C_2 : y = -x^2 - 2x \ (-2 \leqq x \leqq 0)$$

また，a を実数とし，直線 $y = a(x+4)$ を l とする。

(1) 直線 l と C_1 が異なる 2 つの共有点を持つための a の値の範囲を求めよ。

以下，a が (1) の条件を満たすとする。このとき，l と C_1 で囲まれた領域の面積を S_1，x 軸と C_2 で囲まれた領域で l の下側にある部分の面積を S_2 とする。

(2) S_1 を a を用いて表せ。

(3) $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \dfrac{1}{5}$ の範囲に存在することを示せ。

(2015-1)

$\boxed{\textbf{125}}$ 座標平面上の曲線 C_1，C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y = \log x \ (x > 0),\ C_2 : y = (x-1)(x-a)$$

とする。ただし，a は実数である。n を自然数とするとき，曲線 C_1，C_2 が 2 点 P, Q で交わり，P, Q の x 座標はそれぞれ 1，$n+1$ となっている。また，曲線 C_1 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を S_n，曲線 C_2 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を T_n とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a を n の式で表し，$a > 1$ を示せ。

(2) S_n と T_n をそれぞれ n の式で表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n \log T_n}$ を求めよ。

(2016-1)

$\boxed{\textbf{126}}$ 定数 $a > 0$ に対し，曲線 $y = a\tan x$ の $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ の部分を C_1，曲線 $y = \sin 2x$ の $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ の部分を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 が原点以外に交点を持つための a の条件を求めよ。

(2) a が (1) の条件を満たすとき，原点以外の C_1 と C_2 の交点を P とし，P の x 座標を p とする。P における C_1 と C_2 のそれぞれの接線が直行するとき，a および $\cos 2p$ の値を求めよ。

(3) a が (2) で求めた値のとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

(2017-1)

$\boxed{\textbf{127}}$ 原点を中心とする半径 3 の半円 $C : x^2 + y^2 = 9 \ (y \geqq 0)$ 上の 2 点 P と Q に対し，線分 PQ を $2:1$ に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 P の y 座標と Q の y 座標が等しく，かつ P の x 座標は Q の x 座標よりも小さくなるように P と Q が動くものとする。このとき，線分 PR が通過してできる図形 S の面積を求めよ。

(2)　点 P を $(-3,\ 0)$ に固定する。Q が半円 C 上を動くとき線分 PR が通過してできる図形 T の面積を求めよ。

(3)　(1) の図形 S から (2) の図形 T を除いた図形と第 1 象限の共通部分を U とする。U を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

(2018-2)

$\boxed{\mathbf{128}}$ 長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし，高さが $\sqrt{3}$ の直円錐を考える。この直円錐の側面上で 2 点 A, B を結ぶ最短の道を l とする。直円錐の頂点を C，底面の中心を O とし，以下の問いに答えよ。

(1) 直円錐の展開図を用いて l の長さを求めよ。

(2) l 上の点 P に対して，線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする。$\angle\mathrm{AOQ} = \theta$ として CP^2 を $\sin\theta$ で表せ。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(3) P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし，A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする。$0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲で $\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ の最大値を求めよ。

(1992-2)

$\boxed{\textbf{129}}$ 平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて

$$x = \sin t - t\cos t,\ y = \cos t + t\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で与えられている。

(1) 曲線 C の長さを求めよ。

(2) 曲線 C 上の各点 P において，P における接線と P で直行する直線を考える。この直線上の点で原点までの距離が最短となる点は，P を動かすときどんな図形を描くか。

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin 2t\ dt$ を求めよ。

(4) 曲線 C と y 軸および直線 $y = -1$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

(1998-3)

$\boxed{\textbf{130}}$ 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{n^2}=1\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$

の第一象限内の部分と，直線 $y=\dfrac{n\sqrt{3}}{2}x$ および x 軸で囲まれる部分を A_n とし，A_n の面積を S_n で表す。また，A_n の内部および周上の点 $(x,\ y)$ のうち，x と y がともに整数であるものの総数を T_n で表す。次の問いに答えよ。

(1)　$T_n,\ S_n$ を求めよ。

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}$ を求めよ。

(1995-3)

$\boxed{\textbf{131}}$ xy 座標平面で点 P は点 A(1, 0) を始点として，原点 O を中心とする半径 1 の円周上を正の向きに一定の速さで回転する。点 Q は動径 OP 上を原点 O から出発して一定の速さで P に向かって進み，点 P が円を 1 周して点 A に戻ってきたときにちょうど点 P に到達するとする。このときの点 Q の軌跡を C, $\angle$POA$=\theta$，そして C と線分 OQ とで囲まれる領域の面積を $S(\theta)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) Q の座標を θ を用いて表せ。

(2) 上の座標を Q(θ) とする。点 Q(π) における C の接線と y 軸との交点の座標を求めよ。

(3) $0 \leqq \theta_1 < \theta_2 \leqq 2\pi$ のとき

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1}{2\pi}\right)^2 < \frac{S(\theta_2)-S(\theta_1)}{\theta_2-\theta_1} < \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_2}{2\pi}\right)^2$$

を示せ。

(4) $\dfrac{dS(\theta)}{d\theta}$ および $S(\theta)$ を求めよ。

(1994-3)

$\boxed{\mathbf{132}}$ 動点 P は原点から出発して，時刻 t における座標は $(t,\ 0)$ であるとする。また動点 Q は時刻 $t=0$ のとき点 $(0,\ 1)$ から出発して点 P との距離を一定に保ちながら，常に点 P に向かって (すなはち Q の速度ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と平行であるように) 進むとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 点 Q の時刻 t における座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 点 Q の y 座標が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となったときの x 座標を a，y 座標が $\dfrac{1}{2}$ となった時の x 座標を b とする。点 Q の描く曲線と x 軸，直線 $x=a$，および直線 $x=b$ により囲まれる領域の面積を求めよ。

(1993-5)

$\boxed{\textbf{133}}$ 3 次関数 $f(x) = x(x^2 + px + q)$ は $x = \alpha$ $(\alpha \neq 0)$ で極大値 0 をとり，$x = \beta$ で極小値 -32 を取るとする。次の問いに答えよ。

(1) α, β, p, q を求めよ。

(2) $f(x)$ を x 軸の正の方向へ c $(c > 0)$ だけ平行移動した関数を $g(x)$ とするとき，2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれる部分の面積を c で表せ。

(1991-3)

$\boxed{\textbf{134}}$ 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の第一象限内の点 P においてこの楕円に引いた接線が点 $(4,\ 0)$ を通るとする。

(1) 点 P の座標を求めよ。

(2) O を原点，A を楕円の頂点 $(2,\ 0)$ とする。第一象限において，線分 OA, OP および楕円の弧 $\overset{\frown}{AP}$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1990-4)

$\boxed{\textbf{135}}$ (1) $a>0,\ b>0$ のとき，2 曲線 $y=\cos^2\dfrac{x}{a}$ と $y=\sin^2\dfrac{x}{b}$ の交点の x 座標で最小な正の値を求めよ。

(2) $a>0$ として，4 曲線

$$C_1 : y=\cos^2\frac{x}{a},\qquad C_2 : y=\sin^2\frac{x}{a},$$
$$C_3 : y=\cos^2\frac{x}{a+1},\quad C_4 : y=\sin^2\frac{x}{a+1}$$

を考える。p を C_1 と C_2 の交点の x 座標で最小な正の値とし，q を C_3 と C_4 の交点の x 座標で最小な正の値とするとき，$p \leqq x \leqq q$ の範囲でこの 4 曲線によって囲まれる図形の面積を求めよ。

(1989-3)

$\boxed{\textbf{136}}$ 座標平面上の楕円

$$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{4}=1 \quad \cdots ①$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 楕円①と直線 $y=x+a$ が交点をもつときの a の値の範囲を求めよ。

(2) $|x|+|y|=1$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体がなす図形の概形をかけ。

(3) 点 $(x,\ y)$ が楕円①上を動くとき，$|x|+|y|$ の最大値，最小値とそれを与える $(x,\ y)$ をそれぞれ求めよ。

(2014-3)

$\boxed{\textbf{137}}$ 中心 $(0,\ a)$，半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点 P が原点 $(0,\ 0)$ を出発するとする。次の問いに答えよ。

(1) 円が角 t だけ回転したとき，点 P の座標を求めよ。

(2) t が 0 から 2π まで動いて，円が一回転した時の点 P の描く曲線を C とする。曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

(3) (2) の曲線 C の長さを求めよ。

(2010-4)

$\boxed{\mathbf{138}}$ 実数 t が $t \geqq 0$ の範囲を動くとき，xy 平面上で点 $\mathrm{P}(t^2,\ e^{-t})$ が描く曲線を C とする。a を正の実数とし，曲線 C と x 軸，y 軸，および直線 $x = a^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) $a > 0$ の範囲で関数 $S(a)$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフの概形を描け。ただし，$\displaystyle\lim_{a \to \infty} ae^{-a} = 0$ であることを用いてよい。

(3) $S(a) = 1.35$ となる a が $2 < a < 3$ の範囲に存在することを示せ。ただし，必要なら $2.5 < e < 3$ であることを用いてよい。

(2005-5)

$\boxed{\textbf{139}}$ 座標平面上を動く点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ の時刻 t における座標が

$$\begin{cases} x(t) = \cos\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases} \quad (0 \leqq t < 2\pi)$$

で与えられているとし，この点の軌跡を C とする。

(1) P が原点を通るときの速度ベクトルを求めよ。

(2) C が x 軸，y 軸に関して対称であることを示せ。

(3) C の概形を描け。

(4) C が囲む図形の面積を求めよ。

(2004-3)

$\boxed{\textbf{140}}$ xy 平面上で，

$$x = r(t)\cos t,\ y = r(t)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする。

(1) $r(t) = e^{-t}$ のとき，x の最小値と y の最大値を求め，C の概形を図示せよ。

(2) 一般に，全て実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し，

$$\int_0^{\pi} \{r(t)\}^2 r'(t)\sin^2 t\cos t dt = \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right) dt$$

が成り立つことを示せ。ここで，$r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である。

(3) (1) で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を，x 軸の周りに一回転してできる立体の体積 V は

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} e^{-3t}\sin t dt$$

と表せることを示せ。

(2003-1)

$\boxed{\textbf{141}}$ θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である定数とする。座標平面上で，$a^2 > 4b$ を満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から放物線 $y = \dfrac{1}{4}x^2$ に引いた二つの接線の接点を Q，R とし，接線 PQ, PR の傾きをそれぞれ m_1，m_2 とおく。点 P は $\angle\mathrm{QPR} = \theta$ を満たしている。点 P の全体が作る図形を G とする。

(1) $m_1 < 0 < m_2$ の時，$\tan\theta$ を m_1 と m_2 を用いて表せ。

(2) G を数式で表せ。

(3) $\dfrac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ。

(2003-5)

$\boxed{\mathbf{142}}$ 平面上を運動する点 P$(x,\ y)$ の時刻 t での x 座標と y 座標が

$$\begin{cases} x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \\ y = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \end{cases}$$

で表されている。ただし，e は自然対数の底である。原点を O，点 $(0,\ 1)$ を M とする。t が $t \geqq 0$ の範囲で変化したとき点 P が描く曲線を C とする。時刻 t において，曲線 C，線分 OM，および線分 OP で囲まれる図形の面積を $A(t)$ で表し，曲線 C と線分 MP で囲まれる図形の面積を $S(t)$ で表す。次の問いに答えよ。

(1) 点 P$(x,\ y)$ の座標 $x,\ y$ に対して y を x を用いて表せ。

(2) 時刻 t を用いて $A(t)$ と $S(t)$ を表せ。

(3) $A(t) - S(t)$ が最大となる時刻 t を求めよ。

(2002-1)

$\boxed{\textbf{143}}$ 平面上の点 P の x 座標と y 座標が，変数 θ の関数 $f(\theta)=\dfrac{(\theta-\pi)^2}{2\pi^2}+\dfrac{1}{2}$ を用いて

$$\begin{cases} x=f(\theta)\cos\theta \\ y=f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

と表されている。θ が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲で変化したとき，点 P が描く曲線を C とする。点 P を $\mathrm{P}(\theta)$ で表し，$\mathrm{P}_1=\mathrm{P}(0)$, $\mathrm{P}_2=\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\mathrm{P}_3=\mathrm{P}(\pi)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 方程式

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

で与えられる楕円が点 P_1 を通るとする。このとき，点 P_3 がこの楕円の内部に含まれる (ただし，楕円の上にない) ための必要十分条件を α のみを用いて表せ。

(2) 点 P_2 における曲線 C の接線を l とする。l の方程式を求めよ。

(3) 次の条件 i ii iii を満たす楕円 D を考える。

i. D の軸の一つは x 軸上にある。

ii. D は点 P_1, P_2 を通る。

iii. 点 P_2 における D の接線は l である

このとき，点 P_3 は楕円 D の内部に含まれるかどうか判定せよ。

(2002-5)

$\boxed{\textbf{144}}$ 関数 $f(x)$ の第 2 次導関数は常に正とし，関数 $y=f(x)$ のグラフ G 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線と x 軸のなす角を $\theta(t)$ とする。ただし $\theta(t)$ は $-\dfrac{\pi}{2}<\theta(t)<\dfrac{\pi}{2}$ で，接線の傾きが正，負，0 に従って正，負，0 の値をとるものとする。また,，点 P における G の法線上に P から距離 1 の点 $\mathrm{Q}(\alpha(t),\ \beta(t))$ を G の下側にとる。

(1) $\theta(t)$ はつねに増加することを示せ。

(2) $\alpha(t)$, $\beta(t)$ を求めよ。

(3) t が a から b $(a<b)$ まで変化するとき，点 P，Q が描く曲線の長さをそれぞれ L_1，L_2 とする。L_2-L_1 を $\theta(a)$ と $\theta(b)$ を用いて表せ。

(2001-5)

$\boxed{\textbf{145}}$ 平面上の点の極座標を，原点 O からの距離 $r\ (\geqq 0)$ と偏角 θ を用いて $(r,\ \theta)$ で表す。

(1) 平面上の 2 曲線 $C_1 : r = 2\cos(\pi+\theta)$, $C_2 ; r = 2(\cos\theta + 1)$, $\left(\text{ただし,}\ \dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}\right)$ の概形を描き，この 2 曲線 C_1, C_2 の交点の極座標を求めよ。

(2) 平面上の 3 点 P_1, P_2, E の極座標をそれぞれ $(r_1,\ \theta_1)$, $(r_2,\ \theta_2)$, $(1,\ 0)$ とするとき，三角形 OEP_1 と三角形 $\mathrm{OP}_2\mathrm{Q}$ とが相似となる点 Q を $\mathrm{P}_1{*}\mathrm{P}_2$ で表す。点 $\mathrm{P}_1{*}\mathrm{P}_2$ の極座標を求めよ。ただし，点 Q は $\angle\mathrm{EOP}_1 = \angle\mathrm{P}_2\mathrm{OQ}$ となるように向きも込めて定める。

(3) 3 点 O, P_1, P_2 が同一直線上にないとき，四辺形 $\mathrm{OP}_1\mathrm{RP}_2$ が平行四辺形となるような点 R を $\mathrm{P}_1{\circ}\mathrm{P}_2$ で表す。P_1, P_2 の極座標が $(r_1,\ \theta_1)$, $(r_2,\ \theta_2)$ で $r_1 = r_2 = r$ のとき，点 $\mathrm{P}_1{\circ}\mathrm{P}_2$ の極座標を求めよ。

(4) さらに，平面上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ として，実数 k に対し点 $k\mathrm{P}$ を，$k \geqq 0$ のときは極座標が $(kr,\ \theta)$ となる点，$k < 0$ の時は $(|k|r,\ \theta+\pi)$ となる点とする。(1) で求めた 2 曲線 C_1, C_2 の交点を V として，点 $k(\mathrm{V}\circ(\mathrm{V}*\mathrm{V}))$ が曲線 C_1 上にあるための k の条件を求めよ。

(2000-5)

$\boxed{\textbf{146}}$

(1) 実数 $k \geqq 0$ に対し，

$$\int_0^{2\pi} \left\{ y\left(x\cos\theta + \frac{1}{2}x^2\right) - \left(x\cos\theta + \frac{1}{2}x^2\right)^2 \right\} \cos\theta d\theta = 2k\pi$$

を満たす xy 平面内の曲線の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた曲線と直線 $y = a$ との共有点が 1 個であるような実数 a の範囲を求めよ。

(1999-3)

$\boxed{\mathbf{147}}$ (1) 平面上に半径が $R,\ r(R>r)$ の 2 円があり，それらの中心間の距離が l であるとする。これらの 2 円の円周が共有点をもつための必要十分条件を $R,\ r,\ l$ を用いて表せ。

(2) 座標平面上で x 軸を準線とし，定点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を通る放物線について考える。ただし，$a>0$ とする。

i. そのような放物線の焦点 $\mathrm{F}(s,\ t)$ 全体はどのような図形を描くか。

ii. x 軸上にない点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ がそのような放物線上の点であるための必要十分条件を求めよ。

(1998-10)

$\boxed{\textbf{148}}$ (1) 次の$\boxed{}$の中をうめよ。

(i) 2直線 a, b が1点 P で交わるとき a, b 上にない点 X について，X から a, b にそれぞれ垂線 XJ, XK を引く。ただし，J, K は P と異なるとする。このとき，X が ∠JPK の二等分線上にあるための必要十分条件は，XJ=$\boxed{\text{あ}}$が成り立つことである。

(ii) 2点 C, D に対し，点 X が線分 CD の垂直二等分線上にあるための必要十分条件は，$\boxed{\text{い}}=\boxed{\text{う}}$が成り立つことである。

(2) △ABC の ∠A の二等分線とこの三角形の外接円との交点で A と異なる点を D とおく。

(i) 線分 AD 上に DB=DX となる点 X をとると，X より辺 BC，AB にひいた垂線の長さは等しいことを示せ。

(ii) 線分 AD の D の方向への延長上にある点 Y から，直線 BC，AB にひいた垂線の長さが等しいならば，D は線分 XY の中点となることを示せ。

(1997-)

$\boxed{\textbf{149}}$ 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a,\ b>0)$
の接線 $y=mx+n$ にこの双曲線の焦点 F$(c,\ 0)$, F'$(-c,\ 0)$ $(c>0)$ より垂線 FH, F'H' をひく。

(1) n を m で表せ。

(2) H, H' は原点 O を中心とする半径 a の円周上にあることを示せ。

(3) 原点 O から接線 $y=mx+n$ への距離を t とするとき，△HOH' の面積 S を t で表せ。さらにこの接線を動かすとき，t のとりうる範囲および S の最大値を求めよ。

(1997-10)

$\boxed{\textbf{150}}$ 曲線 $y=f(x)$ $(x>0)$ 上の任意の点 $(t,\ f(t))$ における接線は y 軸と点 $(0,\ (t^2-1)f(t))$ で交わるという。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ の満たす微分方程式を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ が点 $(1,\,1)$ を通るとき，関数 $f(x)$ を求めよ。

(3) 上に求めた関数 $f(x)$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ。

(1995-4)

$\boxed{\textbf{151}}$ 放物線の焦点を通る直線がこの放物線で切られてできる線分を考えるとき，それらの中点の軌跡はやはり放物線となる。次の問いに答えよ。

(1) $p>0$ とする。放物線 $y^2=4px$ とその焦点 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ からこの方法で得られる放物線の式とその焦点を求めよ。

(2) 放物線 $\mathrm{P}_0 : y^2=4x$ からこの方法で得られる放物線を P_1 とする。さらに P_1 からこの方法で得られる放物線を P_2 とする。これを繰り返して得られる放物線 P_n の式を求めよ。また，$n\to\infty$ のとき，放物線 P_n の焦点はどのような点に近づくか。

(1993-1)

$\boxed{\textbf{152}}$ 3 次曲線 $C : y = x^3 + 9x^2 + 9x + 2$ 上に点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$ をとる。ただし，$x_0 > 0$ とする。さらに自然数 n に対して C 上の点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を「P_{n-1} を通る直線が点 $\mathrm{P}_n(\neq \mathrm{P}_{n-1})$ で C と接する」ように定める。このとき次の問いに答えよ。

(1) $n > 0$ のとき，関係式 $2x_n + x_{n-1} + 9 = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) x_n を x_0 で表せ。

(3) 点 P_n は n を大きくすると C 上の定点に近づくことを示し，その定点を求めよ。

(1992-2)

$\boxed{\textbf{153}}$ t を実数とするとき，2 次方程式

$$z^2 + tz + t = 0$$

について，次の問いに答えよ

(1)　この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解を持つような t の範囲と，そのときの虚数解を全て求めよ。

(2)　(1) の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。t が (1) で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め，図示せよ。

(3)　複素数平面上で，点 z が (2) の図形 C 上を動くとき，

$$w = \frac{iz}{z+1}$$

で表される点 w が描く図形を求め，図示せよ。

(2005-3)

$\boxed{\mathbf{154}}$ $0<a<1$ である定数 a に対し，複素数平面上で $z=t+ai$ (t は実数全体を動く) が表す直線を l とする。ただし，i は虚数単位である。

(1) 複素数 z が l 上を動くとき，z^2 が表す点の軌跡を図示せよ。

(2) 直線 l を，原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする。m と (1) で求めた軌跡との交点の個数を $\sin\theta$ の値で場合分けして求めよ。

(2003-4)

$\boxed{\textbf{155}}$ 複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円 C 上に相異なる 3 点 z_1，z_2，z_3 をとる。次の問いに答えよ。

(1) $w_1 = z_1 + z_2 + z_3$ とおく。点 w_1 は 3 点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形の垂心になることを示せ。ここで三角形の垂心とは，各頂点から対辺またはその延長線上に下ろした 3 本の垂線の交点のことであり，これら 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。

(2) $w_2 = -\overline{z_1}z_2z_3$ とおく。$w_2 \neq z_1$ のとき，2 点 z_2，z_3 を通る直線上に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線が円 C と交わる点は w_2 であることを示せ。ここで $\overline{z_1}$ は z_1 に共役な複素数である。

(3) 2 点 z_2，z_3 を通る直線とこの直線上に点 z_1 から下ろした垂線との交点は，点 w_1 と w_2 を結ぶ線分の中点であることを示せ。ただし，$w_1 = w_2$ のときは，w_1 と w_2 の中点は w_1 と解釈する。

(2002-4)

$\boxed{\textbf{156}}$ 複素数平面上の点 z を考える。

(1) 実数 $a,\ c$ と複素数 b が $|b|^2 - ac > 0$ を満たすとき

$$az\overline{z} + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0$$

を満たす点 z は，$a \neq 0$ のとき，どのような図形を描くか。ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す。

(2) 0 でない複素数 d と複素数平面上の異なる 2 点 $p,\ q$ に対して

$$d(z-p)(\overline{z}-\overline{q}) = \overline{d}(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$$

をみたす点 z はどのような図形を描くか。

(2001-4)

$\boxed{\textbf{157}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数，i を虚数単位とし，z を $z = \cos\theta + i\sin\theta$ で表される複素数とする。このとき，整数 n に対して次の式を証明せよ。

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}(z^n + \frac{1}{z^n}),\ \ \sin n\theta = -\frac{i}{2}(z^n - \frac{1}{z^n})$$

(2) 次の方程式を満たす実数 x $(0 \leqq x < 2\pi)$ を求めよ。

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

(3) 次の式を証明せよ。

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

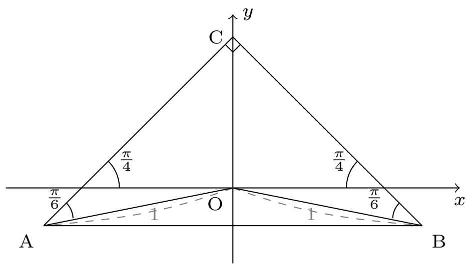
(2016-5)

$\boxed{\textbf{158}}$ 2 つの複素数 $\alpha = 10000+10000i$ と $w = \dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{4}i$ を用いて, 複素数平面上の点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ を $z_n = \alpha w^n$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ により定める。ただし，i は虚数単位を表す。2 と 3 の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$ として，以下の問いに答えよ。

(1) z_n の絶対値 $|z_n|$ と偏角 $\arg z_n$ を求めよ。

(2) $|z_n| \leqq 1$ が成り立つ最小の自然数 n を求めよ。

(3) 下図のように，複素数平面上の $\triangle\mathrm{ABC}$ は線分 AB を斜辺とし，点 $\mathrm{C}\left(\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)$ を 1 つの頂点とする直角二等辺三角形である。なお，A, B を表す複素数の虚部は負であり，原点 O と 2 点 A, B の距離はともに 1 である。点 P_n が $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部に含まれる最小の自然数 n を求めよ。



(2017-5)

$\boxed{\textbf{159}}$ α を複素数とする。等式 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ を満たす複素数 z を全て求めよ。ただし，i は虚数単位である。

(2018-5)

$\boxed{\textbf{160}}$ 1個のサイコロを3回投げて出た目を順に $a,\ b,\ c$ とする。二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解 $z_1,\ z_2$ を表す複素数平面上の点をそれぞれ $\mathrm{P}_1(z_1),\ \mathrm{P}_2(z_2)$ とする。また，複素数平面上の原点を O とする。以下の問いに答えよ。

(1) P_1 と P_2 が一致する確率を求めよ。

(2) P_1 と P_2 がともに単位円の周上にある確率を求めよ。

(3) P_1 と O を通る直線を l_1 とし，P_2 と O を通る直線を l_2 とする。l_1 と l_2 のなす鋭角が $60°$ である確率を求めよ。

(2019-3)

$\boxed{\textbf{161}}$ $a,\ b$ を複素数，c を純虚数でない複素数とし，i を虚数単位とする。複素数平面において，点 z が虚数全体を動くとき

$$w = \frac{az+b}{cz+1}$$

で定める点 w の軌跡を C とする。次の 3 条件が満たされているとする。

(i) $z=i$ のときに $w=i$ となり，$z=-i$ のときに $w=-i$ となる。

(ii) C は単位円の周に含まれる。

(iii) 点 -1 は C に属さない。

このとき $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。さらに C を求め，複素数平面上に図示せよ。

(2019-5)

$\boxed{\textbf{162}}$ k を実数として，2 次方程式 $x^2+2kx+3k=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha \neq \beta)$ とする。i を虚数単位として，次の問いに答えよ。

(1) $|\alpha - i|^2 + |\beta - i|^2$ の値を k を用いて表せ。

(2) 複素数平面において，複素数 $\alpha,\ \beta,\ i$ を表す点をそれぞれ A, B, P とする。$\angle$APB が直角になるような k の値を求めよ。

(1999-7)

$\boxed{\mathbf{163}}$ k を実数とするとき，方程式

$$x^3-(2k+1)x^2+(4k^2+2k)x-4k^2=0$$

の解を z_1，z_2，z_3 とし，それらを複素数平面上の点とみなす。

(1) z_1，z_2，z_3 が一直線上にあるような k の値を求めよ。

(2) z_1，z_2，z_3 が直角三角形をなすような k の値を求めよ。

(3) 3 点 z_1，z_2，z_3 を原点のまわりに角 θ だけ回転してえられる 3 点を w_1，w_2，w_3 とする。w_1，w_2，w_3 およびそれらと共役な点 $\overline{w_1}$，$\overline{w_2}$，$\overline{w_3}$ とが原点中心の正六角形の頂点となるとき，k および θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の値を求めよ。

(1998-8)

$\boxed{\textbf{164}}$ 複素平面において，点 z に関する次の条件を考える。

「原点と異なる点 α を中心として点 z を角 θ だけ回転すると，移った点の絶対値が α の絶対値の $\dfrac{1}{2}$ になる」

(1) $\alpha = i,\ \theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，上の条件を満たす点 z の全体はどんな図形になるか。

(2) $(\alpha,\ \theta)$ を一組固定したとき，上の条件を満たす点 z の全体はどんな図形となるか。

(3) 点 α が実軸上にあるとき，(2) の図形が虚軸に接するときの θ を求めよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1997-7)

$\boxed{\textbf{165}}$ 実数 x, y, t に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

を考える。$(AB)^2$ が対角行列，すなはち $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の形の行列であるとする。

(1)　命題「$3x-3y-2t \neq 0 \Longrightarrow A = tB$」を証明せよ。

以下 (2),(3),(4) では，さらに $A^2 \neq E$ かつ $A^4 = E$ であるとする。ただし，E は単位行列を表す。

(2)　$3x-3y-2t=0$ を示せ。

(3)　x と y をそれぞれ t の式で表せ。

(4)　x, y, t が整数のとき，行列 A を求めよ。

(2013-5)

$\boxed{\textbf{166}}$ 2 次の正方行列 A, B はそれぞれ

$$A\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}7\\-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-11\end{pmatrix},$$
$$B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix},\qquad B\begin{pmatrix}8\\-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\10\end{pmatrix}$$

を満たすものとする。このとき以下の問いに答えよ。ただし，E は 2 次の単位行列を表すものとする。

(1) 行列 A, B, A^2, B^2 を求めよ。

(2) $(AB)^3=E$ であることを示せ。

(3) 行列 A から始めて，B と A を交互に右からかけて得られる行列

$$A,\ AB,\ ABA,\ ABAB,\ \cdots,$$

および行列 B から始めて A と B を交互に右からかけて得られる行列

$$B,\ BA,\ BAB,\ BABA,\ \cdots$$

を考える。これらの行列の内で，相異なるものを全て成分を用いて表せ。

(2012-2)

$\boxed{\textbf{167}}$ 実数を成分とする 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。平面上の点 P$(x,\ y)$ に対し，点 Q $(X,\ Y)$ を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

により定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき，Q が放物線 $9X = 2Y^2$ 全体の上を動くという。このとき，行列 A を求めよ。

(2) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき，Q はつねに円 $X^2 + (Y-1)^2 = 1$ の上にあるという。このとき，行列 A を求めよ。

(3) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき，Q がある直線 L<u>全体</u> の上を動くための $a,\ b,\ c,\ d$ についての条件を求めよ。また，その条件が成り立っているとき，直線 L の方程式を求めよ。

(2010-5)

$\boxed{\textbf{168}}$ 2 次の列ベクトル $X,\ Y,\ Z$ は大きさが 1 であり，$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ かつ $Y \neq X$ とする。ただし，一般に 2 次の列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の大きさは $\sqrt{x^2+y^2}$ で定義される。また，2 次の正方行列 A が

$$AX = Y, \quad AY = Z, \quad AZ = X$$

を満たすとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $Y \neq -X$ を示せ。

(2) Z は $Z = sX + tY$ ($s,\ t$ は実数) の形にただ一通りに表せることを示せ。

(3) $X + Y + Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を示せ。

(4) 行列 A を求めよ。

(2009-4)

$\boxed{\textbf{169}}$ p を $0 < p < 1$ を満たす数とし，行列 $A,\ B,\ C$ をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。さらに，行列 A_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を

$$A_1 = A,\ A_{n+1} = A_nB - BA_n + C\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$A_2,\ A_3$ を求めよ。

(2)　$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, $\Delta_n = a_nd_n - b_nc_n$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Delta_n$ を求めよ。

(2007-2)

$\boxed{\textbf{170}}$ 行列 A と列ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ を

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

とし，列ベクトル $\overrightarrow{p}_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ を

$$\overrightarrow{p}_1=\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{p}_{n+1}=A\overrightarrow{p}_n+\overrightarrow{b}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

で定める。このとき次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{p}=A\overrightarrow{p}+\overrightarrow{b}$ を満たす列ベクトル $\overrightarrow{p}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{q}_n=\overrightarrow{p}_n-\overrightarrow{p}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。$\overrightarrow{q}_{n+1}$と$\overrightarrow{q}_n$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して A^n を求めよ。

(4) $\overrightarrow{p}_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ。

(2005-2)

$\boxed{\textbf{171}}$ 2 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

に対して，次の問いに答えよ。ただし，a, b は定数とする。

(1) $(a+b)^4$, $(a-b)^4$ を展開せよ。

(2) A^4 を $(a+b)^4$, $(a-b)^4$ を用いて表せ。

(3) 自然数 n に対して，A^n を求めよ。

(4) $0 < a < 1$ とし $b = 1 - a$ としたときの A^n の $(1,\ 1)$ 成分を x_n とする。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

(2004-2)

$\boxed{\mathbf{172}}$ 座標平面上に点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ があり，P は $|a| \leqq \dfrac{1}{2}$，$|b| \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲を動く。また，点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の座標は連立 1 次方程式 $AX = B$ の解になっている。ただし，

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1+a \\ -1+b \end{pmatrix}$$

である。

(1) 点 P が原点 O にあるときの点 Q の位置を点 R とする。P≠O のとき，$\dfrac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{OP}}$ の最大値を求め，その最大値を与える点 P の全体を図示せよ。

(2) OQ の最小値と，その最小値を与える点 P の座標を求めよ。

(2003-5)

$\boxed{\textbf{173}}$ 2次の正方行列 A が零行列でなく $A^2 = A$ を満たすとき，べき等行列という。次の問いに答えよ。

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ はべき等行列であり，かつ $ad - bc \neq 0$ とする。このとき，A を求めよ。

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $ad - bc = 0$ を満たすとする。このとき，A がべき等行列であるための必要十分条件を a と d のみを用いて表せ。

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ はともにべき等行列とする。$A + B$ がべき等行列になるとき，$A + B$ を求めよ。また，そのような A，B の組を一つあげよ。

(2002-5)

$\boxed{\textbf{174}}$ 3 次単位行列 E の第 1 行の -2 倍を第 3 行に加えた行列を P とする。

(1) $QP=E$ となる行列 Q を求めよ。

(2) 行列

$$R=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

について， $S=PR$ を求めよ。

(3) 3×3 行列 A と 3×1 行列 B が与えられているとき，$PAX=PB$ を満たす行列 X は，また $AX=B$ を満たすことを示せ。

(4) x, y, z を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 3x-2y+z &= a \\ -3x+4y-5z &= b \\ 6x-5y+4z &= c \end{cases}$$

の係数が作る行列を A として，この方程式を $AX=B$ で表すとき，この両辺に左から P をかけた連立 1 次方程式をかけ。

(5) 上と同様の操作を繰り返すことにより，(4) で与えた連立 1 次方程式が解を持つための条件を求め，解があるときはその解を全て求めよ。

(2000-5)

$\boxed{\textbf{175}}$ $a,\ b$ を与えられた実数とする。

(1) 方程式 $ax=b$ がただ１つの解をもつときの条件を述べよ。

また，また，この方程式が無数の解をもつときの条件および，解を持たないときの条件を述べよ。

(2) 連立１次方程式

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2a+3 & 3 & -2 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がただ１つの解をもつときの a の条件を求め，このときの解を求めよ。

(3) (2) の連立１次方程式が無数の解をもつときの a の条件を求めよ。さらに，このときの解を $x=u,\ y=v,\ z=w$ とするとき，$v,\ w$ を u で表せ。

(4) (2) の連立１次方程式が解をもたないときの a の条件を求めよ。

(1997-9)

$\boxed{\textbf{176}}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ に対して，行列 $B^{-1}AB$ が表す１次変換を f とする。ただし，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である，次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(\sin\theta,\ \cos\theta)$ の f による像を求めよ。

(2) f が直線 $y=x$ をそれ自身に移すとき，θ の値を求めよ。

(3) 上で求めた θ に対して，f は原点を通るある直線に関する対称移動であることを示し，その直線の方程式を求めよ。

(1996-1)

$\boxed{\textbf{177}}$ 次の問いに答えよ。

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $b \neq 0$ を満たすとする。行列 A で表される1次変換 f によって直線 $y=\alpha x$ はそれ自身に移り，また直線 $y=\beta x$ もそれ自身に移るという。$\alpha \neq \beta$ のとき，この直線 $y=\alpha x$ と $y=\beta x$ とは直交することを証明せよ。

(2) 正の整数 $l,\ m,\ n$ で $(l^m)^n > l^{m^n}$ を満たす組 $(l,\ m,\ n)$ を全て求めよ。

(1995-1)

$\boxed{\textbf{178}}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって表される１次変換を f とする。次の問いに答えよ。

(1) $A^2 = E$, $A \neq \pm E$ のとき，$ad - bc = -1$ を示せ。ただし，E は単位行列である。

(2) さらに，$f(7,\ -1) = (-1,\ -7)$ のとき，A を求めよ。

(3) 上で求めた f によって不変であるような原点を通る直線を求めよ。

(1994-2)

$\boxed{\mathbf{179}}$ 正の数 t に対し $A=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right) & \dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right) & \dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right) \end{pmatrix}$

とおく。次の問いに答えよ。

(1) 行列 A の表す 1 次変換による単位円 $x^2+y^2=1$ の像 C を表す式を求めよ。

(2) 曲線 C を原点のまわりに 45° 回転して得られる曲線の式を求めよ。

(3) t が正の数全体を動くとき，単位円 $x^2+y^2=1$ 上の定点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$ の行列 A の表す 1 次変換によって移る点の軌跡を求めよ

(1993-4)

$\boxed{\textbf{180}}$ 平面上の２点 P$(a,\ c)$, Q$(b,\ d)$ に対して，１次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を考える。原点 O を中心とする単位円 $x^2+y^2=1$ を C とする。

(1) P, Q がともに C 上にあり，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が直交するとき，この１次変換は C 上の任意の点を C 上に移すことを示せ。

(2) 逆に，この１次変換が C 上の任意の点を C 上の点に移すならば P, Q はともに C 上の点であり，かつベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は直交していることを示せ。

(1990-1)

$\boxed{\textbf{181}}$ 実数 a, b, c に対して，関数 $f(x)$ および行列 A を

$$\begin{aligned} f(x) &= a\cos^2 x + 2b\cos x\sin x + c\sin^2 x \\ A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とする。

(1) α, β は 2 次方程式 $t^2 - (a+c)t + ac - b^2 = 0$ の解で，$\alpha \leqq \beta$ であるとすると，関数 $f(x)$ の最小値は α に等しく，最大値は β に等しいことを示せ。

(2) 行列 A は $A = A^2$ を満たすとする。このとき関数 $f(x)$ の最小値と最大値を求めよ。

(1989-2)

182 下図のような四角形 ABCD において，直線 AB と直線 CD の交点 E，直線 BC と直線 AD の交点 F，直線 BD と直線 EF の交点 R，直線 RC と直線 AB の交点 G がえられたとする。

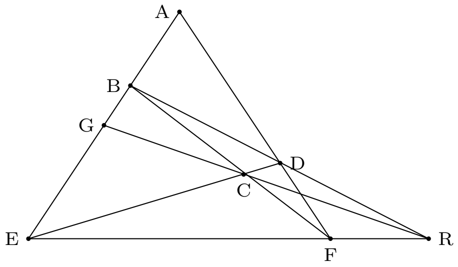
(1) $\dfrac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}} = \dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AE}}$ が成り立つことを示せ。

(2) G が AE の中点で，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DF}} = 2$ であるとき，AB=a, CD=b とおく。次の条件を満たす x，y，z の値を求めよ。

i. EB=xa

ii. EC=yb

iii. 四角形 ABCD が円に内接するとき，$a = zb$



(1998-6)

$\boxed{\textbf{183}}$ $m,\ n$ を自然数とする。次の算法を考える。

(a) $i = m,\ j = n,\ k = 0$。

(b) $i = 1$ ならば $Ans = k + j$ とする。

(c) i の値が奇数ならば $k = k + j$ とする。

(d) $i = [i/2]$。

(e) $j = 2 * j$。

(f) (b) に戻る。

(ここで，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。)

(1) $m = 100$ のとき，3 周目と 4 周目の (b) における $i,\ j,\ k$ の値を求めよ。例えば 1 周目では $i = 100,\ j = n,\ k = 0$ である。

(2) 一般の m に対して，(b) における $i,\ j,\ k$ の値について $i * j + k$ は 1 周目から最後まで一定であることを示せ。

(3) 一般の m に対して，Ans を求めよ。

(4) l を自然数とする。$m = 3 \cdot 2^l$ のとき，終了するまでに何回 (d) を実行するか。

(2001-4)

$\boxed{\textbf{184}}$ 1 から n までの数で m 個からなる重複しない数の順列を作り出す算法として，下記のものを考えた。ただし，S は順列を表し，算法の開始の時は数を含まない（S は空であるという）とする。算法の終了時には結果として順列を得るものとする。

算法 [以下 (a), (b), (c), $\cdots$ の順に行う]

(a) S を空とし，$j = n - m + 1$ とする。

(b) 1 から j までの数からでたらめに数 t を選ぶ。

(c) t が順列 S に入っているならば，t の直後に j を入れ，そうでないならば，t を S の先頭に入れる。

(d) j を 1 増やす。

(e) $j \leqq n$ ならば，(b) へ戻る。$j > n$ ならば終了する。

(1) $n = 10,\ m = 6$ の場合で (b) において選ばれた数 t は順に 4, 3, 6, 3, 2, 5 であった。その結果として得られる順列 S はどのような順列か。

(2) $n = 10,\ m = 6$ の場合で結果として得られた順列 S が 8 2 7 5 9 3 であった。(b) で選ばれた数 t の列は何であったか？

(3) 算法の結果として得られた順列 S から (b) において選ばれた数の列を復元する算法を記述せよ。

(2000-4)

$\boxed{\textbf{185}}$ 発芽して一定期間後の，ある花の苗の高さの分布は母平均 m(cm)，母標準偏差 $\sigma = 1.5$(cm) の正規分布であるとする。

(1) 花壇に植えるとき，高さが 7.3cm より低い苗と 13.0cm より高い苗は間引くとする。m=10(cm) としたとき，苗が間引かれる確率を求めよ。

(2) 母平均 m が未知であったため，大きさ n の標本を任意抽出して，信頼度 95% の m に対する信頼区間を求めたところ，[9.81, 10.79] であった。標本平均 $\overline{x}$ の値と n を求めよ。

(3) 赤花と白花を交配して得られた種子と，赤花同士の交配で得られた種子をまいて育てた苗の花の色を調べた。赤白交配の種子を 1，赤花のみからの種子を 0 とし，咲いた花の色については，赤白混じったものは 1，赤のみであれば 0 として，観察した結果は以下の通りとなった。種子の種類と咲いた花の色の相関係数を求めよ。

種子	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
花の色	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

正規分布表 $P(0 \leqq U \leqq u_0)$:

u_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817

(2000-5)