$\boxed{1}$ 区間 $[a,b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるとは,
$a \leqq x \leqq b$ ならば, $a \leqq f(x) \leqq b$
が成り立つこととする。$f(x)=4x(1-x)$ とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) $[0,1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変であることを示せ。

(2) $0<a<b<1$ とする。このとき, $[a,b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではないことを示せ。

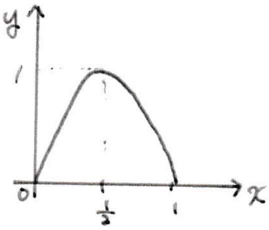
(2006-5)

(1)
$$f(x) = 4x(1-x)$$
$$= -4x^2+4x$$
$$= -4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1.$$

頂点 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

x軸との交点 $(0,0)$, $(0,1)$

区間 $[0,1]$ でのグラフは下図である。



よって. $0 \leqq x \leqq 1$ において
$0 \leqq f(x) \leqq 1$ である。

よって. 区間 $[0,1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変である。

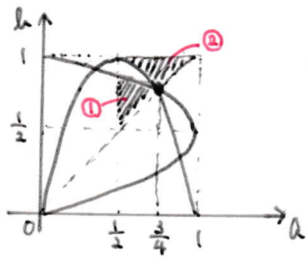
(2)

(i) $a<\frac{1}{2}<b$ のとき.
区間 $[a,b]$ で $f(x)$ の最大値は $f(\frac{1}{2})=1$.
しかし, $b<1$ なので, 不変の定義を満たしてない。

(ii) $a<b \leqq \frac{1}{2}$ のとき.
区間 $[a,b]$ で $f(x)$ の最大値は $f(b)$.
不変であるならば $f(b) \leqq b$ をみたす
必要がある
$$f(b) \leqq b$$
$$4b(1-b) \leqq b$$
$$b(3-4b) \leqq 0$$
$b>0$ より $\quad b \geqq \frac{3}{4}$

ただし, 仮定より $b \leqq \frac{1}{2}$ なので
$a<b \leqq \frac{1}{2}$ のときは 区間 $[a,b]$ は
関数 $f(x)$ に関して不変でない。

(iii) $\frac{1}{2} \leqq a<b$ のとき.
題意をみたすには,
$a \leqq f(b)$ かつ $f(a) \leqq b$.
$$\begin{cases} a \leqq 4b(1-b) & \text{—①} \\ 4a(1-a) \leqq b & \text{—②} \end{cases}$$



$\frac{1}{2} \leqq a<b$ の条件下で
①②を表す領域は
左図である。
ただし, $b=1$, $b=a$ の
境界線は含まず,
その他の境界線は含む。

よって, 仮定の下で ①②を同時にみたす
ことはないので, $\frac{1}{2} \leqq a<b$ において,
区間 $[a,b]$ は 関数 $f(x)$ に関して不変でない。

(i)~(iii)より,
$0<a<b<1$ のとき, 区間 $[a,b]$ は
関数 $f(x)$ に関して不変でない。

「不変」という新しい言葉に焦らずに
定義を確認しておちついて解くことが大切.

2 0でない2つの整式 $f(x)$, $g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2) = (x^2+2)g(x) + 7,\ g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに2以下であることを示せ。

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

(2019-2)

(1)

$f(x)$ の次数：n，$g(x)$ の次数：m とする。

$f(x^2)$: $2n$，$(x^2+2)g(x)$: $2+m$.

$f(x^2) = (x^2+2)g(x)+7$ で次数比較.

$2n = 2+m$.

$n = \frac{m+2}{2}$ … ①

$g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$ で次数比較.

左辺と右辺で最高次数が一致する。

次数は，$g(x^3)$: $3m$.

$$\left.\begin{array}{l} x^4 f(x) : 4+n \\ 3x^2 g(x) : 2+m. \\ 6x^2 : 2 \end{array}\right\} (*)$$

左辺の次数 $3m$ は，(*)のいずれかの次数に一致するので

$$\begin{cases} 3m \leqq 4+n. \\ 3m \leqq 2+m \\ 3m \leqq 2 \end{cases}$$ のいずれかをみたす.

$$\Rightarrow \begin{cases} m \leqq 2 \\ m \leqq 1 \\ m \leqq \frac{2}{3} \end{cases}$$ ($\because$ ①を代入). のいずれかをみたす.

ゆえに $m \leqq 2$.

また，①の式に $m \leqq 2$ を代入.

$n \leqq 2$.

よって，$f(x)$，$g(x)$ ともに次数は2以下.

(2)

(1)より，$f(x)$，$g(x)$ はともに次数2以下なので

$f(x) = ax^2+bx+c$

$g(x) = dx^2+ex+f$ と書ける。

(ただし，a, b, c, d, e, f は実数).

② $\begin{cases} f(x^2) = ax^4+bx^2+c. \\ g(x^3) = dx^6+ex^3+f. \end{cases}$

問題文より.

③ $\begin{cases} f(x^2) = (x^2+2)(dx^2+ex+f)+7 \\ g(x^3) = x^4(ax^2+bx+c) \\ \quad -3x^2(dx^2+ex+f) - 6x^2 - 2. \end{cases}$

②と③より.

$ax^4+bx^2+c = (x^2+2)(dx^2+ex+f)+7$.

$dx^6+ex^3+f = x^4(ax^2+bx+c) - 3x^2(dx^2+ex+f) - 6x^2 - 2$.

この2式で係数比較すると.

$a=d$.

$b=2d+f$.

$c=2f+7$

$e=0$.

$f=-2$.

$0=c-3d$.

これを解くと.

$a=1$　$d=1$

$b=0$　$e=0$

$c=3$　$f=-2$

よって

$f(x) = x^2+3$

$g(x) = x^2-2$

(1)は次数比較

(2)は係数比較　の問題.

3 実数 a, b は $0 < a < b$ を満たすとする。次の3つの数の大小関係を求めよ。

$$\frac{a+2b}{3},\quad \sqrt{ab},\quad \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}$$

(1999-5)

〜 実験 〜

$a=1$, $b=4$ のとき.

・$\frac{a+2b}{3} = \frac{9}{3} = 3$

・$\sqrt{ab} = \sqrt{4} = 2$

・$\sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}} = \sqrt[3]{\frac{4(1+4+16)}{3}} = \sqrt[3]{28} = 3.1\cdots$

$\sqrt{ab} < \frac{a+2b}{3} < \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}$

であると予測でき,
これをもとに大小関係を調べていく!!

3つの数は,すべて正なので,累乗しても大小関係は変わらない。

・$\left(\frac{a+2b}{3}\right)^2 - (\sqrt{ab})^2 = \frac{a^2+4ab+4b^2}{9} - ab$

$= \frac{a^2-5ab+4b^2}{9}$

$= \frac{1}{9}(a-b)(a-4b) > 0$

($\because$ $a<b$ より).

ゆえに $\left(\frac{a+2b}{3}\right)^2 - (\sqrt{ab})^2 > 0$ より

$\frac{a+2b}{3} > \sqrt{ab}$. —①

・$\left(\sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}\right)^3 - \left(\frac{a+2b}{3}\right)^3$

$= \frac{b(a^2+ab+b^2)}{3} - \frac{a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3}{27}$

$= \frac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{27}$

$= \frac{(b-a)^3}{27} > 0$ ($\because$ $b>a$).

ゆえに,$\left(\sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}\right)^3 > \left(\frac{a+2b}{3}\right)^3$ より

$\sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}} > \frac{a+2b}{3}$ —②

① ② より.

$\sqrt{ab} < \frac{a+2b}{3} < \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}$

あらかじめ実験をしておけば,

$\underbrace{A < B}_{①} \underbrace{< C}_{②}$

①②の2つだけ比較すればよいので
AとCの比較をせずに済む.

4 (1) $x \geqq y \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x}{1+x} \geqq \dfrac{y}{1+y}$ がなりたつことを示せ。

(2) i. 不等式 $\dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|} + \dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$ がなりたつことを示せ。

ii. i の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か調べよ。

(1998-4)

(1) $\dfrac{x}{1+x}$ と $\dfrac{y}{1+y}$ の逆数を比較する.

$$\frac{1+x}{x} - \frac{1+y}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

$$= \frac{y-x}{xy} \leqq 0 \quad (\because x \geqq y).$$

ゆえに，$\dfrac{1+x}{x} \leqq \dfrac{1+y}{y}$

$$\therefore \frac{x}{1+x} \geqq \frac{y}{1+y} \quad //$$

(2) 三角不等式

$$|x|+|y|+|z| \geqq |x+y|+|z|$$
$$\geqq |x+y+z|.$$

は成立する。

(1) より．$|x|+|y|+|z|$ と $|x+y+z|$ を

それぞれ x, y とおくと．

以下の不等式が成立する．

$$\frac{|x|+|y|+|z|}{1+|x|+|y|+|z|} \geqq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}. \quad \cdots (*)$$

また，$|x|, |y|, |z| \geqq 0$ より．

以下が成立．

$$\begin{cases} \dfrac{|x|}{1+|x|} \geqq \dfrac{|x|}{1+|x|+|y|+|z|} \\ \dfrac{|y|}{1+|y|} \geqq \dfrac{|y|}{1+|x|+|y|+|z|} \\ \dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|z|}{1+|x|+|y|+|z|}. \end{cases} \quad \cdots ①$$

左辺同士，右辺同士をたすと．

$$\frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} + \frac{|z|}{1+|z|} \geqq \frac{|x|+|y|+|z|}{1+|x|+|y|+|z|} \quad \cdots (**)$$

$(*)$ と $(**)$ より．

$$\frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} + \frac{|z|}{1+|z|} \geqq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$$

が成立 //.

また．①の不等式において，等号成立は，

上から順に $y=z=0$，$x=z=0$，$x=y=0$

のときである．

ゆえに．$(**)$ が等号成立するには，

x, y, z のうち少なくとも 2つが 0 でなければならない．

このとき i の不等式においても等号成立．

ゆえに，

x, y, z のうち少なくとも 2つが 0 である場合に等号成立 //

(1) 逆数の比較というアイデア．

(2) 三角不等式と (1) の結果をうまく利用する問題．

①の式を思いつけるかが point．

5 座標平面上の4点 $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(0,\ 1)$ からなる集合を L，不等式 $ax+by-d \geqq 0$ を満たす実数 x, y を座標としてもつ点 $(x,\ y)$ からなる集合を D とする。すなはち，

$L=\{(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 1)\}$,

$D=\{(x,\ y) | ax+by-d \geqq 0\}$

である。このとき，L と D の共通集合 $L \cap D$ について次の問いに答えよ。

(1) 実数 a, b, d をどのように選んでも，$L \cap D=\{(0,\ 0),\ (1,\ 1)\}$ にならないことを示せ。

(2) $L \cap D=\{(1,\ 1)\}$ ならば $\dfrac{d}{\sqrt{2}} \leqq \sqrt{a^2+b^2} < \sqrt{2}d$ であることを示せ。

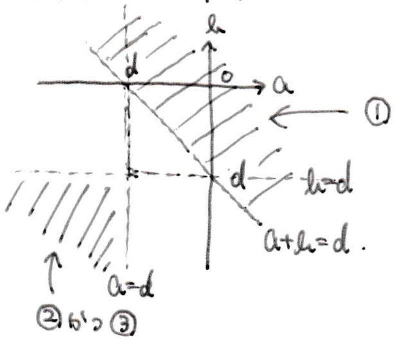
(1994-1)

(1)

$L \cap D=\{(0,0),(1,1)\}$ になるには、

$$\begin{cases} -d \geqq 0 \\ a+b-d \geqq 0 \\ a-d<0 \\ b-d<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \leqq 0 \\ d \leqq a+b \quad \cdots ① \\ a<d \quad \cdots ② \\ b<d \quad \cdots ③ \end{cases}$$

をすべて同時にみたす必要がある。



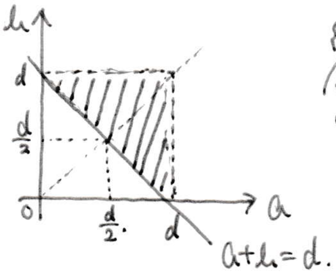
上の図より、4つの不等式は同時に満たすことはないので

$L \cap D=\{(0,0),(1,1)\}$ にはならない。

(2) $L \cap D=\{(1,1)\}$ より.

$$\begin{cases} a+b-d \geqq 0 \\ -d<0 \\ a-d<0 \\ b-d<0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b \geqq d \\ d>0 \\ a<d \\ b<d. \end{cases}$$

これらの不等式がみたす領域を下に図示する.



点線部分は境界線を含まず、実線部分は含む。

$\sqrt{a^2+b^2}$ は、原点から点 (a,b) までの距離である。

上の図より 最小値は $\left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right)$.

最大値は (d,d) の点をとるとき.

ゆえに、

$$\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2} \leqq \sqrt{a^2+b^2} < \sqrt{d^2+d^2}$$

$$\frac{d}{\sqrt{2}} \leqq \sqrt{a^2+b^2} < \sqrt{2}d \quad //$$

(1) (2) 共に、式での説明よりも図での説明が判りやすい問題.
図を描くくせをつけておくこと!!

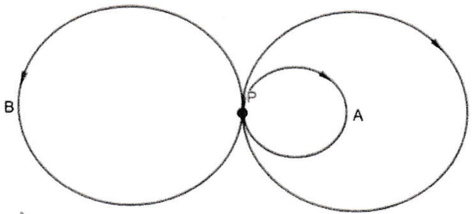
6 ある公園に，同一地点Pを通る1周1kmのジョギングコースAと1周2kmのジョギングコースB, Cがある。各コースはそれぞれ定められた方向のみに走るとして，Pを出発点としPをゴールとする $n$km のコースを考え，$n$km のコースの総数を f_n とする。

(1) 2次方程式 $t^2-t-2=0$ の2つの解を $\alpha,\ \beta$ とし，$g_n = f_n - \alpha f_{n-1}$ とおくと，$n \geqq 2$ のとき $g_{n+1} = \beta g_n$ が成り立つことを示せ。

(2) f_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log f_n}{n}$ を求めよ。

(1989-5)



(1)・$t^2-t-2=0$

$\Leftrightarrow\ (t-2)(t+1)=0$

$\Leftrightarrow\ t=2,-1$.

$n+1$ (km) ジョギングするコースは，

はじめに A，残り n (km).

はじめに B or C 残り $n-1$ (km).

の2パターン。

ゆえに $f_{n+1}=f_n+2f_{n-1}$

・辺々に f_n を加える

$f_{n+1}+f_n=2(f_n+f_{n-1})$.

$g_n=f_n+f_{n-1}$ とおくと

$g_{n+1}=2g_n$.

・辺々に $-2f_n$ を加える.

$f_{n+1}-2f_n=-(f_n-2f_{n-1})$.

$g_n=f_n-2f_{n-1}$ とおくと

$g_{n+1}=(-1)g_n$.

ゆえに $\begin{cases}\alpha=-1,\ \beta=2\\ \alpha=2,\ \beta=-1\end{cases}$ の

それぞれに対し題意をみたす。 //

(2) まず，初項，第2項を求める.

$f_1=1$ (A の1通り)

$f_2=3$ (A 2周，B，C の3通り).

$g_{n+1}=2g_n$ より

$g_{n+1}=2^{n-1}g_2$

$=2^{n-1}(f_2+f_1)$

$=2^{n+1}$

よって $f_{n+1}+f_n=2^{n+1}$

辺々を 2^{n+1} で割って.

$\dfrac{f_{n+1}}{2^{n+1}}+\dfrac12\cdot\dfrac{f_n}{2^n}=1$.

$\left(\dfrac{f_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac23\right)=-\dfrac12\left(\dfrac{f_n}{2^n}-\dfrac23\right)$.

$=-\dfrac12\cdot\left(-\dfrac12\right)^{n-1}\cdot\left(\dfrac{f_1}{2}-\dfrac23\right)$

$=\left(-\dfrac12\right)^n\cdot\left(-\dfrac16\right)$.

$=(-1)^{n+1}\cdot\left(\dfrac12\right)^{n+1}\cdot\dfrac13$

よって. $f_{n+1}=\dfrac13\cdot(-1)^{n+1}+\dfrac13\cdot2^{n+2}$

ゆえに $f_n=\dfrac13(-1)^n+\dfrac13\cdot2^{n+1}$ //

(3) $\log f_n=\log\left\{\dfrac13\cdot\left(2^{n+1}+(-1)^n\right)\right\}$

$=\log\left\{2^{n+1}\cdot\dfrac13\left(1-\left(-\dfrac12\right)^{n+1}\right)\right\}$

$=(n+1)\log2+\log\dfrac13\left(1-\left(-\dfrac12\right)^{n+1}\right)$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log f_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n+1}{n}\log2+\frac1n\log\frac13\left(1-\left(-\frac12\right)^{n+1}\right)\right\}$

$=\log2$. //

(2)の，$f_{n+1}+f_n=2^{n+1}\to\dfrac{f_{n+1}}{2^{n+1}}+\dfrac12\cdot\dfrac{f_n}{2^n}=1$

で新たな数列 $\left\{\dfrac{f_n}{2^n}\right\}$ を作れるかがpoint.

7 以下の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2) 自然数 a, b, c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると，a, b, c は全て 3 で割り切れ(ければな)ないことを証明せよ。

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ。

(2014-2)

(1) この小問において 3 を法とする。

任意の自然数は，

$a\equiv 0$

$a\equiv 1$

$a\equiv 2$

である。

この任意の自然数の 2 乗した数は，

$a^2\equiv 0$

$a^2\equiv 1$

$a^2\equiv 4\equiv 1$.

なので，

a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である。

(2) $a^2+b^2=3c^2$ において，

右辺が 3 の倍数なので

左辺も 3 の倍数である。

$a^2+b^2\equiv 0 \pmod 3$ となるには，

$a^2\equiv 0$，$b^2\equiv 0 \pmod 3$ でなければならない。

($\because$ (1) の結果より)

つまり，$a\equiv 0$，$b\equiv 0 \pmod 3$

なので $a=3a'$，$b=3b'$ とおける。

$(3a')^2+(3b')^2=3c^2$

$3a'^2+3b'^2=c^2$

$3(a'^2+b'^2)=c^2$

左辺が 3 の倍数より $c^2\equiv 0 \pmod 3$.

$\therefore$ $c\equiv 0 \pmod 3$.

よって，仮定をみたすには，

a, b, c は 3 の倍数でなければならない。

(3) $a^2+b^2=3c^2$ をみたす自然数 a, b, c が存在すると仮定。

(2) より，$a=3a_1$，

$b=3b_1$

$c=3c_1$，と書ける。

すると，

$(3a_1)^2+(3b_1)^2=3\cdot(3c_1)^2$

$a_1^2+b_1^2=3c_1^2$

再び (2) を用いると，

$a_1=3a_2$，$b_1=3b_2$，$c_1=3c_2$ とおけて，

$(3a_2)^2+(3b_2)^2=3(3c_2)^2$

$a_2^2+b_2^2=3c_2^2$

以下同様に，

$a_n=3a_{n+1}$，$b_n=3b_{n+1}$，$c_n=3c_{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$

とおくと，

$a>a_1>a_2>\cdots>0$，$b>b_1>b_2>\cdots>0$，$c>c_1>c_2>\cdots>0$. —(*)

(*) から，自然数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が存在し，単調に減少し続ける。

これは明らかに不適。

よって，

$a^2+b^2=3c^2$ をみたす自然数 a, b, c は存在しない。

mod での計算が楽!!

(3) は，自然数には下界が存在することを利用。

$\boxed{8}$ 座標平面上で，不等式
$2|x-4|+|y-5| \leqq 3$, $2||x|-4|+||y|-5| \leqq 3$
が表す領域を，それぞれ A, B とする。

(1) 領域 A を図示せよ。

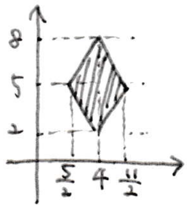
(2) 領域 B を図示せよ。

(3) 領域 B の点 (x, y) で，x が正の整数であり y が整数であって，$log_x|y|$ が有理数となる点を，理由を示して全て求めよ。

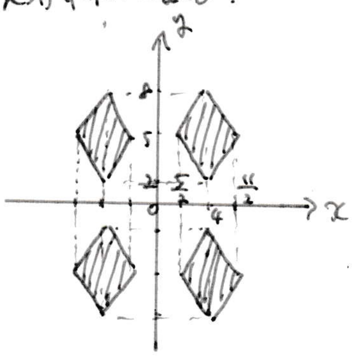
(2003-2)

(1) まず、$2|x|+|y| \leqq 3$ …① が満たす領域を考える。
この領域は、4点 $(\frac{3}{2}, 0)$, $(0, 3)$, $(-\frac{3}{2}, 0)$, $(0, -3)$ を結んでできるひし形の内部または辺上である。

不等式 $2|x-4|+|y-5| \leqq 3$ …② は
①の領域を x軸方向に4, y軸方向に5
移動させたものである。
図示すると右図の斜線部であり、境界線を含む。



(2) 不等式 $2||x|-4|+||y|-5| \leqq 3$ …③
の表す領域は、
$x \geqq 0$, $y \geqq 0$ のときは、②と一致。
$x < 0$, $y \geqq 0$ のときは ②をy軸対称、
$x \geqq 0$, $y < 0$ のときは ②をx軸対称、
$x < 0$, $y < 0$ のときは ②を原点対称、
したものである。
これを図示すると以下の図となる。
ただし、境界線は含む。



(3) $\log_x|y|$ が有理数となる条件は、
$\log_x|y| = \frac{q}{p}$ $(p, q:$ 整数$)$ となる。
すなわち、
$x^{\frac{q}{p}} = |y|$, $x^q = |y|^p$ となる
整数 p, q が存在することである。

$x>0$, $y>0$ において、領域B内で
格子点となりうるのは、
・$x=3$ のとき、$(3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$
いずれも $3^q = y^p$ は成立しない。
・$x=4$ のとき、$(4,2)$, $(4,3)$, $(4,4)$, $(4,5)$
$(4,6)$, $(4,7)$, $(4,8)$ であり、
$4^q = y^p$ が成立するのは
$(4,2)$, $(4,4)$, $(4,8)$ のとき。
・$x=5$ のとき、$(5,4)$, $(5,5)$, $(5,6)$
$(5,5)$ のときのみ $5^q = y^p$ が成立。

$y<0$ についても考えると、
$\log_x|y|$ が有理数となる点は、
$(4, \pm 2)$, $(4, \pm 4)$, $(4, \pm 8)$, $(5, \pm 5)$
となる。

地道に計算する。

9 正の整数 a に対し，a の約数全体の和を $f(a)$ で表す。ただし，1 および a 自身も約数とする。例えば $f(1)=1$ であり，$a=15$ ならば 15 の約数は 1, 3, 5, 15 なので，$f(15)=24$ となる。次の問いに答えよ。

(1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a=2^m b$ と表されるとする。このとき
$$f(a)=(2^{m+1}-1)f(b)$$
が成り立つことを示せ。

(2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a=pq$ と表されるとする。
このとき
$$f(a) \geqq (p+1)q$$
が成り立つことを示せ。また，等号成立は，$p=1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ。

(3) 正の偶数 a, b は，ある整数 m, n とある奇数 r, s を用いて $a=2^m r$, $b=2^n s$ のように表すことができる。このとき a, b が
$$\begin{cases} f(a)=2b \\ f(b)=2a \end{cases}$$
を満たせば，r, s は素数であり，かつ $r=2^{n+1}-1$, $s=2^{m+1}-1$ となることを示せ。

(2002-2)

(1) 正の奇数の約数を
$b_1, b_2, \cdots, b_n$ $(b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n)$
とすると、
$a = 2^m \cdot b$ より。
$f(a) = (1+2+\cdots+2^m)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$.
$= \dfrac{2^{m+1}-1}{2-1} f(b)$.
$= (2^{m+1}-1) f(b)$.

(2) pが2以上の整数より、1とpは少なくとも約数としてもつ。
また、qは正の整数より、qを少なくとも約数としてもつ。
このとき $a=pq$ のとき
$f(a) = p\times q + 1\times q$
$=(p+1)q$
等号が成立するのは、$f(a)=p\times q+q$ より
aが pq と q のみを約数としてもつときのみ。
$p\geqq 2$より、$q=1$, p:素数 のときにのみ。
これをみたす。

(3) $a=2^m r$, $b=2^n s$ で、a, b:正の偶数、
r, s:奇数 より、$m, n\geqq 1$.
条件より、$f(a)=2b$, $f(b)=2a$ なので
$f(2^m r) = 2\cdot 2^n s$ … ①
$f(2^n s) = 2\cdot 2^m r$ … ②
(1)を用いて、①、②より
$(2^{m+1}-1) f(r) = 2\cdot 2^n\cdot s$ …③
$(2^{n+1}-1) f(s) = 2\cdot 2^m\cdot r$ …④
ここで $f(r)$, $f(s)$: 整数, 2^{m+1}, 2^{n+1}: 偶数,
$2^{m+1}-1$, $2^{n+1}-1$: 奇数 なので、③、④より
s, r はそれぞれ $(2^{m+1}-1)$, $(2^{n+1}-1)$ の倍数。
k, l: 整数として
$s = (2^{m+1}-1)k$
$r = (2^{n+1}-1)l$ と表せる。
③④に代入して整理すると、
$f(r) = 2^{n+1}\cdot k$ …⑤
$f(s) = 2^{m+1}\cdot l$ …⑥
一方で、(2)より
$f(r) = f((2^{n+1}-1)l) \geqq (2^{n+1}-1+1)l = 2^{n+1}\cdot l$ …⑦
$f(s) = f((2^{m+1}-1)k) \geqq (2^{m+1}-1+1)k = 2^{m+1}\cdot k$ …⑧
⑤、⑦より $2^{n+1}\cdot k \geqq 2^{n+1}\cdot l \Rightarrow k\geqq l$
⑥、⑧より $2^{m+1}\cdot l \geqq 2^{m+1}\cdot k \Rightarrow l\geqq k$
ゆえに $k=l$.
⑤⑥より
$f((2^{n+1}-1)l) = (2^{n+1}-1+1)l$.
$f((2^{m+1}-1)l) = (2^{m+1}-1+1)l$.
(2)の等号成立の条件から、2^{n+1}, $2^{m+1} \geqq 3$ なので
$2^{n+1}-1$, $2^{m+1}-1$: 素数, $l=1$.
よって、$r=2^{n+1}-1$, $s=2^{m+1}-1$ であり
ともに素数 //

$\boxed{10}$ $p,\ q$ を整数とし，$x,\ y$ を未知数とする連立方程式
$$\begin{cases} 4x+9y=p \\ 2x+6y=q \end{cases}$$
を考える。

(1) この方程式を行列を用いて表し，係数行列の逆行列を求めよ。

(2) 上の連立方程式の解，$x,\ y$ が共に整数であるような組 $(p,\ q)$ を全て求めよ。ただし
$0 \leqq p \leqq 5,\ \ 0 \leqq q \leqq 5$
とする。

(3) 正の整数 d で，「d のどんな倍数 $p,\ q$ に対しても上の連立方程式の解 $x,\ y$ が整数になる」ものが存在することを示せ。

(4) (3) における d のうちで最小のものを求めよ。

(2001-5)

(1) 条件より.
$$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$
逆行列は.
$$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{24-18}\cdot\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) (1)より.
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$
$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6p-9q \\ -2p+4q \end{pmatrix}.\ \text{より}.$$
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(2p-3q) \\ y = \frac{1}{3}(-p+2q). \end{cases}$$
xが偶数になるには，$2p-3q$が偶数.
つまり．$3q$が偶数．→ qが偶数である．
$0 \leqq q \leqq 5$ より　$q=0,2,4$.
この条件下でyが整数になるには.
・$q=0$のとき.
　$y=-\frac{1}{3}p$より　$p=0,3$.
・$q=2$のとき.
　$y=\frac{1}{3}(-p+4)$ より　$p=1,4$.
・$q=4$のとき
　$y=\frac{1}{3}(-p+8)$ より　$p=2,5$
以上より.
$(p,q)=(0,0),(1,2),(2,4).$
$(3,0),(4,2),(5,4).$

(3) (2)より
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(2p-3q) \\ y = \frac{1}{3}(-p+2q). \end{cases}$$
p,qをともに6の倍数とすれば
x,yはともに整数値をとる.
ゆえに $d=6$が題意を満たすように存在する.

(4) $0<d\leqq 5$ で条件をみたすものが存在するか調べる.
$d=1$のとき $(p,q)=(1,1)$
$d=2$のとき $(p,q)=(2,2)$
$d=3$のとき $(p,q)=(3,3)$
$d=4$のとき $(p,q)=(4,4)$
$d=5$のとき $(p,q)=(5,5)$
が，(2)の (p,q) をみたしておらず.
(x,y)は整数にならない.
ゆえに dのうち最小のものは 6.

(3)で存在することを示すには，
何かしらのdを見つければよい。
(4)は (3)で $d=6$を見つけれれば
$d=1\sim5$ の5コを確認すればよいので
すぐ終わる!!

11 係数が 0 か 1 である x の整式を，ここでは **M 多項式**とよぶことにする。整数を係数とする x の整式は，偶数の係数を 0 で置き換え，奇数の係数を 1 で置き換えると M 多項式になる。2 つの整式は，この置き換えによって等しくなるとき**合同**であるという。例えば，$5x^2+4x+3$ と x^2-1 とは対応する M 多項式が共に x^2+1 となるので合同である。

M 多項式は，2 つの 1 次以上の M 多項式の積と合同になるとき**可約**であるといい，可約でないとき**既約**であるという。例えば，x^2+1 は $(x+1)^2$ と合同であるから，可約である。

(1) x^2+x+1 は既約な M 多項式であることを示せ。

(2) 1 次から 3 次までの既約な M 多項式を全て求めよ。

(3) x^4+x+1 は既約な M 多項式かどうか判定せよ。

(2000-1)

合同を表す記号を「$\equiv$」とする。

(1) 1次のM多項式は x, $x+1$ の2つのみ。
これらの積は、
$x\cdot(x+1)=x^2+x$
$x\cdot x=x^2$
$(x+1)(x+1)=x^2+2x+1\equiv x^2+1$
の3つであるが、これらはどれも
x^2+x+1 と合同でない。
ゆえに x^2+x+1 は既約。

(2) 1次のM多項式は x, $x+1$ でどちらも既約。
2次のM多項式は
x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1 で
既約なものは x^2+x+1 のみである。
3次のM多項式について考える。
可約なM多項式は、その次数より小さい
既約なM多項式の積で表せる。
ゆえに、3次の可約なM多項式は、
x^3
$x^2(x+1)=x^3+x^2$
$x(x+1)^2=x(x^2+2x+1)\equiv x^3+x$
$(x+1)^3\equiv(x+1)(x^2+1)\equiv x^3+x^2+x+1$
$x(x^2+x+1)\equiv x^3+x^2+x$
$(x+1)(x^2+x+1)\equiv x^3+1$
よって、3次の既約な多項式は、
x^3+x^2+1, x^3+x+1.
以上より、3次以下の既約な多項式は
x^3+x^2+1, x^3+x+1,
x^2+x+1, $x+1$, x.

(3). 定数項が1である4次の可約な
M多項式を作る。
$(x+1)^4\equiv(x^2+1)^2$
$\equiv x^4+1$.
$(x+1)^2(x^2+x+1)\equiv(x^2+1)(x^2+x+1)$
$\equiv x^4+x^3+x+1$.
$(x^2+x+1)^2=x^4+2x^3+3x^2+2x+1$
$\equiv x^4+x^2+1$.
$(x+1)(x^3+x^2+1)=x^4+2x^3+x^2+x+1$
$\equiv x^4+x^2+x+1$
$(x+1)(x^3+x+1)=x^4+x^3+x^2+2x+1$
$\equiv x^4+x^3+x^2+1$.

x^4+x+1 は可約でない。
つまり既約 //.

新しい言葉が問題文中で定義されるパターンの問題。
焦らず読んで言葉の意味を理解できるか
どうかが鍵。

12 複素数 $z = \cos 20° + i \sin 20°$ と、それに共役な複素数 $\overline{z}$ に対し

$$\alpha = z + \overline{z}$$

とする。

(1) α は整数を係数とするある3次方程式の解となることを示せ。

(2) この3次方程式3個の実数解をもち，そのいずれも有理数ではないことを示せ。

(3) 有理数を係数とする2次方程式で，α を解とするものは存在しないことを背理法を用いて示せ。

(2000-4)

(1) $\alpha = z + \overline{z}$

$= (\cos 20° + i\sin 20°) + (\cos 20° - i\sin 20°)$

$= 2\cdot\cos 20°$

より．$\cos 20° = \frac{1}{2}\alpha$．

★3倍角の公式

$\boxed{\begin{array}{l}\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.\\ \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.\end{array}}$

$\cos 60° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°$

$\frac{1}{2} = 4\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\alpha}{2}\right)$．

$1 = \alpha^3 - 3\alpha$．

$\alpha^3 - 3\alpha - 1 = 0$．

よって α は 3次方程式 $x^3 - 3x - 1 = 0$ の解．

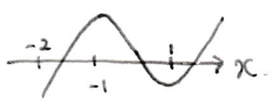
(2) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ とおく．

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$= 3(x^2 - 1)$．

$f'(x) = 0$ は．$x = 1, -1$．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-3	$\nearrow$



$f(-2) = -1 < 0$．

$f(-1) = 4 > 0$

$f(1) = -3 < 0$ より．

$f(x) = 0$ は 3コの実数解をもつ．」

実数解が有理数であると仮定．背理法!!

すると，$p > 0$，pとq：互いに素な整数として，

$x = \frac{q}{p}$ とおくことができる。

これは，$x^3 - 3x - 1 = 0$ の解より

$\frac{q^3}{p^3} - 3\frac{q}{p} - 1 = 0$．

$q^3 - 3qp^2 - p^3 = 0$．

$q^3 = p^2(3q + p)$．

このとき，p^2はq^3の約数となるが，pとqは互いに素なので，$p = 1$．

すると $x = \frac{q}{p}$ から．$x = q$（整数）となり．

3つの実数解は整数解となる．

しかし，

$f(0) = -1$．

$f(2) = 1$ ということと，(2)の前半の議論をふまえると，

$-2 < x < -1$，$-1 < x < 0$，$1 < x < 2$

に1つずつ解をもち，整数解は存在しない．

矛盾が生じ，仮定は偽．

ゆえに，3つの実数解はいずれも有理数でない．

(3) a, b：有理数で $x = \alpha$ を解にもつ2次方程式

$x^2 + ax + b = 0$ が存在と仮定．

$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ となる。

$x^3 - 3x - 1$ を $x^2 + ax + b$ でわる．

$x^3 - 3x - 1 = (x - a)(x^2 + ax + b) + (a^2 - b - 3)x + ab - 1$．

$x = \alpha$ とすると，これは $x^3 - 3x - 1 = 0$，$x^2 + ax + b = 0$ の解なので

$0 = (a^2 - b - 3)\alpha + ab - 1$．

a, b：有理数，α：無理数より．

$\begin{cases} a^2 - b - 3 = 0 & \cdots① \\ ab - 1 = 0. & \cdots② \end{cases}$

①を②に代入．

$a^3 - 3a - 1 = 0$．

(2)より $a =$（無理数）．

これは a が有理数としたことに矛盾する．

よって，有理数係数の2次方程式で α を解にもつものは存在しない。

13 次の問いに答えよ。

(1) n が正の偶数のとき，2^n-1 は 3 の倍数であることを示せ。

(2) n を自然数とする。2^n+1 と 2^n-1 は互いに素であることを示せ。

(3) $p,\ q$ を異なる素数とする。$2^{p-1}-1=pq^2$ を満たす $p,\ q$ の組を全て求めよ。

(2015-5)

(1) n：正の偶数より．

$n=2k$（k：正の整数）とおく．

$$2^n-1=2^{2k}-1$$
$$=(2^k)^2-1$$
$$=(2^k-1)(2^k+1).$$

隣り合う3つの自然数の性質

2^k：偶数より．

2^k-1，2^k+1 はともに奇数である。

2^k-1，2^k，2^k+1 は 3つの並んでいる自然数であり．2^kは3の倍数でないので

2^k-1 or 2^k+1 が 3の倍数．

ゆえに 2^n-1 も 3の倍数．

(2) 2^n+1 と 2^n-1 の最大公約数を g とおく．

$2^n+1=g\cdot a$　$2^n-1=g\cdot b$（a，b：互いに素）．

2式の差を考えると

$2=g(a-b)$．

・$g=2$のとき，$2^n+1=2\cdot a$．で

右辺が2の倍数になり不成立．

よって $g=1$ となり．最大公約数が1なので

2^n+1と 2^n-1 は互いに素．

(3) 異なる素数 p．q に対して $2^{p-1}-1=pq^2$．

(i) p：偶数のとき．

p：素数より $p=2$．として．

$$2-1=2\cdot q^2$$

素数 qは存在しない．

(ii) p：奇数のとき．

$p-1$：偶数．ゆえ．(1)より．

$2^{p-1}-1$：3の倍数．　→ $2^{p-1}-1=pq^2$

よって $p=3$ もしくは $q=3$．

(a) $p=3$ のとき．

$$2^{3-1}-1=3\cdot q^2$$
$$3=3\cdot q^2$$

素数 qは存在しない．

(b) $q=3$のとき．

$$2^{p-1}-1=p\cdot 3^2$$

$p=2k+1$（k：自然数）とおくと

$$2^{2k}-1=9(2k+1).$$
$$(2^k-1)(2^k+1)=9\cdot(2k+1).$$

(2)より 2^k-1，2^k+1 は互いに素．

ゆえに．

$(2^k-1,\ 2^k+1)=(9,\ 2k+1)$ ―①

もしくは

$(2^k-1,\ 2^k+1)=(2k+1,\ 9)$ ―②

①のとき $2^k-1=9$ なるkが存在しない．

②のとき $k=3$．

よって $p=7$．

以上より．

題意をみたす(p,q)の組は $(7,3)$ のみ //

(3)で (1)，(2)の結果を上手く利用できるか．どこで利用するか見つけることができるか．がキーポイント．

$\boxed{14}$ 整数 a, b は 3 の倍数ではないとし，$f(x)=2x^3+a^2x^2+2b^2x+1$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $f(1)$ と $f(2)$ を 3 で割った余りをそれぞれ求めよ。

(2) $f(x)=0$ を満たす整数 x は存在しないことを示せ。

(3) $f(x)=0$ を満たす有理数 x が存在するような組 (a, b) を全て求めよ。

(2018-4)

(1) 法を3とする．

$a \not\equiv 0$．　$a\equiv 1$ もしくは $a\equiv 2$．

$a\equiv 1$ のとき $a^2\equiv 1$

$a\equiv 2$ のとき $a^2\equiv 4\equiv 1$．

で，いずれにせよ $a^2\equiv 1$．

b についても同様に $b^2\equiv 1$．

$f(1)=2+a^2+2b^2+1$

$\equiv 2+1+2\cdot 1+1$

$\equiv 0$．

$f(2)=2^4+a^2\cdot 2^2+2^2\cdot b^2+1$

$\equiv 1$．

よって $f(1)$ と $f(2)$ を3でわった余りはそれぞれ

0 と 1 //

(2) $f(x)$ の係数は正であり

定数項が1なので $x\geqq 0$ のとき $f(x)\geqq 1$．

ゆえに、$f(x)=0$ をみたす x が存在すれば

$x<0$．この解を $x=\alpha$ とおく．$(\alpha<0)$．

$2\alpha^3+a^2\alpha^2+2b^2\alpha+1=0$．

$-\alpha(2\alpha^2+a\alpha+2b^2)=1$．

$2\alpha^2+a\alpha+2b^2$ は整数なので

$-\alpha$ は1の約数．$\alpha<0$ から $\alpha=-1$．

$f(-1)=a^2-2b^2-1=0$．…①

しかし，

$f(-1)=a^2-2b^2-1\equiv 1-2\cdot 1-1 \pmod 3$

$\equiv -2 \pmod 3$

$\equiv 1 \pmod 3$

となり ① を満たさない．

ゆえに、$f(x)=0$ をみたす整数 x は

存在しない

(3) (2)の議論から、

$f(x)=0$ をみたす有理数 $x=-\dfrac{q}{p}$ (p, q：互いに素な整数，$p\geqq 2$)

と表せる。

すると，$f\left(-\dfrac{q}{p}\right)=0$ なので

$2\left(-\dfrac{q}{p}\right)^3+a^2\left(-\dfrac{q}{p}\right)^2+2b^2\left(-\dfrac{q}{p}\right)+1=0$．

$-2q^3+a^2q^2p-2b^2qp^2+p^3=0$．

$p^3=q(2q^2-a^2qp+2b^2p^2)$

p と q が互いに素より，$q=1$．であり．

$p^3=2-a^2p+2b^2p^2$

$p(p^2-2b^2p+a^2)=2$．

$p\geqq 2$ (p：整数) より，$p=2$．で，

$4-4b^2+a^2=1$．

$4b^2-a^2=3$．

$(2b-a)(2b+a)=3$．

これをみたすには，

$$(2b-a, 2b+a)=\begin{cases}(1, 3)\\(-1, -3)\\(3, 1)\\(-3, -1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ (a, b)=\begin{cases}(1, 1)\\(-1, -1)\\(-1, 1)\\(1, -1)\end{cases}$$

これらは $a, b\neq$ (3の倍数) をみたしている。

$(a, b)=(1, 1), (-1, -1), (-1, 1), (1, -1)$ //

(1) mod 計算．

(2) 背理法．(存在しないことを直接証明するのは困難)．

15 3 桁の自然数 $N = 100a + 10b + c$ （$a,\ b,\ c$ は，$1 \leqq a \leqq 9,\ 0 \leqq b \leqq 9,\ 0 \leqq c \leqq 9$ を満たす整数）を考える。

(1) 平方数かつ奇数である N で，二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と接するようなものを全て求めよ。

(2) 命題「N および a が平方数のとき二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは x 軸と接する。」は正しいか。正しければそれを示し，正しくなければ反例をあげよ。

(3) ある N について，二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは座標が整数である相異なる 2 点で x 軸と交わり，グラフと x 軸とで囲まれる部分の面積が 4 となる。このときの N を求めよ。

(1998-9)

(1) $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と接する

$\Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0$.

$a.b.c$：整数より．ac：平方数．

N：平方数 かつ 奇数 で 3桁という条件から．

N	ac	b^2-4ac
$11^2=121$	1	0
$13^2=169$	9	0
$15^2=225$	7 ×	—
$17^2=289$	18 ×	—
$19^2=361$	3 ×	—
$21^2=441$	4	0
$23^2=529$	45 ×	—
$25^2=625$	30 ×	—
$27^2=729$	63 ×	—
$29^2=841$	8 ×	—
$31^2=961$	9	0

$\therefore N = 121, 169, 441, 961$. //

(2) 正しくない．

(反例)．$N = 14^2 = 196$ のとき．

$a = 1$ ：平方数 であるが．

$b^2 - 4ac = 81 - 24 \neq 0$．

二次関数のグラフは接しない。

(1) 表を書けば目で見て分かる．

(3) 条件に沿って計算していくだけ．

(3) $ax^2+bx+c=0$ の相異なる2点の整数解を $\alpha.\beta\ (\alpha<\beta)$ とおく．

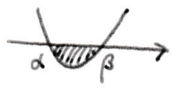
このとき，

$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ —(※)

とおける．

グラフと x軸とで囲まれる部分の面積が4となるので

$-a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = 4$. …①



$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \left[\frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)\right]_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2 dx$

$= -\frac{1}{6}\left[(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta$

$= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

①に代入．

$a(\beta-\alpha)^3 = 24$.

a, α, β：整数より．

$a=3$，$\beta-\alpha=2$ のときにのみ成立．

$\therefore y = 3(x-\alpha)(x-\alpha-2)$

$= 3x^2 - 6(\alpha+1)x + 3\alpha(\alpha+2)$.

(※)で係数比較

$b = -6(\alpha+1)$．$c = 3\alpha(\alpha+2)$.

$\alpha+1 \leqq 0$ より $\alpha \leqq 0$，$\therefore \alpha+2 \leqq 0$.

(i) $\alpha = -2$ のとき．

$b = 6$．$c = 0$.

(ii) $\alpha < -2$ のとき．

$b \geqq 12$.

これは $0 \leqq b \leqq 9$ を満たさない．

$\therefore a=3$．$b=6$．$c=0$

$N = 360$ //

$\boxed{16}$ 次の命題 (1), (2), (3) について，真のときは証明を与え，偽のときは反例を与えよ。

(1) x, y を実数とする。
$|x| \leqq 1$ かつ $|y| \leqq 1$ ならば，$(x+y)^2 \leqq (xy+1)^2$
である。

(2) a, b, c を実数とする。
全ての実数 x について $ax^2+bx+c>0$ ならば，$b^2-4ac<0$ である。

(3) a を整数とする。
2 次方程式 x^2+3x+a が有理数の解をもつならば，a は偶数である。

(1997-4)

(1) $(x+y)^2-(xy+1)^2 = x^2+2xy+y^2$
$-(x^2y^2+2xy+1)$
$= x^2+y^2-x^2y^2-1.$
$= x^2(1-y^2)-(1-y^2)$
$= (x^2-1)(1-y^2).$
$\leqq 0 \quad (\because |x|, |y| \leqq 1).$
$\therefore (x+y)^2 \leqq (xy+1)^2$

(2) 偽
(反例).
$a=0$. $b=0$. $c=1$ のとき
不成立.

(3) 有理数解をもつと仮定.
その解を $\frac{q}{p}$ (p, q: 互いに素な整数, $p \neq 0$)
とおく.
これが 2次方程式 x^2+3x+a の解より
$\left(\frac{q}{p}\right)^2+3\left(\frac{q}{p}\right)+a=0$.
$q^2+3pq+ap^2=0$.
$q(q+3p)=-ap^2$
したがって.
$q+3p=mp$ (m: 整数) と書ける.
すなわち.
$\frac{q}{p}=m-3$ であり $\frac{q}{p}$: 整数.
$\Rightarrow$ $p=1$ とおける.

$q^2+3q+a=0$.
$\therefore a=-q(q+3)$.
qが偶数 $\Rightarrow$ aも偶数
qが奇数 $\Rightarrow$ $q+3$ が偶数であり
aも偶数.

$\therefore$ 2次方程式 x^2+3x+a が
有理数解をもつならば aは偶数.

(1) とりあえず差を求める.
(2) $b^2-4ac<0$ で 左辺が 0になるとき
不成立を見抜く.
(3) とりあえずもつと仮定して話をすすめてみる.