136 座標平面上の楕円

$$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{4}=1 \quad \cdots ①$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 楕円①と直線 $y=x+a$ が交点をもつときの a の値の範囲を求めよ。

(2) $|x|+|y|=1$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体がなす図形の概形をかけ。

(3) 点 (x, y) が楕円①上を動くとき，$|x|+|y|$ の最大値，最小値とそれを与える $(x,\ y)$ をそれぞれ求めよ。

(2014-3)

(1)

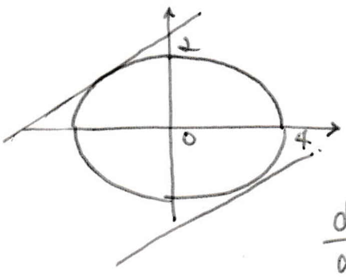
x軸方向：$+2$．y軸方向：-1

平行移動した図形 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

を考える．

この楕円上の点 $(4\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ について．

$(0\leqq\theta<2\pi)$



$\frac{dx}{d\theta}=-4\sin\theta$.

$\frac{dy}{d\theta}=2\cos\theta$.

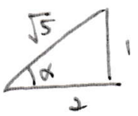
$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

楕円上の点における接線のうち．傾きが1となるものは．

$-\frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=1$.

$\cos\theta+2\sin\theta=0$.

$\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)=0$.



(αは．$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$．$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$ なる点)．

$\therefore\ \theta=\pi-\alpha,\ 2\pi-\alpha$ で

接線の傾きが1となる．

接点の座標は．

$\cos(\pi-\alpha)=-\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin(\pi-\alpha)=\frac{1}{\sqrt{5}}$

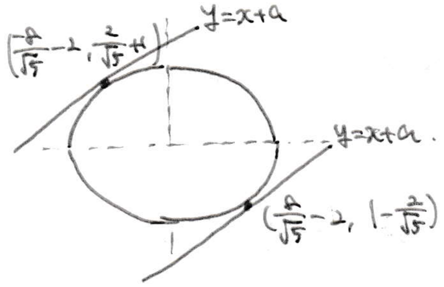
$\cos(2\pi-\alpha)=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin(2\pi-\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

より．

$\left(\frac{8}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$，$\left(-\frac{8}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

平行移動した分だけ．もとに戻す．

$\left(\frac{8}{\sqrt{5}}-2,\ \frac{-2}{\sqrt{5}}+1\right)$．$\left(-\frac{8}{\sqrt{5}}-2,\ \frac{2}{\sqrt{5}}+1\right)$



$\left(-\frac{8}{\sqrt{5}}-2,\ \frac{2}{\sqrt{5}}+1\right)$ のとき $a=3+\frac{10}{\sqrt{5}}=3+2\sqrt{5}$.

$\left(\frac{8}{\sqrt{5}}-2,\ 1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ のとき $a=3-\frac{10}{\sqrt{5}}=3-2\sqrt{5}$

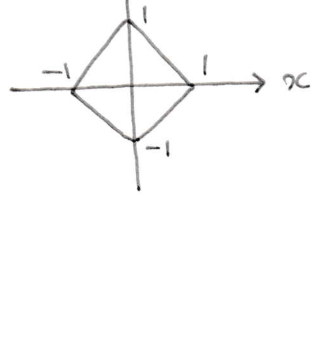
図より．条件をみたすのは．

$3-2\sqrt{5}\leqq a\leqq 3+2\sqrt{5}$ //

(2)

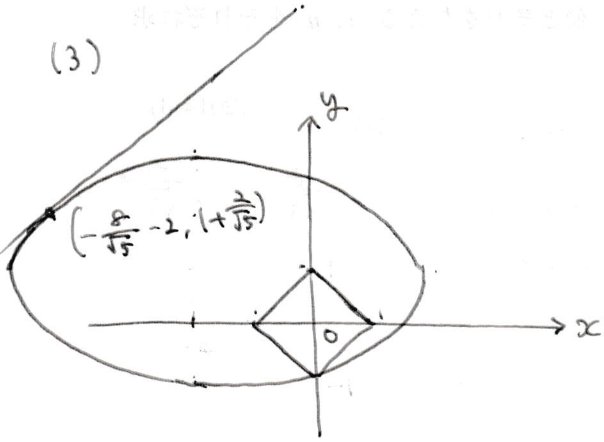
$$|x|+|y|=\begin{cases} x+y & (x,y\geqq 0)\\ x-y & (x\geqq 0.\ y\leqq 0)\\ -x+y & (x\leqq 0.\ y\geqq 0)\\ -x-y & (x,y\leqq 0)\end{cases}$$

より．$|x|+|y|=1$ のなす図形は．以下．



//

(3)



$|x|+|y|$ の最大値は，上図と (1) より

$3+2\sqrt{5}$.

このときの座標は $\left(-\frac{8}{\sqrt{5}}-2,\ \frac{2}{\sqrt{5}}+1\right)$ //

最小値は図から $x=0$ のとき．

i.e. $\frac{2^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

$(y-1)^2=3$

$y=1\pm\sqrt{3}$.

$y<0$ より

$y=1-\sqrt{3}$.

∴ $(0,\ 1-\sqrt{3})$ で最小値．$\sqrt{3}-1$ //

サイクロイド!

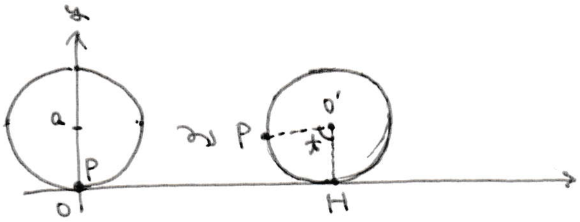
137 中心 $(0,\ a)$，半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点Pが原点 $(0,\ 0)$ を出発するとする。次の問いに答えよ。

(1) 円が角 t だけ回転したとき，点Pの座標を求めよ。

(2) t が0から 2π まで動いて，円が一回転した時の点Pの描く曲線を C とする。曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

(3) (2)の曲線 C の長さを求めよ。

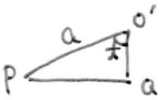
(2010-4)



(1) 弧 $\overset{\frown}{PH}$ の長さは at より．

$\overrightarrow{OH} = (at,\ 0)$．

円の中心をO'，O'から x 軸におろした垂線の足をH．点Pから直線O'Hにおろした垂線の足をQとおく．



$\overrightarrow{QP} = (-a\sin t,\ 0)$

$\overrightarrow{O'Q} = (0,\ -a\cos t)$

$\therefore\ \overrightarrow{O'P} = (-a\sin t,\ -a\cos t)$

$$\therefore\ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HO'} + \overrightarrow{O'P} = \begin{pmatrix} at - a\sin t \\ a - a\cos t \end{pmatrix} \quad /\!/$$

(2) $t=2\pi$ のとき．Pの座標は．

$(2\pi a,\ 0)$

$$\therefore\ S = \int_0^{2\pi a} y\,dx.$$

ここで．$x = at - a\sin t$．

$y = a - a\cos t$．

より．$\dfrac{dx}{dt} = a - a\cos t$．

x	$0 \to 2a\pi$
t	$0 \to 2\pi$

$$\begin{aligned}
\therefore\ S &= \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\{a(1-\cos t)\}\,dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt \\
&= a^2 \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} \\
&= 3a^2\pi \quad /\!/
\end{aligned}$$

(3) 求める曲線Cの長さを l とおく．

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt \\
&= 2a\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,dt \\
&= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{1}{2}t\,dt \\
&= 2a\left[-2\cos\frac{1}{2}t\right]_0^{2\pi} \\
&= 2a\{-2\cdot(-1) - (-2)\} \\
&= 8a \quad /\!/
\end{aligned}$$

138 実数 t が $t \geqq 0$ の範囲を動くとき，xy 平面上で点 $\mathrm{P}(t^2,\ e^{-t})$ が描く曲線を C とする。a を正の実数とし，曲線 C と x 軸，y 軸，および直線 $x = a^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) $a > 0$ の範囲で関数 $S(a)$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフの概形を描け。ただし，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} ae^{-a} = 0$ であることを用いてよい。

(3) $S(a) = 1.35$ となる a が $2 < a < 3$ の範囲に存在することを示せ。ただし，必要なら $2.5 < e < 3$ であることを用いてよい。

(2005-5)

(1)

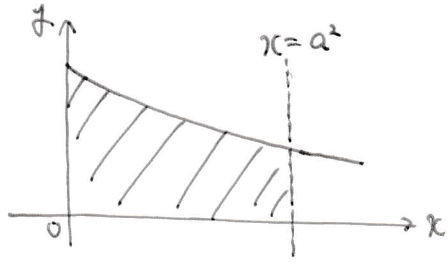
$x = t^2$, $y = e^{-t}$ より.

$$\frac{dx}{dt} = 2t. \qquad \frac{dy}{dt} = -e^{-t}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{e^{-t}}{2t} < 0$$

よって. 曲線 C は単調減少.

また. $y = e^{-t} > 0$.



求める面積は上の斜線部.

$x: 0 \to a^2$ で. $t: 0 \to a$ より.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{a^2} y\,dx \\ &= \int_0^a e^{-t}\cdot 2t\,dt \\ &= \left[-2te^{-t}\right]_0^a + \int 2e^{-t}\,dt \\ &= \left[-2e^{-t}(t+1)\right]_0^a \\ &= 2\left(1 - \frac{a+1}{e^a}\right) \quad // \end{aligned}$$

(2)

(1)より

$$S(a) = 2\left(1 - \frac{a+1}{e^a}\right).$$

$$\begin{aligned} S'(a) &= -2\{e^{-a} - (a+1)e^{-a}\} \\ &= 2ae^{-a} > 0. \end{aligned}$$

$\therefore S(a)$ は単調増加.

$$\begin{aligned} S''(a) &= 2(e^{-a} - a\cdot e^{-a}) \\ &= 2e^{-a}(1-a). \end{aligned}$$

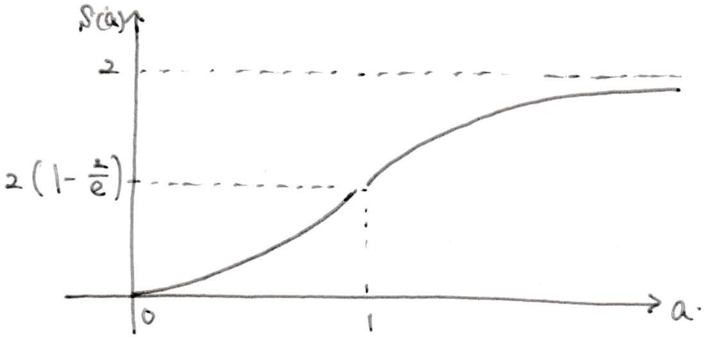
増減表は.

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
S'	/	+	+	+
S''	/	+	0	−
S	(0)	↗	$2\left(1-\frac{2}{e}\right)$	↗

また.

$$\lim_{a\to\infty} S(a) = \lim_{a\to\infty} 2\left(1 - \frac{a}{e^a} - \frac{1}{e^a}\right) = 2(1-0-0) = 2.$$

グラフは下図.



(3)

以前の結果から．

$$S(2) = 2\left(1 - \frac{3}{e^2}\right).$$

$$S(3) = 2\left(1 - \frac{4}{e^3}\right).$$

また，$\frac{5}{2} < e < 3$ を用いれば．

・ $$\left(\frac{5}{2}\right)^2 < e^2 < 9$$

$$\frac{1}{3} < \frac{3}{e^2} < \frac{12}{25}$$

$$\frac{13}{25} < 1 - \frac{3}{e^2} < \frac{2}{3}$$

$$\frac{26}{25} < 2\left(1 - \frac{3}{e^2}\right) < \frac{4}{3} = 1.33\cdots$$

・ $$\left(\frac{5}{2}\right)^3 < e^3 < 27$$

$$\frac{4}{27} < \frac{4}{e^3} < \frac{2^5}{5^3}$$

$$\frac{5^3 - 2^5}{5^3} < 1 - \frac{4}{e^3} < \frac{23}{27}$$

$$2\left(\frac{5^3 - 2^5}{5^3}\right) < 2\left(1 - \frac{4}{e^3}\right) < \frac{46}{27}$$

$$\parallel$$

$$\frac{186}{125} = 1.4\cdots$$

$$\therefore \quad S(2) < 1.33\cdots$$

$$S(3) > 1.4\cdots$$

$S(a)$ が単調に増加なので，

$S(a) = 1.35$ となる点は $2 < a < 3$

に存在

□

139 座標平面上を動く点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ の時刻 t における座標が

$$\begin{cases} x(t)=\cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right) \\ y(t)=\cos(2t) \end{cases} \quad (0 \leqq t < 2\pi)$$

で与えられているとし，この点の軌跡を C とする。

(1) P が原点を通るときの速度ベクトルを求めよ。

(2) C が x 軸，y 軸に関して対称であることを示せ。

(3) C の概形を描け。

(4) C が囲む図形の面積を求めよ。

(2004-3)

(1)

$\theta = t + \frac{\pi}{4}$ とおく. $\left(\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{9}{4}\pi\right)$

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta \\ y(\theta) = \cos 2\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$= \cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right) = \sin 2\theta.$$

この曲線が原点を通るのは，

$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$ のときである.

また，

$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta$. $\frac{dy}{d\theta} = 2\cos 2\theta$

より，速度ベクトルは

(i) $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき.

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(ii) $\theta = \frac{3}{2}\pi$ のとき

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

よって求める速度ベクトルは

$(-1,\ -2)$, $(1,\ -2)$ //

(2) まず，$\theta = 2\pi + \theta'$ とおく.

$x(\theta) = \cos(2\pi+\theta') = \cos(\theta')$

$y(\theta) = \sin 2(2\pi+\theta') = \sin(4\pi+2\theta')$

$= \sin 2\theta'$ より.

曲線 C は周期 2π の周期関数である.

∴ $0 \leq \theta < 2\pi$ について考えてもよい.

また，(1)より $\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$ で C は原点を通るので，

$0 \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2}$ に対し，θ を

$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta'$　　$\theta_3 = \frac{3}{2}\pi - \theta'$

$\theta_2 = \frac{\pi}{2} + \theta'$　　$\theta_4 = \frac{3}{2}\pi + \theta'$

と分割する.

$$C_1 : \begin{cases} x(\theta_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right) = \sin\theta' \\ y(\theta_1) = \sin 2\left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right) = \sin(\pi-2\theta') \\ \qquad = \sin 2\theta' \end{cases}$$

同様に

$$C_2 : \begin{cases} x(\theta_2) = -\sin\theta' \\ y(\theta_2) = -\sin 2\theta' \end{cases}$$

$$C_3 : \begin{cases} x(\theta_3) = -\sin\theta' \\ y(\theta_3) = \sin 2\theta' \end{cases}$$

$$C_4 : \begin{cases} x(\theta_4) = \sin\theta' \\ y(\theta_4) = -\sin 2\theta' \end{cases}$$

C_1 と C_4，C_2 と C_3 を比較して x 軸対称，

C_1 と C_3，C_2 と C_4 を比較して y 軸対称

であることが分かる.

□

(3)

(2)の結果から、C_1の概形のみ調べればよい。

$$C_1 : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin 2\theta \end{cases} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

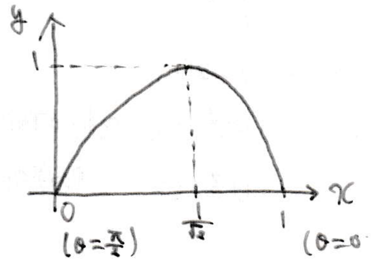
$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = 2\cos 2\theta \quad \text{より。}$$

$\theta = 0$ で $\frac{dx}{d\theta} = 0$.

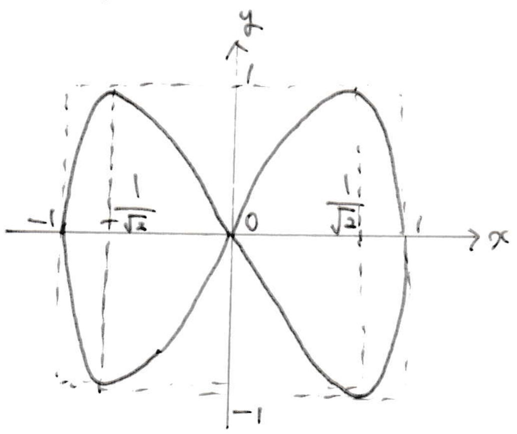
$\theta = \frac{\pi}{4}$ で $\frac{dy}{d\theta} = 0$.

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
x'	0		$-$		/
y'	/	$+$	0	$-$	/
x	1		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		0
y	0		1		0

∴ C_1は以下。



対称性より Cの概形は以下。



//

(4)

対称性より C_1とx軸、y軸が囲む面積を求めればよい。

$$S_1 = \int_0^1 y\,dx$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin 2\theta \cdot (-\sin\theta)\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\theta\cdot(\sin\theta)'\,d\theta$$
$$= \left[\frac{2}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ S = 4S_1$$
$$= \frac{8}{3}$$

//

$\boxed{140}$ xy 平面上で,

$$x = r(t)\cos t,\ y = r(t)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする。

(1) $r(t) = e^{-t}$ のとき，x の最小値と y の最大値を求め，C の概形を図示せよ。

(2) 一般に，全て実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し，

$$\int_0^{\pi} \{r(t)\}^2 \sin^2 t \cos t dt = \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right) dt$$

が成り立つことを示せ。ここで，$r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である。

(3) (1) で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を，x 軸の周りに一回転してできる立体の体積 V は

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} e^{-3t}\sin t dt$$

と表せることを示せ。

(2003-1)

(1)

$x = e^{-t}\cos t$ より.

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$$
$$= -e^{-t}(\cos t + \sin t).$$

$t = \frac{3}{4}\pi$ で $\frac{dx}{dt} = 0$.

t	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$	／	$-$	0	$+$	／
x	1	↘	小	↗	$-e^{-\pi}$

最小値は

$$x\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{4}\pi} \quad /\!/$$

$y = e^{-t}\sin t$ より.

$$\frac{dy}{dt} = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t$$
$$= e^{-t}(\cos t - \sin t).$$

$t = \frac{\pi}{4}$ で $\frac{dy}{dt} = 0$.

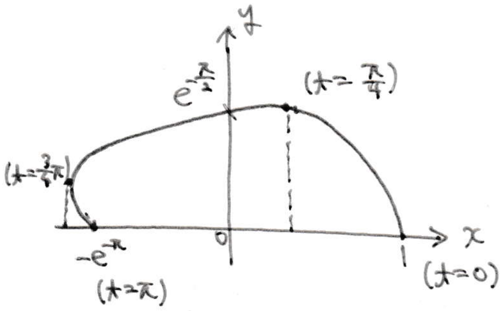
t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
$\frac{dy}{dt}$	／	$+$	0	$-$	／
y	0	↗	大	↘	0

最大値は

$$y\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}} \quad /\!/$$

$t = 0, \pi$ で $y = 0$.

$t = \frac{\pi}{2}$ で $x = 0$. よりグラフは右上図.



(2)

〈証明〉

$$(\text{左辺}) = \left[\sin^2 t\cos t\ r(t)^3\right]_0^{\pi}$$
$$- \int_0^{\pi}(\sin^2 t\cos t)' \cdot \frac{1}{3}r(t)^3\,dt.$$
$$= -\int_0^{\pi}(\sin^2 t\cos t)'\frac{1}{3}r(t)^3\,dt.$$

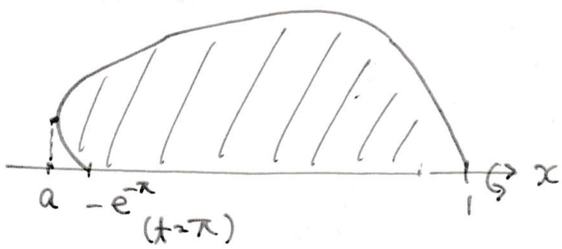
ここで,

$$(\sin^2 t\cos t)' = \left(\sin t \cdot \frac{1}{2}\sin 2t\right)'$$
$$= \frac{1}{2}\cos t \cdot \sin 2t + \sin t\cos 2t$$
$$= \sin t\cos^2 t + \sin t(1 - 2\sin^2 t)$$
$$= 2\sin t - 3\sin^3 t.$$

$$\therefore (\text{左辺}) = -\int_0^{\pi}(2\sin t - 3\sin^3 t)\frac{1}{3}r(t)^3\,dt$$
$$= \int_0^{\pi}\left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right)r(t)^3\,dt.$$

証

(3)



簡単の為、$t=\frac{3}{4}\pi$ のときの x座標の値を a とおく。

求める体積は上図の斜線部を x軸まわりに回転させたもの。

$$V=\pi\int_a^1 y^2\,dx-\pi\int_a^{-e^{-\pi}} y^2\,dx.$$

$$=-\pi\int_1^a y^2\,dx-\pi\int_a^{-e^{-\pi}} y^2\,dx$$

$$=-\pi\int_1^{-e^{-\pi}} y^2\,dx$$

$$=\pi\int_{-e^{-\pi}}^1 y^2\,dx.$$

$$=\pi\int_0^\pi \{e^{-t}\sin t\}^2\cdot e^{-t}\cdot(\sin t+\cos t)\,dt$$

$$=\pi\int_0^\pi (e^{-t})^3\cdot\sin^2 t(\sin t+\cos t)\,dt.$$

$$=\pi\int_0^\pi (e^{-t})^3\sin^3 t\,dt+\underline{\pi\int_0^\pi (e^{-t})^3\sin^2 t\cos t\,dt}.$$

$$=-\pi\int_0^\pi (e^{-t})^2\cdot(e^{-t})'\sin^2 t\cos t\,dt.$$

$$=-\pi\int_0^\pi (e^{-t})^3\left(\sin^3 t-\frac{2}{3}\sin t\right)dt\qquad(\because(2))$$

よって、

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^\pi e^{-3t}\sin t\,dt\ //$$

141 θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である定数とする。座標平面上で，$a^2>4b$ を満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に引いた二つの接線の接点を Q，R とし，接線 PQ の傾きをそれぞれ m_1，m_2 とおく。点 P は $\angle\mathrm{QPR}=\theta$ を満たしている。点 P の全体が作る図形を G とする。

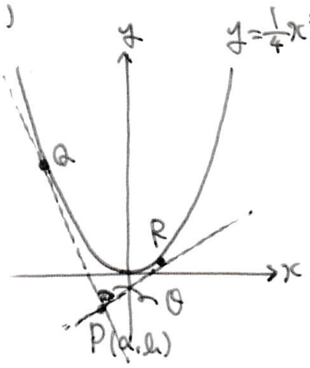
(1) $m_1<0<m_2$ の時，$\tan\theta$ を m_1 と m_2 を用いて表せ。

(2) G を数式で表せ。

(3) $\dfrac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ。

(2003-5)

(1)



直線 PR, PQ と x 軸のなす角を各々 α, β とおく．
傾き各々 m_1, m_2 より

$\tan\alpha = m_2 \quad >0$

$\tan\beta = m_1 \quad <0$

$\theta=\beta-\alpha$ であり．$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ なので．

$m_1m_2\neq 0$ である．

$$\tan\theta = \tan(\beta-\alpha)$$
$$= \frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\cdot\tan\alpha}$$
$$= \frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

//

(2) $y=\frac{1}{4}x^2$

$y'=\frac{1}{2}x$．より．

点 $P(a,b)$ と $y=\frac{1}{4}x^2$ との接線の方程式は，接点を $(t, \frac{1}{4}t^2)$ とおけば．

$$y-\frac{1}{4}t^2=\frac{1}{2}t(x-t)$$
$$y=\frac{1}{2}tx-\frac{1}{4}t^2$$

これが (a,b) を通るので．

$$b=\frac{1}{2}ta-\frac{1}{4}t^2$$
$$t^2-2at+4b=0．$$
$$t=a\pm\sqrt{a^2-4b}．$$

∴傾き m_1, m_2 は．$m=\frac{1}{2}t$ から．

$$m_1=\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2-4b}\right)$$
$$m_2=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-4b}\right)．$$

$\tan\theta=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ より．

$$\tan\theta=\frac{-\sqrt{a^2-4b}}{1+b}．$$

∴ G の方程式は．

$$\tan\theta=\frac{-\sqrt{x^2-4y}}{1+y}$$

//

(3) $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき．$\tan\theta=1$．

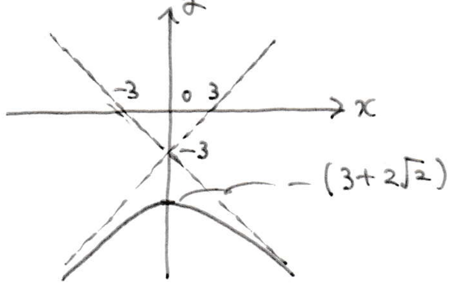
$$∴\ 1=\frac{-\sqrt{x^2-4y}}{1+y}$$
$$1+y=-\sqrt{x^2-4y}．$$

$\Leftrightarrow$ $1+y<0$ かつ $(1+y)^2=x^2-4y$．

$\Leftrightarrow$ $1+y<0$ かつ $x^2-(y+3)^2=-8$．

∴ G は．$x^2-(y+3)^2=-8\ (y<-1)$

図は下．



//

142 平面上を運動する点 P$(x,\ y)$ の時刻 t での x 座標と y 座標が

$$\begin{cases} x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \\ y = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \end{cases}$$

で表されている。ただし，e は自然対数の底である。原点を O，点 $(0,\ 1)$ を M とする。t が $t \geqq 0$ の範囲で変化したとき点 P が描く曲線を C とする。時刻 t において，曲線 C，線分 OM，および線分 OP で囲まれる図形の面積を $A(t)$ で表し，曲線 C と線分 MP で囲まれる図形の面積を $S(t)$ で表す。次の問いに答えよ。

(1) 点 P$(x,\ y)$ の座標 $x,\ y$ ~~の~~に対して y を x を用いて表せ。

(2) 時刻 t を用いて $A(t)$ と $S(t)$ を表せ。

(3) $A(t) - S(t)$ が最大となる時刻 t を求めよ。

(2002-1)

(1)
$$x^2 = \frac{1}{4}(e^t - e^{-t})^2$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2t} - 2\cdot e^t\cdot e^{-t} + e^{-2t})$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2t} - 2 + e^{-2t})$$
$$\therefore\ x^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(e^{2t} + e^{-2t})$$

$$y^2 = \frac{1}{4}(e^{2t} + 2 + e^{-2t})$$
$$\therefore\ y^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(e^{2t} + e^{-2t})$$

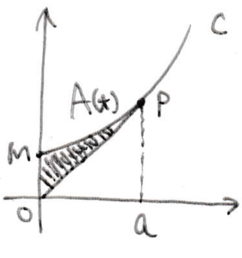
$$\therefore\ x^2 + \frac{1}{2} = y^2 - \frac{1}{2}$$
$$y^2 = x^2 + 1$$

$y > 0$ より $\quad y = \sqrt{x^2+1}$ //

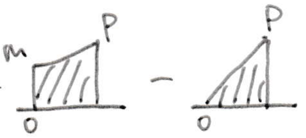
(2)
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) > 0 \text{ より}$$

x は t に対し単調増加。

ある時刻 t における x 座標を a とおく。



A(t) は左図の斜線部の面積である。

$A(t) =$ 

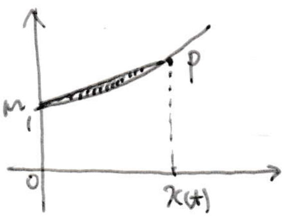
$= A_1(t) - A_2(t)$

とおく。

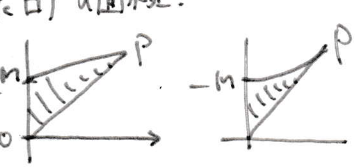
$$A_2(t) = \frac{1}{2}\cdot x(t)\cdot y(t)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\cdot\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$$
$$= \frac{1}{8}(e^{2t} - e^{-2t})$$

$$A_1(t) = \int_0^a y\,dx$$
$$= \int_0^t \frac{e^t + e^{-t}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\right)dt$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^t (e^{2t} + 2 + e^{-2t})\,dt$$
$$= \frac{1}{4}\left[2t + \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^t$$
$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}(e^{2t} - e^{-2t})$$

$$\therefore\ A(t) = \frac{1}{2}t$$ //



求める S(t) は左図の斜線部の面積。

$S(t) =$ 

$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x(t) - A(t)$$
$$= \frac{1}{4}(e^t - e^{-t}) - \frac{1}{2}t$$ //

(3)

$f(t) = A(t) - S(t)$ とおく.

$f(t) = t - \frac{1}{4}(e^t - e^{-t})$.

$f'(t) = 1 - \frac{1}{4}(e^t + e^{-t})$.

$e^t + e^{-t} = 4$ となるとき $f'(t) = 0$.

このときの t を t' とおく.

t	0	$\cdots$	t'	$\cdots$
f'		$+$	0	$-$
f		$\nearrow$	大	$\searrow$

$t = t'$ で $f(t)$ は最大値をとる.

t' を求める.

$e^t + e^{-t} = 4$.

両辺に e^t をかける.

$(e^t)^2 - 4e^t + 1 = 0$.

$e^t = 2 \pm \sqrt{3}$.

$t \geqq 0$ より. $e^t \geqq 1$.

$\therefore\ e^t = 2 + \sqrt{3}$.

$t = \log(2 + \sqrt{3})$. //

$\boxed{143}$ 平面上の点 P の x 座標と y 座標が，変数 θ の関数 $f(\theta) = \dfrac{(\theta-\pi)^2}{2\pi^2} + \dfrac{1}{2}$ を用いて

$$\begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

と表されている。θ が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲で変化したとき，点 P が描く曲線を C とする。点 P を $\mathrm{P}(\theta)$ で表し，$\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}(0)$, $\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\mathrm{P}_3 = \mathrm{P}(\pi)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 方程式

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \quad (a>0,\ b>0)$$

で与えられる楕円が点 P_1 を通るとする。このとき，点 P_3 がこの楕円の内部に含まれる (ただし，楕円の上にない) ための必要十分条件を α のみを用いて表せ。

(2) 点 P_2 における曲線 C の接線を l とする。l の方程式を求めよ。

(3) 次の条件 i，ii，iii を満たす楕円 D を考える。

i. D の軸の一つは x 軸上にある。

ii. D は点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ を通る。

iii. 点 P_2 における D の接線は l である

このとき，点 P_3 は楕円 D の内部に含まれるかどうか判定せよ。

(2002-5)

$f(0) = \dfrac{\pi^2}{2\pi^2} + \dfrac{1}{2} = 1$.

$f(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{\frac{1}{4}\pi^2}{2\pi^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{8}$

$f(\pi) = \dfrac{1}{2}$ より.

$\mathrm{P}_1 : (f(0), 0) = (1, 0)$

$\mathrm{P}_2 : (0, f(\frac{\pi}{2})) = (0, \frac{5}{8})$

$\mathrm{P}_3 : (-f(\pi), 0) = (-\frac{1}{2}, 0)$.

(1) 楕円が $(1,0)$ を通るので.

$$\frac{(1-\alpha)^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1.$$

x 軸との共有点のうち. $(1,0)$ でない点を $(x,0)$ とおく.

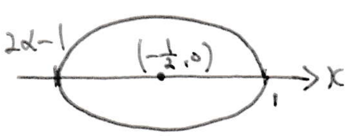
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1.$$

上2式より.

$$(1-\alpha)^2 = (x-\alpha)^2$$

$$x^2 - 2\alpha x + (2\alpha - 1) = 0$$

$$\therefore x = 2\alpha - 1$$



楕円の内部に $(-\frac{1}{2}, 0)$ を含むには.

$$2\alpha - 1 < -\frac{1}{2}$$

をみたせばよい.

$$\therefore \alpha < \frac{1}{4} \quad //$$

(2) $\dfrac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta$

$\dfrac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$.

ここで. $f'(\theta) = \dfrac{1}{\pi^2}\cdot(\theta - \pi)$ より

$f'(\frac{\pi}{2}) = -\dfrac{1}{2\pi}$,

また $f(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{5}{8}$.

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$ のとき.

$\dfrac{dx}{d\theta} = -\dfrac{1}{2\pi}\cdot 0 + \dfrac{5}{8}\cdot(-1) = -\dfrac{5}{8}$.

$\dfrac{dy}{d\theta} = -\dfrac{1}{2\pi}\cdot 1 + \dfrac{5}{8}\cdot 0 = -\dfrac{1}{2\pi}$

$\therefore$ 傾きは $\dfrac{\frac{1}{2\pi}}{\frac{5}{8}} = \dfrac{4}{5}\pi$.

これが $(0, \frac{5}{8})$ を通ることから.

$$y - \frac{5}{8} = \frac{4}{5\pi}(x-0)$$

$$y = \frac{4}{5\pi}x + \frac{5}{8} \quad //$$

(3)

楕円Dの方程式を

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

とおく.

(i)より. $\beta = 0$.

$$\therefore D : \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

(ii)より.

・DがP$_1$(1, 0)を通るので

$$\frac{(1-\alpha)^2}{a^2} = 1 . \quad \therefore (1-\alpha)^2 = a^2$$

・P$_2$ $(0, \frac{5}{8})$ を通るので.

$$\frac{\alpha^2}{a^2} \cdot \frac{25}{64}b^2 = 1 .$$

(iii)から.

DのP$_2$における接線の方程式は.

$$\frac{(0-\alpha)(x-\alpha)}{a^2} + \frac{\frac{5}{8}y}{b^2} = 1 .$$

$$y = \frac{8}{5}b^2\frac{\alpha}{a^2}(x-\alpha) + \frac{5}{8}b^2$$

傾き $\frac{4}{5\pi}$ より.

$$\frac{8}{5}b^2\frac{\alpha}{a^2} = \frac{4}{5\pi} \qquad \therefore \frac{8}{5}b^2 = \frac{4}{5\pi}\cdot\frac{a^2}{\alpha}$$

$x=0$ で $y = \frac{5}{8}$ より.

$$\frac{8}{5}b^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right) = \frac{5}{8}$$

上の式を代入.

$$\frac{4}{5\pi}\cdot\frac{a^2}{\alpha}\left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right) = \frac{5}{8}$$

$$\frac{4}{5\pi}\frac{a^2}{\alpha} - \frac{4}{5\pi}\alpha = \frac{5}{8}$$

$$\frac{a^2}{\alpha} - \alpha = \frac{25}{32}\pi$$

$$a^2 = \alpha^2 + \frac{25}{32}\pi\alpha$$

$$(1-\alpha)^2 = \alpha^2 + \frac{25}{32}\pi\alpha \qquad (\because \text{(ii)})$$

$$1 - 2\alpha = \frac{25}{32}\pi\alpha$$

$$\alpha\left(\frac{25}{32}\pi + 2\right) = 1$$

$$\therefore \alpha = \frac{32}{25\pi + 64}$$

よって.

$$\frac{1}{4} - \alpha = \frac{25\pi - 64}{4(25\pi + 64)} > 0$$

$$(\because 25\pi > 64)$$

$$\therefore \frac{1}{4} - \alpha > 0$$

$$\alpha < \frac{1}{4} .$$

これは(1)の条件をみたすので. P$_3$はDの内部に含まれる ■

$\boxed{144}$ 関数 $f(x)$ の第２次導関数は常に正とし，関数 $y=f(x)$ のグラフ G 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における~~接戦~~接線と x 軸のなす角を $\theta(t)$ とする。ただし $\theta(t)$ は $-\dfrac{\pi}{2}<\theta(t)<\dfrac{\pi}{2}$ で，接線の傾きが正，負，０に従って正，負，０の値をとるものとする。また,，点 P における G の法線上に P から距離１の点 $\mathrm{Q}(\alpha(t),\ \beta(t))$ を G の下側にとる。

(1) $\theta(t)$ はつねに増加することを示せ。

(2) $\alpha(t),\ \beta(t)$ を求めよ。

(3) t が a から b $(a<b)$ まで変化するとき，点 P，Q が描く曲線の長さをそれぞれ $L_1,\ L_2$ とする。L_2-L_1 を $\theta(a)$ と $\theta(b)$ を用いて表せ。

(2001-5)

(1) 〈証明〉.

$y=f(x)$ の点 $P(t, f(t))$ における接線と x 軸のなす角が $\theta(t)$ より．傾きは $\tan\theta(t)$ と表せる．

∴ $f'(t)=\tan\theta(t)$.

また仮定より $f''(t)>0$.

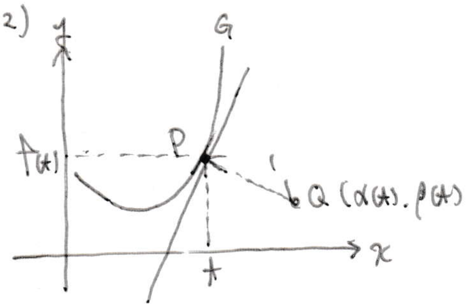
∴ $f'(t)$ は単調増加.

i.e. $\tan\theta(t)$ は単調増加.

ここで，$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ で $\tan\theta$ は単調増加.

∴ $\theta(t)$ は単調増加 ■

(2)



$PQ=1$ より

$(\alpha(t)-t)^2+(\beta(t)-f(t))^2=1$. ―①

点Pでの Gの接線の傾きが $f'(t)$ より．

この接線の方向ベクトルは $(1, f'(t))$ と書ける．

PQは接線の法線より．

$\vec{PQ}\cdot(1, f'(t))=0$

i.e. $(\alpha(t)-t)\cdot 1+(\beta(t)-f(t))\cdot f'(t)=0$.

よって $\alpha(t)-t=-f'(t)(\beta(t)-f(t))$.

…②

①と②より.

$(f'(t))^2(\beta(t)-f(t))^2+(\beta(t)-f(t))^2=1$.

$((f'(t))^2+1)(\beta(t)-f(t))^2=1$.

∴ $(\beta(t)-f(t))^2=\dfrac{1}{(f'(t))^2+1}$

$\beta(t)-f(t)=\dfrac{-1}{(f'(t))+1}$

(∵ $\beta(t)<f(t)$)

∴ $\beta(t)=f(t)-\dfrac{1}{(f'(t))^2+1}$. //

②に代入して

$\alpha(t)=t+\dfrac{f'(t)}{(f'(t))^2+1}$ //

(3)

$L_1=\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$

$=\int_a^b\sqrt{1+\tan^2\theta(t)}\,dt$

$=\int_a^b\dfrac{1}{\cos\theta(t)}\,dt$ (∵ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ で $\cos\theta(t)>0$.)

また．

$L_2=\int_a^b\sqrt{(\alpha'(t))^2+(\beta(t))^2}\,dt$.

まず.

$$\alpha(t) = t + \frac{f'(t)}{\sqrt{(f'(t))^2+1}}$$

$$= t + \frac{\tan\theta(t)}{\frac{1}{\cos\theta(t)}}$$

$$= t + \sin\theta(t).$$

$$\therefore\ \alpha'(t) = 1 + \theta'(t)\cdot\cos\theta(t).$$

次に. $$\beta(t) = f(t) + \frac{-1}{\frac{1}{\cos\theta(t)}}$$

$$= f(t) - \cos\theta(t)$$

$$\therefore\ \beta'(t) = f'(t) + \theta'(t)\cdot\sin\theta(t)$$

$$= \tan\theta(t) + \theta'(t)\sin\theta(t)$$

$$= \tan\theta(t)\left(1+\theta'(t)\cos\theta(t)\right)$$

$$\therefore\ (\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2$$

$$= (1+\theta'(t)\cos\theta(t))^2 + \tan^2\theta(t)\,(1+\theta'(t)\cos\theta(t))^2$$

$$= (1+\theta'(t)\cos\theta(t))^2\,(1+\tan^2\theta(t))$$

$$= (1+\theta'(t)\cos\theta(t))^2\cdot\left(\frac{1}{\cos\theta(t)}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta(t)} + \theta'(t)\right)^2$$

よって

$$\sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} = \frac{1}{\cos\theta(t)} + \theta'(t)$$

$$(\because\ \cos\theta(t) > 0.\ \theta'(t) > 0)$$

よって $$L_2 = \int_a^b \left(\frac{1}{\cos\theta(t)} + \theta'(t)\right)dt$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\cos\theta(t)}\,dt + [\theta(t)]_a^b$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\cos\theta(t)}\,dt + (\theta(b) - \theta(a))$$

$$\therefore\ L_2 - L_1 = \theta(b) - \theta(a)$$

//

145 平面上の点の極座標を，原点 O からの距離 r ($\geqq 0$) と偏角 θ を用いて $(r,\ \theta)$ で表す。

(1) 平面上の 2 曲線 $C_1 : r = 2\cos(\pi + \theta)$, $C_2 ; r = 2(\cos\theta + 1)$, $\left(\text{ただし}, \dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}\right)$ の概形を描き，この 2 曲線 C_1, C_2 の交点の極座標を求めよ。

(2) 平面上の 3 点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$, E の極座標をそれぞれ $(r_1,\ \theta_1)$, $(r_2,\ \theta_2)$, $(1,\ 0)$ とするとき，三角形 ~~$\mathrm{OP_2Q}$~~ $\mathrm{OEP_1}$. と三角形 $\mathrm{OP_2Q}$ とが~~掃除~~相似となる点 Q を $\mathrm{P}_1 {*} \mathrm{P}_2$ で表す。点 $\mathrm{P}_1 {*} \mathrm{P}_2$ の極座標を求めよ。ただし，点 Q は $\angle\mathrm{EOP}_1 = \angle\mathrm{P_2OQ}$ となるように向きも込めて定める。

(3) 3 点 $\mathrm{O}, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ が同一直線上にないとき，四辺形 $\mathrm{OP_1RP_2}$ が平行四辺形となるような点 R を $\mathrm{P}_1 \circ \mathrm{P}_2$ で表す。$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ の極座標が $(r_1,\ \theta_1)$, $(r_2,\ \theta_2)$ で $r_1 = r_2 = r$ のとき，点 $\mathrm{P}_1 \circ \mathrm{P}_2$ の極座標を求めよ。

(4) さらに，平面上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ として，実数 k に対し点 kP を，$k \geqq 0$ のときは極座標が $(kr,\ \theta)$ となる点，$k < 0$ の時は $(|k|r,\ \theta + \pi)$ となる点とする。(1) で求めた 2 曲線 C_1, C_2 の交点を V として，点 $k(\mathrm{V} \circ (\mathrm{V} * \mathrm{V}))$ が曲線 C_1 上にあるための k の条件を求めよ。

(2000-5)

(1)

$2\cos(\pi + \theta) = 2(\cos\theta + 1)$

$-\cos\theta = \cos\theta + 1$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$.

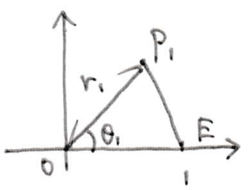
$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$ より

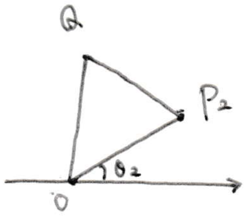
交点の偏角は　$\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$.

このときのrの値は　$r = 1$.

∴ 交点は $\left(1, \frac{2}{3}\pi\right), \left(1, \frac{4}{3}\pi\right)$ //

(2)





$\triangle\mathrm{OEP_1} \backsim \triangle\mathrm{OP_2Q}$ より.

$\angle\mathrm{P_2OQ} = \theta_1$.

∴ OQの x軸となす角は $\theta_1 + \theta_2$.

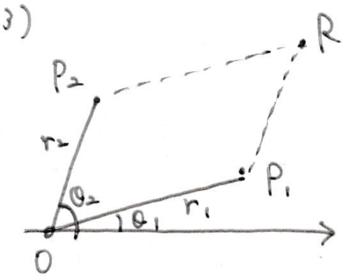
また. $\mathrm{OE} : \mathrm{OP_1} = \mathrm{OP_2} : \mathrm{OQ}$

$1 : r_1 = r_2 : \mathrm{OQ}$

$\mathrm{OQ} = r_1 r_2$

∴ Qの極座標は $(r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)$ //

(3)



$r_1 = r_2$ より.

$\mathrm{OP_1RP_2}$ はひし形となる.

∴ ORは $\angle\mathrm{P_1OP_2}$ の角二等分線.

∴ x軸とORのなす角は

$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + \theta_1 = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$.

x-y座標で表したとき. Rの座標は

$(r\cos\theta_1 + r\cos\theta_2,\ r\sin\theta_1 + r\sin\theta_2)$

と表せるので.

$\mathrm{OR}^2 = r^2(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2 + r^2(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)^2$

$= 2r^2 + 2r^2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)$

$= 2r^2\left(1 + \cos(\theta_2 - \theta_1)\right)$

$= 4r^2 \frac{1 + \cos(\theta_2 - \theta_1)}{2}$

$= 4r^2 \cdot \cos^2\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$

∴ $\mathrm{OR} = 2r\left|\cos\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right|$

∴ Rの極座標は

$\left(2r\left|\cos\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right|, \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right)$ //

(4)

(1)より交点は $\left(1, \frac{2}{3}\pi\right)$, $\left(1, \frac{4}{3}\pi\right)$.

(i) $v = \left(1, \frac{2}{3}\pi\right)$ のとき.

$$v * v = \left(1, \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$v \circ (v * v) = \left(2 \cdot 1 \cdot \left|\cos\frac{\frac{4}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi}{2}\right|, \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\right)\right)$$

$$= \left(2 \cdot \cos\frac{1}{3}\pi, \pi\right)$$

$$= (1, \pi).$$

① $k > 0$ のとき

$$k(v \circ (v * v)) = (k, \pi)$$

C_1上より

$$k = 2\cos(\pi + \pi) = 2$$

$\therefore k = 2$. ok.

② $k < 0$ のとき

$$k(v \circ (v * v)) = (|k|, \pi)$$

C_1上より

$$|k| = 2\cos(3\pi) = -2$$

不適.

$\therefore k = 2$.

(ii) $v = \left(1, \frac{4}{3}\pi\right)$ のとき

$$v * v = \left(1, \frac{8}{3}\pi\right) = \left(1, \frac{2}{3}\pi\right).$$

$$v \circ (v * v) = (1, \pi)$$

より. (i)と同様.

(i)(ii)より 求める条件は $k = 2$ //

$\boxed{146}$

(1) 実数 $k \geqq 0$ に対し，

$$\int_0^{2\pi} \left\{ y\left(x\cos\theta + \frac{1}{2}x^2\right) - \left(x\cos\theta + \frac{1}{2}x^2\right)^2 \right\} \cos\theta d\theta = 2k\pi$$

を満たす xy 平面内の曲線の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた曲線と直線 $y = a$ との共有点が 1 個であるような実数 a の範囲を求めよ。

(1999-3)

(1)

$$\left\{ y\left(x\cos\theta + \tfrac{1}{2}x^2\right) - \left(x\cos\theta + \tfrac{1}{2}x^2\right)^2 \right\} \cdot \cos\theta$$

$$= \left(xy\cos\theta + \tfrac{1}{2}x^2y - x^2\cos^2\theta - x^3\cos\theta - \tfrac{1}{4}x^4\right) \times \cos\theta$$

$$= (xy - x^3)\cos^2\theta + \left(\tfrac{1}{2}x^2y - \tfrac{1}{4}x^4\right)\cos\theta - x^2\cos^3\theta .$$

ここで，

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta = 0 .$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi .$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} (1-\sin^2\theta)\cos\theta \, d\theta = \left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{2\pi} = 0 .$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \left\{ y\left(x\cos\theta + \tfrac{1}{2}x^2\right) - \left(x\cos\theta + \tfrac{1}{2}x^2\right)^2 \right\} \cos\theta \, d\theta = (xy - x^3)\pi .$$

$\therefore$ 求める方程式は

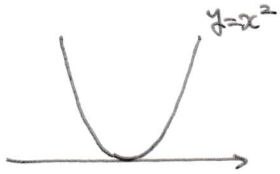
$$(xy - x^3)\pi = 2\pi k .$$

$$\Longleftrightarrow \quad xy - x^3 = 2k \quad //$$

(2) $k = 0$ のとき．

$$xy = x^3$$

$$y = x^2 .$$



共有点が唯1つより

$a = 0$.

$k > 0$ のとき．

$$xy - x^3 = 2k$$

$x \neq 0$ より，

$$y = x^2 + \frac{2k}{x}$$

$$y' = 2x - \frac{2k}{x^2} = \frac{2(x^3 - k)}{x^2}$$

$x = \sqrt[3]{k}$ で $y' = 0$ となる．

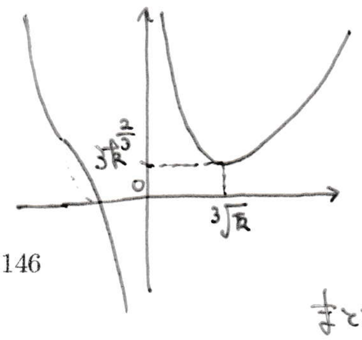
x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{k}$	$\cdots$
y'	$-$	/	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	/	$\searrow$	$3k^{\frac{2}{3}}$	$\nearrow$

$x \to -\infty$ で $y \to \infty$,

$x \to 0_-$ で $y \to -\infty$.

$x \to 0+$ で $y \to \infty$

$x \to \infty$ で $y \to \infty$ なので，グラフは下図．



グラフより，求める a の範囲は

$$a < 3k^{\frac{2}{3}}$$

まとめると． $a = 0$ or $a < 3k^{\frac{2}{3}}$ //

147 (1) 平面上に半径が R, $r(R>r)$ の２円があり，それらの中心間の距離が l であるとする。これらの２円の円周が共有点をもつための必要十分条件を R, r, l を用いて表せ。

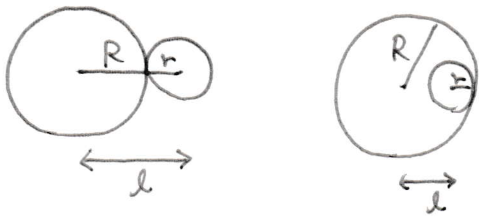
(2) 座標平面上で x 軸を準線とし，定点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を通る放物線について考える。ただし，$a>0$ とする。

i. そのような放物線の焦点 $\mathrm{F}(s,\ t)$ 全体はどのような図形を描くか。

ii. x 軸上にない点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ がそのような放物線上の点であるための必要十分条件を求めよ。

(1998-10)

(1) ２つの円周が共有点をもつのは．



上の２通り．

$\therefore$ $R+r>l$ または $R-r<l$．　//

(2) (i)

$F(s, t)$：焦点，$y=0$：準線 とする．

放物線上の点を (x, y) とすると．

$$\sqrt{(x-s)^2+(y-t)^2}=|y|.$$

$$(x-s)^2+(y-t)^2=y^2$$

$$(x-s)^2+t^2=2ty$$

これが $A(0, a)$ を通るので

$$s^2+t^2=2at.$$

$t\neq0$ より $t>0$．

よって，

$t^2-2at+s^2=0$ より

$$(t-a)^2+s^2=a^2. \quad (t>0). \cdots(*)$$

$\therefore$ $F(s, t)$ は，中心 $(0, a)$，半径 a の円で $t>0$ の部分　//

(ii) 点 $P(p, q)$ が放物線上より．

$$(p-s)^2+(q-t)^2=q^2$$

$(q, t>0)$

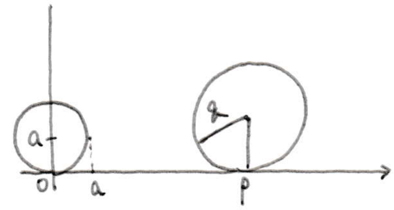
この方程式と $(*)$ が共有点をもてばよい．

① $p=0$ のとき．

一致することが必要十分条件．

$\therefore$ $q=a$．

② $p\neq0$ のとき．



$$|q-a|\leq\sqrt{p^2+(q-a)^2}\leq q+a.$$

$$(q-a)^2\leq p^2+(q-a)^2\leq(q+a)^2$$

$$-2aq\leq p^2-2aq\leq 2aq$$

$$\therefore\ p^2\leq 4aq.$$

よって求める条件は．

$(p=0$ かつ $q=a)$ or $(p^2\leq 4aq$ かつ $p\neq0,\ q>0)$　//

148 (1) 次の$\boxed{}$の中をうめよ。

(i) 2直線 a, b が1点Pで交わるとき a, b 上にない点Xについて，Xから a, b にそれぞれ垂線XJ, XKを引く。ただし，J, KはPと異なるとする。このとき，Xが∠JPKの二等分線上にあるための必要十分条件は，XJ=$\boxed{\text{あ}}$が成り立つことである。

(ii) 2点C, Dに対し，点Xが線分CDの垂直二等分線上にあるための必要十分条件は，$\boxed{\text{い}}=\boxed{\text{う}}$が成り立つことである。

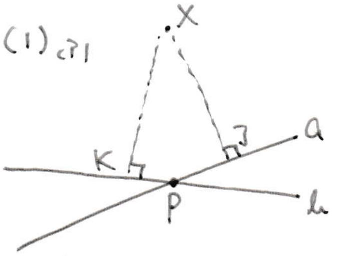
(2) △ABCの∠Aの二等分線とこの三角形の外接円との交点でAと異なる点をDとおく。

(i) 線分AD上にDB=DXとなる点Xをとると，Xより辺BC，ABにひいた垂線の長さは等しいことを示せ。

(ii) 線分ADのDの方向への延長線上にある点Yから，直線BC，ABにひいた垂線の長さが等しいならば，Dは線分XYの中点となることを示せ。

(1997-)

(1) (i)



XPが ∠KPJ の二等分線

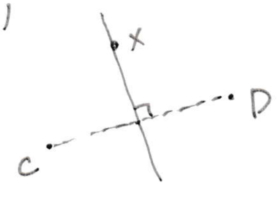
⇔ ∠KPX = ∠JPX

仮定より ∠XKP = ∠XJP = 90° なので

△XPK ≡ △XPJ であればよい.

∴ 求める必要十分条件は XJ = XK. //

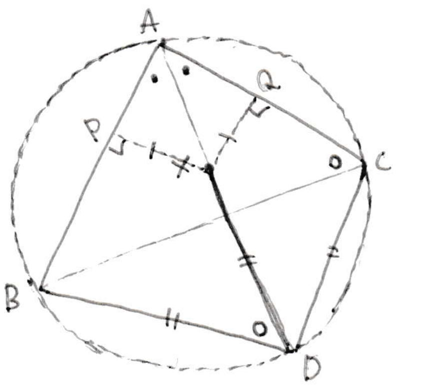
(ii)



CX = DX //

(2)

(i) <証明>.



円周角の定理と仮定より.

BD = DC = DX.

円周角の定理から.

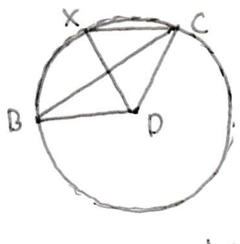
∠ACB = ∠ADB. …①

点XからAB. ACへの垂線の足をP.Qとおく.

△AXP ≡ △AXQ.

∴ XP = XQ.

中心D.で 点B.C.Xを通る円を考える.



円周角の定理より

∠XDB = 2×∠XCB.

①より. XCは∠ACBの二等分線.

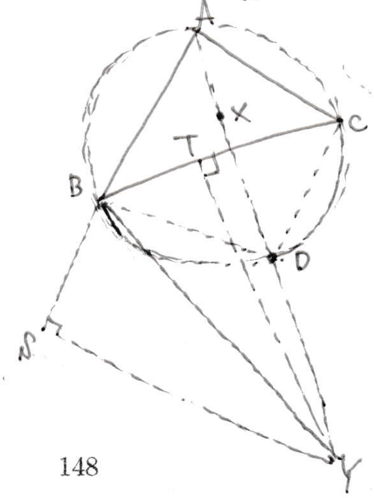
XからBCへの垂線をRとおくと

△XQC ≡ △XRC.

∴ XQ = XR.

よって. XP = XR

(ii) <証明>.



仮定より YS = YT.

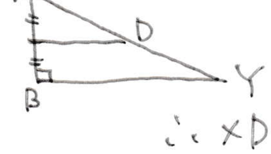
∴ △YBS ≡ △YBT.

∴ ∠YBS = ∠YBT.

ここで. XBは∠ABCの二等分線

∴ ∠XBY = 90°

DB = DXより. BXの垂直二等分線は点Dを通る.



∴ XD = DY

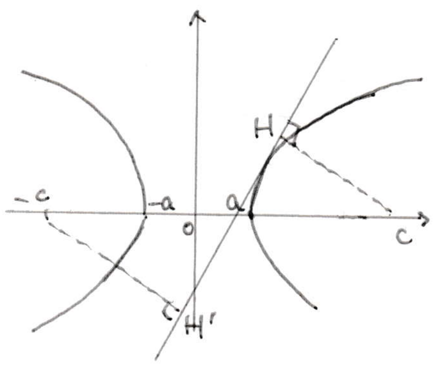
149 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,\ b>0)$
の接線 $y=mx+n$ にこの双曲線の焦点 F$(c,\ 0)$, F'$(-c,\ 0)$ $(c>0)$ より垂線 FH, F'H' をひく。

(1) n を m で表せ。

(2) H, H' は原点 O を中心とする半径 a の円周上にあることを示せ。

(3) 原点 O から接線 $y=mx+n$ への距離を t とするとき，△HOH' の面積 S を t で表せ。さらにこの接線を動かすとき，t のとりうる範囲および S の最大値を求めよ。

(1997-10)



(1)
双曲線と $y=mx+n$ の共有点の x 座標は．

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1.$$

$$b^2x^2-a^2(mx+n)^2=a^2b^2.$$

整理すると．

$$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2mnx-a^2(n^2+b^2)=0$$

接しているので．$D=0$．

$$\frac{D}{4}=(a^2mn)^2+(b^2-a^2m^2)a^2(n^2+b^2)=0$$

$$\therefore\ a^2m^2n^2+(b^2-a^2m^2)(n^2+b^2)=0.$$

左辺をまとめると．

$$(\text{左辺})=b^2(n^2+b^2)-a^2b^2m^2$$
$$=b^2(n^2+b^2-a^2m^2)$$

$$\therefore\ n^2+b^2-a^2m^2=0.$$
$$n^2=a^2m^2-b^2$$

$$n=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$$ //

(2) 〈証明〉．

接線：$y=mx+n$．より

点 $(c, 0)$ を通り．接線に垂直な直線は．

$$y=-\frac{1}{m}x+\frac{c}{m}$$

接線との交点 H は．

$$mx+n=-\frac{1}{m}x+\frac{c}{m}$$

$(m^2+1)x=c-mn$．より

$$\mathrm{H}\left(\frac{c-mn}{m^2+1},\ \frac{mc+n}{m^2+1}\right).$$

原点から H への距離 d の 2 乗は．

$$d^2=\left(\frac{c-mn}{m^2+1}\right)^2+\left(\frac{mc+n}{m^2+1}\right)^2$$
$$=\left(\frac{1}{m^2+1}\right)^2\left((c-mn)^2+(mc+n)^2\right)$$
$$=\left(\frac{1}{m^2+1}\right)^2\left(c^2+m^2n^2+m^2c^2+n^2\right)$$
$$=\left(\frac{1}{m^2+1}\right)^2(m^2+1)(c^2+n^2)$$
$$=\frac{c^2+n^2}{m^2+1}$$

ここで c は焦点の x 座標より

$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

また (1) より

$$n=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$$

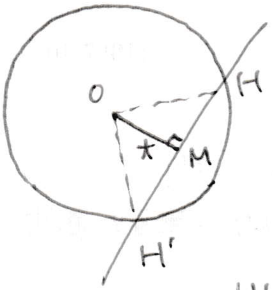
$$\therefore\ d^2=\frac{(a^2+b^2)+(a^2m^2-b^2)}{m^2+1}$$

$$=a^2$$ （$-c$ でも同様）

∴ H, H' はいずれも中心 O，半径 a の円周上に存在．

□

(3)



(2)より $OH = OH' = a$.
また、O から HH' への垂線の足 M とすると仮定より
$OM = t$.

$HM = H'M$ より

$$HH' = 2 \times \sqrt{a^2 - t^2} = 2\sqrt{a^2 - t^2}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot HH' = t\sqrt{a^2 - t^2}$$

点と直線の距離の公式から.

$$t = OM = \frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{\frac{a^2m^2 - b^2}{m^2+1}} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2+b^2}{m^2+1}} \quad \cdots (*)$$

ここで、
双曲線の傾きが m であり、
漸近線は $y = \pm \frac{b}{a}x$ なので
$m > 0$ のとき $m > \frac{b}{a}$
$m < 0$ のとき $m < -\frac{b}{a}$

$$\therefore m^2 > \frac{b^2}{a^2}$$

$$m^2 + 1 > \frac{b^2}{a^2} + 1.$$

$$0 < \frac{1}{m^2+1} < \frac{a^2}{a^2+b^2}$$

$$0 < \frac{a^2+b^2}{m^2+1} < a^2$$

$\therefore$ (*)より

$$0 < t < a.$$

$$S = t\sqrt{a^2 - t^2} = \sqrt{t^2(a^2 - t^2)} = \sqrt{(t^2 - \tfrac{1}{2}a^2)^2 + \tfrac{1}{4}a^4}$$

$\therefore$ 面積の最大値は $t^2 = \frac{1}{2}a^2$ のとき

$$S = \frac{1}{2}a^2$$

$\boxed{150}$ 曲線 $y = f(x)$ $(x > 0)$ 上の任意の点 $(t,\ f(t))$ における接線は y 軸と点 $(0,\ (t^2-1)f(t))$ で交わるという。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = f(x)$ の満たす微分方程式を求めよ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ が点 $(1, 1)$ を通るとき，関数 $f(x)$ を求めよ。

(3) 上に求めた関数 $f(x)$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ。

(1995-4)

(1) $y=f(x)$ の任意の点 $(t, f(t))$ での接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

これが $(0,\ (t^2-1)f(t))$ を通るので

$$(t^2-1)f(t)-f(t)=-t\cdot f'(t).$$

$$(t^2-2)f(t)=-t\cdot f'(t)$$

よって求める微分方程式は

$$(2-x^2)f(x)=x\cdot f'(x)$$

(2) $y=f(x)$ とおく.

$$\frac{dy}{dx}=f'(x).$$

(1)より

$$(2-x^2)y=x\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \int\frac{1}{y}dy=\int\frac{2-x^2}{x}dx.$$

$$\log|y|=\int\frac{2}{x}dx-\int x\,dx$$

$$=\log x^2-\frac{1}{2}x^2+c.$$

$$\therefore y=c'\cdot x^2\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

これが点 $(1,1)$ を通るので

$$1=c'\cdot e^{-\frac{1}{2}}$$

$$c'=e^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore y=e^{\frac{1}{2}(1-x^2)}\cdot x^2 \quad (x>0)$$

(3)

$$f'(x)=2x\cdot\exp\left\{\frac{1}{2}(1-x^2)\right\}.$$

$$+x^2\cdot\frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2}(1-x^2)\right\}\cdot(-2x)$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{2}(1-x^2)\right\}\cdot x(2-x^2)$$

$x>0$ より

$f'(x)=0$ となるのは

$x=\sqrt{2}$ のときのみ.

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
f'	/	$+$	0	$-$
f	/	↗	大	↘

増減表から. $x=\sqrt{2}$ で最大値をとり.

その値は $f(\sqrt{2})=2\cdot e^{-\frac{1}{2}}$

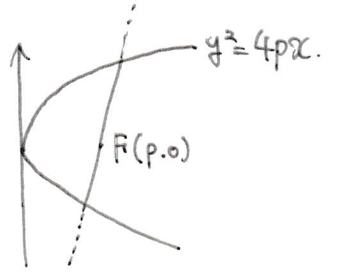
151 放物線の焦点を通る直線がこの放物線で切られてできる線分を考えるとき，それらの中点の軌跡はやはり放物線となる。次の問いに答えよ。

(1) $p>0$ とする。放物線 $y^2=4px$ とその焦点 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ からこの方法で得られる放物線の式とその焦点を求めよ。

(2) 放物線 $\mathrm{P}_0 : y^2=4x$ からこの方法で得られる放物線を P_1 とする。さらに P_1 からこの方法で得られる放物線を P_2 とする。これを繰り返して得られる放物線 P_n の式を求めよ。また，$n\to\infty$ のとき，放物線 P_n の焦点はどのような点に近づくか。

(1993-1)

(1)



Fを通る直線を $y=m(x-p)$ とおく $(m\neq 0)$.

$y^2=4px$ との共有点のx座標は.

$$m^2(x-p)^2=4px.$$

$$m^2x^2-2p(m^2-2)x+m^2p^2=0.$$

$$x=\frac{p(m^2-2)\pm 2p\sqrt{1+m^2}}{m^2}$$

よって. 中点のx座標は

$$x=\frac{p(m^2-2)}{m^2} \quad \cdots ①$$

より.

$$y=m\left(\frac{p(m^2-2)}{m^2}-p\right)$$

$$=\frac{2p}{m}$$

$$\therefore \frac{1}{m}=\frac{y}{2p} \quad \cdots ②$$

①より

$$\frac{x}{p}=1-\frac{2}{m^2}$$

②を代入

$$\frac{x}{p}=1-\frac{2y^2}{4p^2}$$

$$y^2=2p(x-p).$$

$$=4\cdot\frac{p}{2}(x-p).$$

よって求める放物線は $y^2=2p(x-p)$.

焦点は $\left(\frac{3}{2}p,\ 0\right)$

(放物線 $y^2=4px \longrightarrow y^2=4\cdot\frac{p}{2}(x-p)$.
焦点 $(p.0) \longrightarrow \left(\frac{3}{2}p.0\right)$)

(2) 放物線P_nを

$$y^2=4\cdot p_n(x-q_n) \text{ とおく.}$$

x軸方向に q_n 平行移動して P_n' を考える.

$$y^2=4p_nx.$$

この放物線に問題の操作を行うと. (1)より

$$y^2=4\cdot\frac{1}{2}p_n(x-p_n).$$

q_n 分もとにもどすと

$$P_{n+1}:\ y^2=4\cdot\frac{1}{2}p_n(x-p_n-q_n).$$

$$\therefore \begin{cases} p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n. \\ q_{n+1}=q_n+p_n. \end{cases}$$

ここで. $p_0=1$, $q_0=0$ より

$$p_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

また.

$$q_n-q_{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$+)\ q_1-q_0=\left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$q_n-q_0=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore q_n=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\therefore P_n:\ y^2=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(x-2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)$$

焦点 $(p_n+q_n,\ 0)$ は. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ より

$n\to\infty$ で $(2,\ 0)$ に近づく.

$\boxed{152}$ 3次曲線 C: $y=$ x^3+9x^2+9x+2 上に点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$ をとる。ただし，$x_0>0$ とする。さらに自然数 n に対して C 上の点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を「P_{n-1} を通る直線が点 $\mathrm{P}_n(\neq \mathrm{P}_{n-1})$ で C と接する」ように定める。このとき次の問いに答えよ。

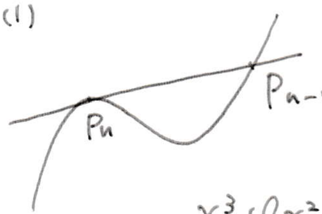
(1) $n>0$ のとき，関係式 $2x_n+x_{n-1}+9=0$ が成り立つことを示せ。

(2) x_n を x_0 で表せ。

(3) 点 P_n は n を大きくすると C 上の定点に近づくことを示し，その定点を求めよ。

(1992-2)

(1)



P_{n-1}を通り P_nと接する直線を $y=mx+n$ とおく.
これと Cの共有点のx座標は

$$x^3+9x^2+9x+2=mx+n$$
$$\Leftrightarrow\ x^3+9x^2+(9-m)x+(2-n)=0 \quad \cdots ①$$

また、直線は P_{n-1}で交わり P_nで Cと接するので

$$(x-x_n)^2\cdot(x-x_{n-1})=0$$ と書ける.

展開すると

$$x^3-(x_{n-1}+2x_n)x^2+(x_n^2-2x_nx_{n-1})x-x_n^2x_{n-1}=0 \quad \cdots ②$$

①と②の解は一致するので、係数も一致.

$$\therefore\ 9=-(x_{n-1}+2x_n)$$

i.e. $2x_n+x_{n-1}+9=0$ ∎

(2) (1)より $2x_n+x_{n-1}+9=0$.

$$2(x_n+3)+(x_{n-1}+3)=0.$$
$$x_n+3=-\frac{1}{2}(x_{n-1}+3).$$

数列 x_n+3 は 初項 : $-\frac{1}{2}(x_0+3)$
公比 : $-\frac{1}{2}$

$$\therefore\ x_n+3=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x_0+3).$$

よって $x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x_0+3)-3$ //

(3). 〈証明〉.

x_nがある点に収束することを言えばよい.

$\left|-\frac{1}{2}\right|<1$ より

$\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ (as $n\to\infty$).

$\therefore\ \lim_{x\to\infty} x_n=-3.$

収束するので、Cは$n\to\infty$で定点に近づく. ∎

定点のx座標は -3 より.

$$y=(-3)^3+9(-3)^2+9(-3)+2$$
$$=29.$$

$\therefore$ 定点は $(-3,29)$ //