17 Aさんは5円硬貨を3枚，Bさんは5円硬貨を1枚と10円硬貨を1枚持っている。2人は自分が持っている硬貨全てを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は，相手の裏が出た硬貨を全てもらう。なお，表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし，硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて，以下の問いに答えよ。

(1) AさんがBさんに勝つ確率 p，および引き分けとなる確率 q を求めよ。

(2) ゲーム終了時にAさんが持っている硬貨の合計金額の期待値を求めよ。

(2014-4)

表：お，裏：う として表を作成。

Aさん	Bさん 5円	Bさん 10円	勝者	確率	Aさん金額
おおお	お	お	なし	$(\frac{1}{2})^3\cdot(\frac{1}{2})^2$	15
	お	う	A	$(\frac{1}{2})^3\cdot(\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2})$	25
	う	お	A	$(\frac{1}{2})^3\cdot(\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2})$	20
	う	う	A	$(\frac{1}{2})^3\cdot(\frac{1}{2})^2$	30
1枚うら	お	お	B	${}_3C_1\times(\frac{1}{2})^3\times(\frac{1}{2})^2$	10
	お	う	A	$(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})$	25
	う	お	なし	$(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})$	15
	う	う	A	$(\frac{1}{2})^2$	30
2枚うら	お	お	B	${}_3C_1\times(\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^2$	5
	お	う	なし	$(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})$	15
	う	お	B	$(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})$	5
	う	う	A	$(\frac{1}{2})^3$	30
ううう	お	お	B	$(\frac{1}{2})^3\times(\frac{1}{2})^2$	0
	お	う	B	$(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})$	0
	う	お	B	$(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})$	0
	う	う	なし	$(\frac{1}{2})^2$	15

(1) 上の表より，

$$p=\left(\frac{1}{2}\right)^5\times3+\left\{{}_3C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}\times3$$

$$=\frac{12}{2^5}=\frac{3}{8}$$

$$q=\left(\frac{1}{2}\right)^5\times2+\left\{{}_3C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}\times2$$

$$=\frac{1}{4}$$

(2) 期待値は，

$$E=\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\{25+20+30+15\times2\}$$

$$+{}_3C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\{5\times2+15\times2+10+25+30\times2\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^5\times510$$

$$=\frac{255}{16}$$ //

少し大変だが，表を書きあげることで
途中の言葉の説明が省け，
数えまちがいも減る。

18 横一列に並んだ6枚の硬貨に対して，以下の操作Lと操作Rを考える。

L： サイコロを投げて，出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R： サイコロを投げて，出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

例えば，表表裏表裏表 と並んだ状態で操作Lを行うときに，3の目が出た場合は，裏裏表表裏表 となる。

以下，「最初の状態」とは硬貨が6枚とも表であることとする。

(1) 最初の状態から操作Lを2回続けて行うとき，表が1枚となる確率を求めよ。

(2) 最初の状態からL, Rの順で操作を行うとき，表の枚数の期待値を求めよ。

(3) 最初の状態からL, R, Lの順に操作を行うとき，全ての硬貨が表となる確率を求めよ。

(2013-3)

(1) 表が1マイとなるのは、

すべてうら返して1枚表にする …①

1枚うら返してその後すべて裏表入れかえる …②

の2パターン.

①は、サイコロは 6→1. の順

$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

②は、サイコロは 1→6 の順

$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

∴求める確率は $\frac{1}{36}\times 2=\frac{1}{18}$ //

(2)

2回目 R

表の枚数 (1回目 L)	1	2	3	4	5	6
1	4	3	2	1	0	1
2	3	2	1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
4	1	0	1	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5
6	1	2	3	4	5	6

上の表において、サイコロの目の出る確率は各々 $\frac{1}{6}$ なので

求める期待値は.

$$E=\frac{1}{36}\times\{0\times5+1\times10+2\times8+3\times6+4\times4+5\times2+6\times1\}$$

$$=\frac{1}{36}\times76$$

$$=\frac{19}{9}$$ //

(3) 3回目に左から硬貨をひっくり返して全ての硬貨が表になるには、

左から連続して表が続き、裏の硬貨があるならば、それより右側もすべて裏になっている必要がある。

左下の表において、以上の条件をみたすものは、数字の下に「_」を引いた10コのみである.

3回目のサイコロの目は、

(6−数字) の目が出ればすべて表になる.

2回目でそれぞれの状態になっている確率は

$\frac{1}{36}$ なので

求める確率は $\frac{1}{36}\times\frac{1}{6}\times10=\frac{5}{108}$ //

サイコロ問題はとりあえず表を書く!!

$\boxed{19}$ いくつかの玉が入った箱Aと箱Bがあるとき，次の試行Tを考える。

(試行T)　箱Aから2個の玉を取り出して箱Bに入れ，その後，箱Bから2個の玉を取り出して箱Aに入れる。

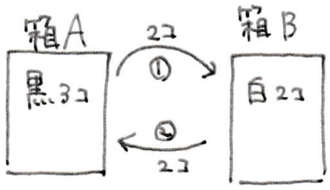
最初に箱Aに黒玉3個，箱Bに白玉2個入っているとき，以下の問いに答えよ。

(1) 試行Tを1回行ったときに，箱Aに黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

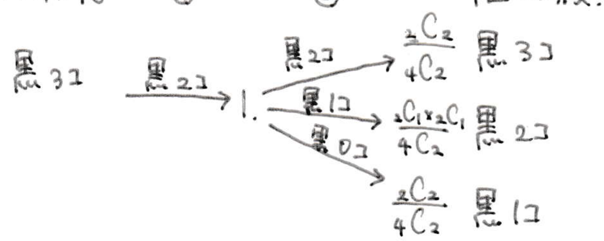
(2) 試行Tを2回行ったときに，箱Aに黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(3) 試行Tを3回行ったときに，箱Aの中が全て黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。

(2012-5)



(1)



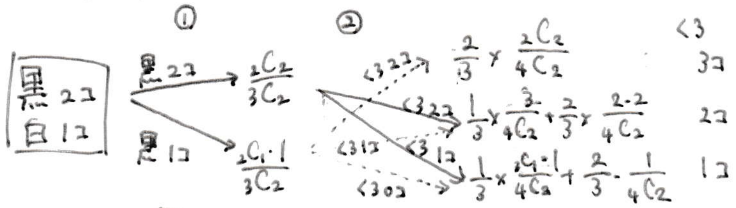
上の図より

$p_3=\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$

$p_2=\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$p_1=\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$　//

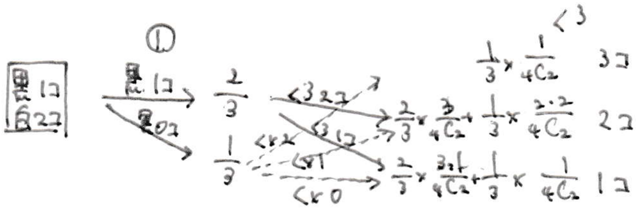
(2) まず，
黒2コ → 黒nコ
黒1コ → 黒nコ を求める.
それぞれの確率を r_n, s_n とおく.



$r_1=\frac{5}{18}$

$r_2=\frac{11}{18}$

$r_3=\frac{2}{18}$



$s_1=\frac{7}{18}$

$s_2=\frac{10}{18}$

$s_3=\frac{1}{18}$

以上から q_n を求める.

$q_3=p_3\times p_3+p_2\times r_3+p_1\times s_3$
$=\frac{12}{108}=\frac{1}{9}$

$q_2=p_3\times p_2+p_2\times r_2+p_1\times s_2$
$=\frac{66}{108}=\frac{11}{18}$

$q_1=p_3\times p_1+p_2\times r_1+p_1\times s_1$
$=\frac{30}{108}=\frac{5}{18}$　//

(3) Aがすべて黒になる確率は.

$P=q_3\times p_3+q_2\times r_3+q_1\times s_3$

$=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{6}+\frac{11}{18}\cdot\frac{2}{18}+\frac{5}{18}\cdot\frac{1}{18}$

$=\frac{6+22+5}{18^2}=\frac{33}{18^2}$

$=\frac{11}{108}$　//

遷移図を書くのが少し苦労するが….
1つ1つ丁寧に作っていくことで完答が近づく.

$\boxed{20}$ 1から4までの数字が1つずつ書かれた4枚のカードがある。その4枚のカードを横一列に並べ，以下の操作を考える。

操作： 1から4までの数字が1つずつ書かれた4個の玉が入っている袋から同時に2個の玉を取り出す。玉に書かれた数字がiとjならば，iとjならば，iのカードとjのカードを入れ替える。その後，2個の玉は袋に戻す。

初めにカードを左から順に1, 2, 3, 4と並べ，上の操作をn回繰り返した後のカードについて，以下の問いに答えよ。

(1) $n=2$のとき，カードが左から順に1, 2, 3, 4と並ぶ確率を求めよ。

(2) $n=2$のとき，カードが左から順に4, 3, 2, 1と並ぶ確率を求めよ。

(3) $n=2$のとき，左端のカードの数字が1になる~~か~~確率を求めよ。

(4) $n=3$のとき，左端のカードの数字の期待値を求めよ。

(2011-5)

4コの玉のうち2コを同時に取り出すのは、

$${}_4C_2 = 6 \text{（通り）}.$$

(1) 左から順に 1, 2, 3, 4と並ぶには、
1回目と2回目の取り出す玉の種類は
同一でなければならない.
1回目はどんな取り出し方でもよいが
2回目は1回目と同じなので確率は

$$1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6} \;/\!/$$

(2) 左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶには、
(1, 4)と(2, 3)という取り出し方を
する必要がある．この方法で取り出す確率は
それぞれ $\frac{1}{6}$ であり、(1, 4)と(2, 3)の
順番はどちらでもよいので
求める確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 2! = \frac{1}{18} \;/\!/$$

(3) 左端が1になるには、
(2〜4のうち2コ)を2回 もしくは
(1と他) (2組ずつ)を2回 のいずれかの方法である.

2〜4のうち2コ取り出すのは ${}_3C_2=3$ 通り.
1とその他の2コ取り出すのは ${}_3C_1=3$ 通り.
ゆえに、それぞれの確率は、
(2〜4のうち2コ)を2回 → $\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$
(1と他)を2回 → $\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$
それぞれの方法は互いに排反なので
求める確率は $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}$

$$=\frac{1}{3} \;/\!/$$

(3) 3回の操作の後に左端が1になるのは、
(i) 2回の後 左端に1がある場合
3回目は、1以外の2つを取り出すので

$$\frac{1}{3}\times\frac{{}_3C_2}{6}=\frac{1}{6}$$

(ii) 2回の後左端に1以外がある場合.
3回目に、左端の数と1を取り出すので

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$$

(i)(ii)より、左端が1になる確率は

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5}{18}$$

左端のカードが1以外である限りは
等しいので 2, 3, 4 である確率は各々

$$\left(1-\frac{5}{18}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{13}{54}$$

ゆえに、求める期待値は.

$$E = 1\times\frac{5}{18}+\{2+3+4\}\times\frac{13}{54}$$
$$=\frac{5}{18}+\frac{39}{18}$$
$$=\frac{22}{9} \;/\!/$$

21 次のような~~協議~~競技を考える。競技者がサイコロをふる。もし，出た目が気に入ればその目を~~特典~~得点とする。そうでなければ，もう一回サイコロを振って，2つの~~眼~~目の合計を得点とすることができる。ただし，合計が7以上になった場合は得点は0点とする。この取り決めによって，2回ふると~~特典~~得点が下がることもあることに注意しよう。次の問いに答えよ。

(1) 競技者が常にサイコロを2回ふるとすると，得点の期待値はいくらか？

(2) 競技者が最初の目が6のときだけ2回目をふらないとすると，得点の期待値はいくらか。

(3) 得点の期待値を最大にするには，競技者は最初の目がどの範囲にあるときに2回目をふるといいか。

(2010-2)

(1) サイコロを2回ふった時の点数表を作る.

1\2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0
2	3	4	5	6	0	0
3	4	5	6	0	0	0
4	5	6	0	0	0	0
5	6	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

各々の出方に対して確率は $\frac{1}{36}$ なので
求める期待値は

$$E = \frac{1}{36}\{2+3\times2+4\times3+5\times4+6\times5\}$$
$$= \frac{70}{36}$$
$$= \frac{35}{18} \quad //$$

(2) 同様に表を作成して期待値を求める.

1\2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0
2	3	4	5	6	0	0
3	4	5	6	0	0	0
4	5	6	0	0	0	0
5	6	0	0	0	0	0
6	6	6	6	6	6	6

求める期待値は.

$$E_6 = \frac{1}{36}\{2+3\times2+4\times3+5\times4+6\times11\}$$
$$= \frac{106}{36}$$
$$= \frac{53}{18} \quad //$$

(3) 最初の目がnのときに2回目をふらなかった時の期待値を E_n とおく.

$$E_6 = \frac{53}{18} \quad ((1)より).$$

最初の目がnの時に2回目をふらない時.
n以上の目では1回目の得点である.
このことをふまえて, $E_1 \sim E_5$ を求める.

$$E_1 = \frac{1}{36}\{1\times6+2\times6+3\times6+4\times6+5\times6+6\times6\}$$
$$= \frac{1}{36}\cdot6\cdot21$$
$$= \frac{7}{2}$$

$$E_2 = \frac{1}{36}\{2\times7+3\times7+4\times7+5\times7+6\times7\}$$
$$= \frac{1}{36}\cdot20\cdot7$$
$$= \frac{35}{9}$$

$$E_3 = \frac{1}{36}\{2\times1+3\times2+4\times8+5\times8+6\times8\}$$
$$= \frac{1}{36}\cdot146$$
$$= \frac{73}{18}$$

$$E_4 = \frac{1}{36}\{2\times1+3\times2+4\times9+5\times9+6\times9\}$$
$$= \frac{1}{36}\cdot179$$
$$= \frac{179}{36}$$

$$E_5 = \frac{1}{36}\{2\times1+3\times2+4\times3+5\times10+6\times10\}$$
$$= \frac{1}{36}\cdot130$$
$$= \frac{65}{18}$$

以上より. $E_4 > E_3 > E_2 > E_5 > E_1 > E_6$.

∴ 初回が4のとき2回目をふれば
期待値は最大. //

サイコロは表!!
(3)は地道に計算!!

22 kは2以上の自然数とする。「1」と書かれたカードが1枚，「2」と書かれたカードが2枚，$\cdots$，「k」と書かれたカードがk枚ある。そのうち偶数が書かれたカードの枚数をM，奇数が書かれたカードの枚数をNで表す。この$(M+N)$枚のカードをよくきって1枚を取り出し，そこに書かれた数を記録して戻すという操作をn回繰り返す。記録されたn個の数の和が偶数となる確率をp_nとする。次の問いに答えよ。

(1) p_1，p_2をM，Nで表せ。

(2) p_{n+1}をp_n，M，Nで表せ。

(3) $\dfrac{M-N}{M+N}$をkで表せ。

(4) p_nをn，kで表せ。

(2009-2)

(1) 1回引いて偶数である確率 P_1 は、
M枚の偶数のうち1枚引く．

$$\therefore\ P_1 = \frac{M}{M+N}$$

2回引いて偶数であるには、
偶数+偶数
奇数+奇数　のいずれか．

偶数+偶数 → $\dfrac{M}{M+N}\cdot\dfrac{M-1}{M+N}$

奇数+奇数 → $\dfrac{N}{M+N}\cdot\dfrac{N-1}{M+N}$

各々排反なので

$$P_2 = \frac{M(M-1)+N(N-1)}{(M+N)^2}$$

(2) n回目で和が偶数のとき n+1回目は偶数で、逆に奇数のときはn+1回目は奇数

$$\therefore\ P_{n+1} = \frac{M}{M+N}P_n + \frac{N}{M+N}(1-P_n)$$

$$= \frac{M-N}{M+N}P_n + \frac{N}{M+N}$$

(3) (i) k:偶数のとき．

$M = 2+4+\cdots+k$

$N = 1+3+\cdots+k-1$

$M-N = 1+1+\cdots+1$　$(\frac{k}{2}$コ$)$.

$= \dfrac{k}{2}$

$M+N = 1+2+\cdots+k-1+k$

$= \frac{1}{2}k(1+k)$.

$$\therefore\ \frac{M-N}{M+N} = \frac{1}{1+k}$$

(ii) k:奇数のとき．

$M = 2+4+\cdots+k-1$

$N = 1+3+\cdots+k-2+k$

$M-N = 1+\cdots+1-k$

$= \dfrac{k-1}{2} - k$

$= -\dfrac{k+1}{2}$

$M+N = \frac{1}{2}k(1+k)$

$$\therefore\ \frac{M-N}{M+N} = -\frac{1}{k}$$

(i)(ii)より

$$\frac{M-N}{M+N} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+k} & (k:\text{偶数}) \\ -\dfrac{1}{k} & (k:\text{奇数}) \end{cases}$$

(4) (2)より

$$P_{n+1} = \frac{M-N}{M+N}P_n + \frac{N}{M+N}$$

$$\left(P_{n+1}-\frac{1}{2}\right) = \frac{M-N}{M+N}\left(P_n-\frac{1}{2}\right).$$

数列$\{P_n-\frac{1}{2}\}$は．初項 $P_1-\frac{1}{2} = \dfrac{M}{M+N}-\dfrac{1}{2}$
公比 $\dfrac{M-N}{M+N}$ の等比数列．

$$P_n-\frac{1}{2} = \left(\frac{M}{M+N}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{2M-(M+N)}{2(M+N)}\cdot\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{M-N}{2(M+N)}\cdot\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n}$$

$$\therefore\ P_n = \frac{1}{2}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^n + \frac{1}{2}$$

(3)の結果を代入．

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+k}\right)^n + \dfrac{1}{2} & (k:\text{偶数}) \\ \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{k}\right)^n + \dfrac{1}{2} & (k:\text{奇数}). \end{cases}$$

(4) 文字がごちゃごちゃしているが、丁寧に二項間漸化式を解く。

23 1から10までの番号が1つずつ書かれた10枚のカードがある。kを2から9までの整数の1つとする。よくきった10枚のカードから1枚を抜き取り，そのカードの番号がkより大きいなら，抜き取ったカードの番号を得点とする。抜き取ったカードの番号がk以下なら，そのカードを戻さずに，残りの9枚のカードの中から1枚を抜き取り，2回目に抜き取ったカードの番号を得点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 得点が1である確率と10である確率をそれぞれ求めよ。

(2) 2以上9以下の整数nに対して，得点がnである確率を求めよ。

(3) 得点の期待値を求めよ。

(2008-2)

(1) 10枚のカードから1枚抜き取ったカードの番号：m_1，

$m_1 \leqq k$ で 残り9枚から1枚抜き取ったカードの番号：m_2

得点：X とおく。

$X=1$ になるには，$2 \leqq m_1 \leqq k$ かつ $m_2 = 1$.

$$P(X=1) = \frac{k-1}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{k-1}{90}$$

$X=10$ になるには，$m_1 = 10$ もしくは $m_1 \leqq k$ かつ $m_2 = 10$.

$$P(X=10) = \frac{1}{10} + \frac{k}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{k+9}{90}$$

(2) i) $2 \leqq n \leqq k$ のとき，$X=n$ になるには，$(m_1 \leqq k,\ m_1 \neq n)$ かつ $m_2 = n$.

$$P(X=n) = \frac{k-1}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{k-1}{90}$$

ii) $k+1 \leqq n \leqq 9$ のとき $X=n$ になるには，$(m_1 = n)$ もしくは $(m_1 \leqq k,\ m_2 = n)$.

$$P(X=n) = \frac{1}{10} + \frac{k}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{k+9}{90}$$

i) ii) より

$$P(X=n) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{90} & (2 \leqq n \leqq k) \\ \dfrac{k+9}{90} & (k+1 \leqq n \leqq 9) \end{cases}$$

(3) (1)(2)より，$1 \leqq n \leqq 10$ なる整数 n に対して，

$1 \leqq n \leqq k$ のとき $P(X=n) = \dfrac{k-1}{90}$.

$k+1 \leqq n \leqq 10$ のとき $P(X=n) = \dfrac{k+9}{90}$.

が成立。

よって，得点の期待値 $E(X)$ は，

$$E(X) = \sum_{n=1}^{10} n\cdot P(X=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{k} n\cdot\frac{k-1}{90} + \sum_{n=k+1}^{10} n\cdot\frac{k+9}{90}$$

$$= \frac{k-1}{90}\cdot\sum_{n=1}^{k} n + \frac{k+9}{90}\cdot\sum_{n=k+1}^{10} n$$

$$= \frac{k-1}{90}\cdot\frac{k(k+1)}{2} + \frac{k+9}{90}\cdot\frac{(10-k)\{10+(k+1)\}}{2}$$

$$= \frac{1}{180}\{k(k+1)(k-1) + (k+9)(10-k)(k+11)\}$$

$$= \frac{1}{18}(-k^2 + 10k + 99)$$

24 サイコロを３回続けて投げて出た目を順に a, b, c とする。これらの数 a, b, c に対して２次方程式

$(\star)$ $ax^2+bx+c=0$

を考える。ただし，サイコロはどの目も同様に確からしく出るものとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) ２次方程式 $(\star)$ が異なる２つの実数の解をもつとき，積 ac の取りうる値を求め，積 ac の各値ごとに可能な a, c の値の組 (a, c) がそれぞれ何通りあるかを求めよ。

(2) ２次方程式 $(\star)$ が異なる２つの有理数の解をもつ確率を求めよ。ただし，一般に自然数 n が自然数の２乗でなければ $\sqrt{n}$ は無理数であることを用いてよい。

(2007-4)

(1) 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が異なる2つの実数解をもつための必要十分条件は.

$b^2-4ac>0$

これをみたす ac は.

$b=1$ のとき、なし
$b=2$ のとき なし
$b=3$ のとき $ac=1, 2$
$b=4$ のとき $ac=1, 2, 3$
$b=5$ のとき $ac=1, 2, 3, 4, 5, 6$
$b=6$ のとき $ac=1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$

よって.

$ac=1$ のとき
$(a, c)=(1, 1)$ 1通り.
$ac=2$ のとき
$(a, c)=(1, 2), (2, 1)$ 2通り
$ac=3$ のとき
$(a, c)=(1, 3), (3, 1)$ 2通り
$ac=4$ のとき
$(a, c)=(1, 4), (2, 2), (4, 1)$ 3通り
$ac=5$ のとき
$(a, c)=(1, 5), (5, 1)$ 2通り
$ac=6$ のとき
$(a, c)=(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$ 4通り
$ac=8$ のとき
$(a, c)=(2, 4), (4, 2)$ 2通り.

//

(2) 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が異なる2つの有理数をもつための必要十分条件は、b^2-4ac が正の整数の平方となることである.

このようになるものを探す.

ac の値により. $b^2-4ac>0$ なるものを書き出す.

ac	b	b^2-4ac
1	3	5
	4	12
	5	21
	6	32
2	3	1
	4	8
	5	17
	6	28
3	4	4
	5	13
	6	24
4	5	9
	6	20
5	5	5
	6	16
6	5	1
	6	12
8	6	4

b^2-4ac が正の平方数となるのは.
上の数字に丸をつけたもののみ.
ac が各値になる (a, c) の組は (1) で求めた.
また、(a, b, c) の組は、6^3 通りあるので、
求める確率は

$$\frac{2+2+3+2+4+2}{6^3}=\frac{5}{72}$$ //

サイコロ程度ならすべて列挙する方が早いかな…？

25 n を3以上の自然数とする。スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に n 個並んでいる。これらの n 個の電球のスイッチを同時に入れたあと，左から電球の色を見ていき，色の変化の回数を調べる。

(1) 赤青 $\cdots$ 青，赤赤青 $\cdots$ 青，$\cdots\cdots$ のように左端が赤で色の変化がちょうど1回起きる確率を求めよ。

(2) 色の変化が少なくとも2回起きる確率を求めよ。

(3) 色の変化がちょうど m 回 $(0 \leqq m \leqq n-1)$ 起きる確率を求めよ。

(4) 色の変化の回数の期待値を求めよ。

(2004-5)

(1) 赤：○ 青：◎で表したとき、
左端が赤で色の変化がちょうど1回起きるのは

$\underbrace{\bigcirc \cdots \bigcirc}_{n-1コ} ◎ \cdots ◎$ となる時である。

左端の赤以外の $(n-1)$ 個のうち、
色の変化が起こる場所を1コ選ぶのは
$_{n-1}C_1$（通り）。
選んだ場所で色の変化（赤→青）が起きるので、
この地点より左は赤で、この地点以降は青
となる。
この確率は、

$$_{n-1}C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n-1}{2^n} \quad //$$

(2) 色の変化が1回も起きない場合の確率は、
電球が全て赤もしくは全て青のどちらかなので

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2 = \frac{1}{2^{n-1}}$$

色の変化がちょうど1回である確率は(1)より

$$\frac{n-1}{2^n} \times 2 = \frac{n-1}{2^{n-1}}$$

よって求める確率は、

$$\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{n-1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{n}{2^{n-1}} \quad //$$

☆少なくとも〜

$$\left(\begin{matrix}\text{少なくとも2回}\\\text{起きる確率}\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}\text{1回以上}\\\text{起きる確率}\end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix}\text{ちょうど1回}\\\text{起きる確率}\end{matrix}\right)$$

(3) 色の変化がちょうど m 回 $(0 \leqq m \leqq n-1)$ である
には、2コ目以降の $n-1$ 個のうち、色の変化が
起きる場所を m 個選ぶので
$_{n-1}C_m$ 通りあり、その確率は、

$$_{n-1}C_m \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m-1} = \frac{_{n-1}C_m}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{(n-1)!}{2^{n-1} \cdot m!\,(n-m-1)!} \quad //$$

(4) 求める期待値は、

$$\sum_{m=0}^{n-1} m \cdot \frac{_{n-1}C_m}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n-1} m \cdot \frac{(n-1)!}{\underbrace{m!}_{約分}\,(n-m-1)!}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m-1)!}$$

$_aC_b$ の形にできるように調整。

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(n-1) \cdot (n-2)!}{(m-1)!\,(n-2-(m-1))!}$$

$$= \frac{n-1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n-1} {}_{n-2}C_{m-1}$$

二項定理

$$= \frac{n-1}{2^{n-1}} \cdot 2^{n-2}$$

$$= \frac{n-1}{2} \quad //$$

☆二項定理。

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} {}_nC_m\, x^{n-m} \cdot y^m}$$

上の式変形は…

$$\sum_{m=1}^{n-1} {}_{n-2}C_{m-1} = \sum_{m=0}^{n-2} {}_{n-2}C_m$$

$$= \sum_{m=0}^{n-2} {}_{n-2}C_m \cdot 1^{n-2-m} \cdot 1^m$$

$$= (1+1)^{n-2} = 2^{n-2}$$

(4) 〈別解〉.

X：色の変化の回数.

$$X_i = \begin{cases} 0 & (\text{色の変化なし}) \\ 1 & (\quad〃\quad \text{あり}) \end{cases}$$

：左から i 番目 $(2 \leqq i \leqq n)$ の電球の色の変化を表す変数.

とすると,

$P(X_i = 0) = \frac{1}{2}$

$P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$

であり,

$X = X_1 + \cdots + X_n$ が成立.

また, $X_1 = 0$ である.

ゆえに, i 番目の電球の色が変化する回数の期待値を $E[X_i]$ とすると,

$$E[X_i] = \begin{cases} 0 & (i=1) \\ \frac{1}{2} & (2 \leqq i \leqq n). \end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] \\ &= E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n] \\ &= \frac{1}{2}(n-1) \quad // \end{aligned}$$

26 座標平面上に (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1) を頂点とする正方形がある。ボールはこの正方形の中の全ての点に同様に確からしく落ちて，$y \leqq x(a-x)$ の部分に落ちれば当たりとする。ただし，$0 < a \leqq 2$ とする。

(1) ボールを 1 回落とす。当たる確率を求めよ。

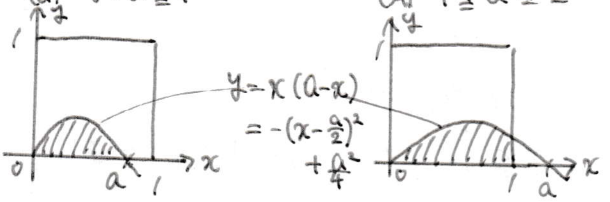
(2) 1 回目は $a = \frac{1}{2}$，2 回目は $a = \frac{3}{2}$ として，ボールを 2 回落とす。1 回だけ当たる確率を求めよ。

(3) a の値を変えずにボールを 3 回落とす。少なくとも 1 回は当たる確率が $\frac{19}{27}$ 以上であり，当たりの数の期待値が $\frac{3}{2}$ 以下になるような a の値の範囲を求めよ。

(2003-4)

(1)

(a) $0<a\leqq 1$　　(b) $1\leqq a\leqq 2$



正方形の面積は1であるので，
ボールを1回落としたときの当たる確率は
上の図における斜線部の面積に等しい．

(a) $0<a\leqq 1$ のとき

$$\int_0^a x(a-x)\,dx = \frac{a^3}{6}.$$

(b) $1\leqq a\leqq 2$ のとき

$$\int_0^1 x(a-x)\,dx = \left[\frac{a}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$= \frac{a}{2}-\frac{1}{3}$$

(a), (b)より ボールを1回落として当たる確率は

$$\begin{cases} \frac{a^3}{6} & (0<a\leqq 1) \\ \frac{1}{2}a-\frac{1}{3} & (1\leqq a\leqq 2) \end{cases}$$

(2) (1)より，
1回目に当たる確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{48}$$

2回目に当たる確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

よって，1回目だけ当たる確率は

$$\frac{1}{48}\times\left(1-\frac{5}{12}\right) = \frac{1}{48}\cdot\frac{7}{12}$$
$$= \frac{7}{576}$$

2回目だけ当たる確率は

$$\left(1-\frac{1}{48}\right)\times\frac{5}{12} = \frac{47}{48}\times\frac{5}{12}$$
$$= \frac{235}{576}$$

したがって，1回だけ当たる確率は

$$\frac{7}{576}+\frac{235}{576} = \frac{242}{576}$$
$$= \frac{121}{288}$$ //

この問題を見たら，
モンテカルロ法を思いうかべました．
興味のある方 調べてみて下さい．

(3) ボールを1回落として当たる確率を p とする．
3回落として1回も当たらない確率は $(1-p)^3$ より．
3回落として少なくとも1回は当たる確率は
$1-(1-p)^3$ である．

条件から．

$$1-(1-p)^3 \geqq \frac{19}{27}$$

$$\frac{8}{27} \geqq (1-p)^3$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \geqq (1-p)^3$$

$1-p$：実数より．

$$\frac{2}{3} \geqq 1-p$$

$$p \geqq \frac{1}{3} \quad \cdots ①$$

また、ボール1回落として当たる確率．p で
3回ボールを落とすとき、当たりの数の
期待値は $3p$．
条件から．

$$3p \leqq \frac{3}{2}$$

$$p \leqq \frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

①②より

$$\frac{1}{3} \leqq p \leqq \frac{1}{2} \quad \cdots (※)$$

この条件をみたす a の範囲を求める．

(a) $0 < a \leqq 1$ のとき．
a^3 が単調増加より
$0 < \frac{a^3}{6} \leqq \frac{1}{6}$ より $0 < p \leqq \frac{1}{6}$ であり．
(※)はみたさない。

(b) $1 \leqq a \leqq 2$ のとき．
(※)より

$$\frac{1}{3} \leqq \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \leqq \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{3} \leqq a \leqq \frac{5}{3}$$

これは $1 \leqq a \leqq 2$ もみたす。

(a) (b)より 求める a の範囲は

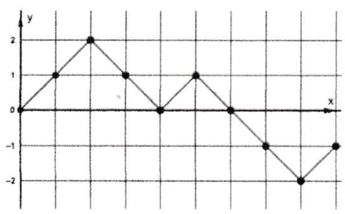
$$\frac{4}{3} \leqq a \leqq \frac{5}{3} \quad //．$$

27 平面上の点の x 座標と y 座標がどちらも整数であるとき，その点を格子点という。与えられた格子点を第１番目とし，この点から右斜め 45°，または右斜め −45° の方向にもっとも近い第２番目の格子点をとり，この２点を線分で結ぶ。同様にして第２番目の格子点から第３番目の格子点をとり，第２番目と第３番目を線分で結ぶ。以下これを有限回繰り返し，こうしてできる線分をつないだものを折れ線グラフと呼ぶことにする。下図に原点 O と格子点 $(9,\ -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例を示す。以下の問いに答えよ。

(1) n は正の整数，k は $0 \leqq k \leqq n$ なる整数とする。原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するための必要十分条件は $n+k$ が偶数であることを示せ。また，この必要十分条件が満たされているとき，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数を求めよ。

(2) n は２以上の整数，k は $0 \leqq k \leqq n-2$ なる整数で，$n+k$ は偶数とする。原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0,\ k)$, $(1,\ k), \cdots$, $(n-2,\ k)$ の少なくとも１つを通る折れ線グラフの数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの２倍に等しいことを示せ。

(3) コインを９回投げる。１回から i 回までの試行において，表の出た回数から裏の出た回数を引いた数を T_i で表す。このとき各格子点 $(i,\ T_i)$, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ 9$ を順番に線分で繋げば折れ線グラフが得られる。ただし，$T_0=0$ とする。$T_9=3$ が起きたとき，どの $T_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$ も３にならない条件付確率を求めよ。



(2002-4)

(1) n回のうち、右斜め45°がx回、右斜め$-45°$がy回とすれば

$x+y=n$, $x-y=k$.

$\therefore\ 2x=n+k$

x:整数より $n+k$:偶数 //

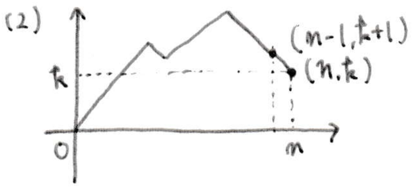
このとき、$x=\dfrac{n+k}{2}$

よって、原点Oと格子点(n,k)を結ぶ折れ線グラフの数は

$${}_nC_x={}_nC_{\frac{n+k}{2}}=\frac{n!}{\left(\frac{n+k}{2}\right)!\left(n-\frac{n+k}{2}\right)!}$$

$$=\frac{n!}{\left(\frac{n+k}{2}\right)!\left(\frac{n-k}{2}\right)!}$$ //

(2)



原点を出発して$(n-1,k+1)$を通り(n,k)に結ばれる折れ線グラフは、$x<n$の範囲で$y=k$と少なくとも1回は交わる。この折れ線グラフをLとする。

ここで、原点を出発し、(n,k)に結ばれる折れ線グラフは、必ず$(n-1,k+1)$もしくは$(n-1,k-1)$を通る。

グラフLにおいて、最初に$y=k$と交わった点から(n,k)に結ばれるまでのグラフを$y=k$で折り返してできるグラフをMとする。

このグラフMは、原点を出発して、$y=k$と少なくとも1回交点をもち、$(n-1,k-1)$を通って(n,k)に結ばれる。

対称性から、(グラフLの数)＝(グラフMの数)。

また、グラフLとグラフMの総和が題意をみたすグラフのすべてであり、重複はない。

ゆえに、

(求めるグラフの数)＝(グラフLの数)＋(グラフMの数)

＝2×(グラフLの数) //

(3) 原点から (9, 3) に結ばれるグラフの数は

(1) より、 $_9C_{\frac{9+3}{2}} = {}_9C_6$

このうち、$y=3$ と交点をもつグラフの数は、

(2) より、原点から (8, 4) に結ばれるグラフの数の 2倍。

$$2 \times {}_8C_{\frac{8+4}{2}} = 2 \times {}_8C_6.$$

よって、$y=3$ と交点をもたないグラフの数は

$$_9C_6 - 2 \cdot {}_8C_6.$$

ゆえに、求める確率は、

$$\frac{_9C_6 - 2 \cdot {}_8C_6}{_9C_6} = \frac{9 - 2 \cdot 3}{9}$$

$$= \frac{1}{3} \quad //$$

大学のグラフ理論に少し近い話。
高校で使うグラフ ~~~~ とちがう意味で
使われるので少しとまどうかもしれないが、
問題文に沿って丁寧に解けばよい。

28 サイコロを n 回振って，出た目の小さい方から順に並べ，第 i 番目を X_i $(i=1,\ \cdots,\ n)$ とする。

(1) $n=7$ のとき，3 の目が 3 回，5 の目が 2 回出たとする。このとき X_4 のとりうる値を全て求めよ。

(2) 一般の n に対して，$X_1=2$ となる確率 $P(X_1=2)$ を求めよ。

(3) 一般の n に対して，X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(E(X_1)-1)$ を求めよ。ここで log は自然対数を表す。

(5) 一般の n に対して，期待値 $E(X_1+X_n)$ を求めよ。

(2001-4)

(1) $n=7$ のとき、サイコロの出た目は、未確定の目 x_1, x_2 とし、

$\{3, 3, 3, 5, 5, x_1, x_2\}$ $\quad (x_1 \leqq x_2)$

$x_1 \leqq 3$ のとき $\quad X_4=3$

$x_1=4$ のとき $\quad X_4=4$

$x_1 \geqq 5$ のとき $\quad X_4=5$ ゆえに

X_4 のとりうる値は $3, 4, 5$ //

(2)

$P(X_1=2)=$ (2以上が出る確率) $-$ (3以上が出る確率)

$=\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n$ //

(3) (2) と同様にして、$P(X_1=1), \cdots P(X_1=6)$ を求める.

$P(X_1=1)=$ (1以上が出る確率) $-$ (2以上が出る確率)

$=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

$P(X_1=2)=\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n$

$P(X_1=3)=\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n$

$P(X_1=4)=\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n$

$P(X_1=5)=\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n$

$P(X_1=6)=\left(\frac{1}{6}\right)^n$

よって求める期待値は.

$$E[X_1]=1\cdot\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)+2\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n\right)+3\left(\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n\right)$$
$$+4\left(\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n\right)+5\left(\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)+6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n$$
$$=1+\left(\frac{1}{6}\right)^n+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^n \quad //$$

(4)

$$E[X_1]-1=\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{6}\right)^n+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n<\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{6}\right)^n+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^n<5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

辺々対数をとると

$$\log\left(\frac{5}{6}\right)^n<\log(E[X_1]-1)<\log 5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$\frac{1}{n}$ 倍する.

$$\log\left(\frac{5}{6}\right)<\frac{1}{n}\log(E[X_1]-1)<\frac{1}{n}\log 5+\log\frac{5}{6}$$

$n\to\infty$ とすると.

$$\log\frac{5}{6}<\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(E[X_1]-1)<\log\frac{5}{6}$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(E[X_1]-1)=\log\frac{5}{6} \quad //$$

(5) (3) と同様にして $E[X_n]$ を求める.

$P(X_n=6)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

$P(X_n=5)=\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n$

$\vdots$

$P(X_n=1)=\left(\frac{1}{6}\right)^n$

よって求める期待値は.

$$E[X_n]=6\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)+5\cdot\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n\right)+\cdots+1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n$$
$$=6-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n-\cdots-\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

よって, (3) も利用して,

$$E[X_1+X_n]=E[X_1]+E[X_n]$$
$$=1+\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{6}\right)^n+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^n$$
$$+6-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n-\cdots-\left(\frac{1}{6}\right)^n$$
$$=1+6=7 \quad //$$

最後 n 乗の項がすべて打ち消し合ったところ美しいですわ!!

29 袋の中に最初に赤玉２個と青玉１個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

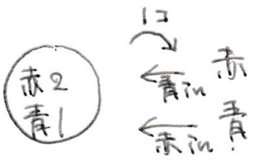
(操作)〜袋から１個の玉を取り出し，それが赤玉なら代わりに青玉１個を袋に入れ，青玉なら代わりに赤玉１個を袋に入れる。袋に入っている３個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を１枚もらう。

(1)　２回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。

(2)　奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。

(3)　８回目の操作で初めて硬貨をもらう確率を求めよ。

(4)　８回目の操作でもらう硬貨の総数がちょうど１枚である確率を求めよ。

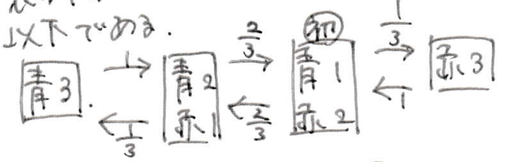


(2015-4)

(1) 2回目の操作で硬貨をもらうためには、
赤2コ、青1コの状態から青3コの状態にしなければならない。
その為には、1回目、2回目ともに赤の玉をひいて青の玉を入れる必要がある。
この確率は、

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$ //

(2) 〈証明〉
袋の中の玉の種類として考えられるものは以下である。



矢印上の数字は、状況の移動における確率である。
初期状態(青1,赤2)から青3にうつるには、上の図を見ると偶数回でなければならない。
実際、奇数回でうつることができるのは、(赤3)もしくは(青1,赤2)のいずれか。

(3) 初期状態 ⇄ 赤3 の往復：a_1.
初期状態 ⇄ 青2赤1 の往復：a_2
初期 → 青2赤1 → 青3への移動：a_3
とすると。
8回目の操作で初めて硬貨をもらうには、

(i) (a_1, a_1, a_1)
(ii) (a_1, a_1, a_2)　→ a_3.
(iii) (a_1, a_2, a_2)
(iv) (a_2, a_2, a_2)　(( )内は順不同).

の4パターン。

$P(a_1)=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$

$P(a_2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

$P(a_3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

∴ (i): $(P(a_1))^3\times P(a_3)=\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{9}$

(ii): $(P(a_1))^2\times(P(a_2))\times{}_3C_2\times P(a_3)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot 3$

(iii): $P(a_1)\times(P(a_2))^2\times{}_3C_1\times P(a_3)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{4}{9}\right)^2\cdot 3\cdot\frac{2}{9}$

(iv): $(P(a_2))^3\times P(a_3)=\left(\frac{4}{9}\right)^3\times\frac{2}{9}$.

∴求める確率Pは

$P=\frac{2}{9}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{4}{3}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^3\right\}$

$=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9^3}\cdot(3^3+3^2\cdot 4+9\cdot 4^2+4^3)$

$=\frac{2\cdot 7^3}{9^4}$ //

(4) 8回でちょうど1枚の硬貨のみもらうには、

(i) 8回目だけ青3　(3)より $2\cdot 7^3/9^4$

(ii) 6回目だけ青3.
$(P(a_1)^2+P(a_1)P(a_2)\cdot 2+P(a_2)^2)\cdot P(a_3)\cdot 1\cdot\frac{2}{3}$
$=7^2\cdot 2^2/9^3\cdot 3$.

(iii) 4回目だけ青3.
$(P(a_1)+P(a_2))\cdot P(a_3)\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot(P(a_1)+P(a_2))$
$=7^2\cdot 2^2/9^3\cdot 3$.

(iv) 2回目だけ青3.
$P(a_3)\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot(P(a_1)+P(a_2))^2=7^2\cdot 2^2/9^3\cdot 3$

(i)〜(iv)より

$P=\frac{2\cdot 7^3}{9^4}+3\cdot\frac{7^2\cdot 2^2}{9^3\cdot 3}$

$=\frac{2\cdot 7^3+7^2\cdot 2^2\cdot 9}{9^4}=\frac{2\cdot 5^2\cdot 7^2}{9^4}$ //

$\boxed{30}$ 座標平面上で円 $x^2+y^2=1$ に内接する正六角形で，点 $P_0(1,\ 0)$ を一つの頂点とするものを考える。この正六角形の頂点を P_0 から反時計回りに順に P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 とする。ある頂点に置かれている1枚のコインに対し，1つのサイコロを投げ，出た目に応じてコインを次の規則に従って頂点上を動かす。

(規則) (i) 1から5までの目が出た場合は，出た目の数だけコインを反時計回りに動かす。たとえば，コインが P_4 にあるときに4の~~芽~~目が出た場合は P_2 まで動かす。

(ii) 6の目が出た場合は，x 軸に対称な位置にコインを動かす。ただし，コインが x 軸上にあるときには動かさない。たとえばコインが P_5 にあるときに6の目が出た場合は P_1 に動かす。

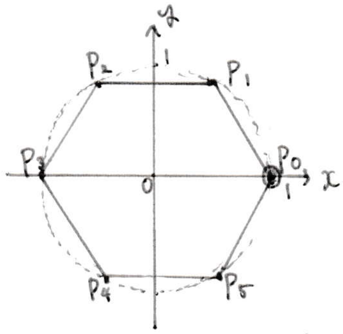
はじめにコインを1枚だけ P_0 におき，1つのサイコロを投げて何回か投げて，1回投げるごとに上の規則に従ってコインを動かしていくゲームを考える。以下の問いに答えよ。

(1) 2回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。

(2) 3回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。

(3) n を自然数とする。n 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。

(2016-3)



目：1～5 → 反時計に出た目

6 → x軸に対称に.

n回目にコインがP_0にある確率をq_nとおく.

(1) 2回サイコロを投げてP_0にいる為には、

1回目　2回目

$P_0 \xrightarrow{6の目} P_0 \xrightarrow{6} P_0 \cdots \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

$P_0 \xrightarrow{1\sim5の目} P_0以外 \xrightarrow[6になる目]{和が} P_0 \cdots \frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$

$P_0 \to P_0$以外 $\to P_0$については、

P_m $(m\neq0)$ で $m+l=6$ である l が

2回目のサイコロで出れば P_0の位置にコインがくる.

このような目は 1～5の目に対し、5～1の目が1つずつ対応する.

ゆえに求める確率は、

$q_2=\frac{1}{36}+\frac{5}{36}=\frac{1}{6}$ //

(2) 3回サイコロを投げてP_0にあるには.

2回目　3回目

$P_0 \to P_0 \cdots q_2\times\frac{1}{6}$

P_0以外 $\to P_0$　$1-q_2\times\frac{1}{6}$

求める確率は

$q_3=q_2\times\frac{1}{6}+(1-q_2)\times\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{6}$. //

(3) n回サイコロを投げた後に P_0にあるには、

$n-1$回目　n回目

$P_0 \to P_0$

P_0以外 $\to P_0$

求める確率は、

$q_n=q_{n-1}\cdot\frac{1}{6}+(1-q_{n-1})\cdot\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{6}$ //

結論に少し驚くものの.
よくよく考えてみたら、あたりまえ…?

31 赤玉２個，青玉１個，白玉１個が入った袋が置かれた円形のテーブルのまわりに A, B, C の３人がこの順番で時計回りに着席している。３人のうち，ひとりが袋から玉を１個取り出し，色を確認したら袋に戻す操作を考える。１回目は A が玉を取り出し，次のルール (a), (b), (c) に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す。

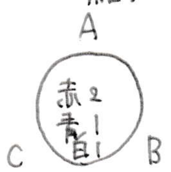
(a) 赤玉を取り出したら，取り出した人を勝者とする。
(b) 青玉を取り出したら，次の回も同じ人が玉を取り出す。
(c) 白玉を取り出したら，取り出した人の左隣の人が次の回に玉を取り出す。

A, B, C の３人が n 回目に取り出す確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n $(n = 1, 2, \cdots)$ とする。ただし，$a_1 = 1$, $b_1 = c_1 = 0$ である。以下の問いに答えよ。

(1) A が４回目に玉を取り出す確率と７回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ。
(2) $d_n = a_n + b_n + c_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおくとき，d_n を求めよ。
(3) 自然数 $n \geqq 3$ に対し，a_{n+1} を a_{n-2} と n を用いて表せ。

(2017-4)

初回.



赤：勝ち.
青：次も玉とる
白：左隣の人が玉.

$P(\text{赤をとる}) = \frac{2}{4}$
$P(\text{青をとる}) = \frac{1}{4}$
$P(\text{白をとる}) = \frac{1}{4}$.

(1) Aが4回目に玉をとり出すには、
1〜3回目にAが青玉をとる ---ア)
もしくは
A,B,C全員が白をとる. ---イ)
のいずれか.
ア)の場合：$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4^3}$
イ)の場合：$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4^3}$
∴ Aが4回目に玉をとり出すかくりつは
$\frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^3} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ //

Aが7回目に勝つには、7回目にAが赤をひく.
この為には、
ア) 6回目までに2周する
イ) 〃 1周する
ウ) 〃 0周する
ア)のとき. --- 白6.
イ)のとき --- 白3 青3
ウ)のとき --- 青6
で7回目にAが赤をひく.
この確率は.
ア)：$\left(\frac{1}{4}\right)^6 \times \frac{1}{2}$
イ)：$\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot {}_6C_3 \cdot \frac{1}{2}$
ウ)：$\left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \frac{1}{2}$
よって求める確率は
$\left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \frac{1}{2}(1+20+1) = \frac{11}{2^{12}}$ //

(2) Aがn+1回目に玉を引くには、
Aがn回目に玉をひいて青
もしくは
Cがn回目に玉をひいて白. のいずれか.
B,Cでも同様に考えて、

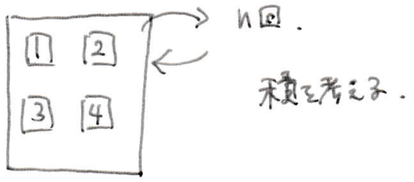
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}c_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}a_n & \cdots ② \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n + \frac{1}{4}b_n . & \cdots ③ \end{cases}$$

$d_n = a_n + b_n + c_n$ とおくと ①+②+③より
$d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n$.
$\therefore d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot d_1$
$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot (a_1 + b_1 + c_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ // ---④

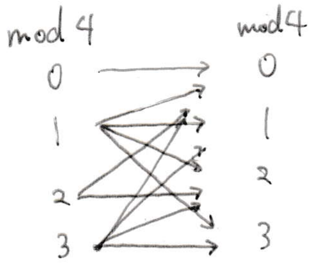
(3) ③④から.
$c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n + \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - c_n - a_n\right\}$.
$= -\frac{1}{4}a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ---⑤
①⑤から.
$4a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
$a_{n+2} = \frac{1}{4}a_{n+1} - \frac{1}{16}a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$
$n \geqq 3$に対し、
$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n - \frac{1}{16}a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$
$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}a_{n-1} - \frac{1}{16}a_{n-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - \frac{1}{16}a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$
$= -\frac{1}{64}a_{n-2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$
$= -\frac{1}{64}a_{n-2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$ //

(2)の結論を使って、まず a_n のみの式にもっていく。
そこから式変形等で a_{n+1} を a_{n-2} と n の式にする!!

32 1から4までの数字を1つずつ書いた4枚のカードが箱に入っている。箱の中から1枚のカードを取り出して元に戻す試行を n 回続けて行う。k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし，積 $X_1X_2\cdots X_n$ を4で割った余りが0, 1, 2, 3である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とする。p_n，q_n，r_n，s_n を求めよ。(2018-3)



1回目の事象で余りが0,1,2,3になるかくりつは各々,
$p_1=\frac{1}{4}$, $q_1=\frac{1}{4}$, $r_1=\frac{1}{4}$, $s_1=\frac{1}{4}$.



$n-1$ 回目で $0 \pmod 4$ のときは、n 回目でも必ず $0 \pmod 4$ になる。

$n-1$ 回目で $1 \pmod 4$ のとき、n 回目では、1,2,3,4 の出たカードに応じて $1,2,3,0 \pmod 4$ となる。

$n-1$ 回目で $2 \pmod 4$ のとき、n 回目では、
1,3のカードなら $2 \pmod 4$ になり、
2,4のカードなら $0 \pmod 4$ になる。

$n-1$ 回目で $3 \pmod 4$ のとき、n 回目では、1,2,3,4の出たカードに応じて $3,2,1,0 \pmod 4$ となる。

ゆえに、p_n, q_n, r_n, s_n を p_{n-1}, q_{n-1}, r_{n-1}, s_{n-1} を用いて表すと、

$$\begin{cases} p_n = p_{n-1} + \frac{1}{4}q_{n-1} + \frac{1}{2}r_{n-1} + \frac{1}{4}s_{n-1}. \\ q_n = \frac{1}{4}q_{n-1} + \frac{1}{4}s_{n-1} \\ r_n = \frac{1}{4}q_{n-1} + \frac{1}{2}r_{n-1} + \frac{1}{4}s_{n-1}. \\ s_n = \frac{1}{4}q_{n-1} + \frac{1}{4}s_{n-1}. \end{cases}$$

以上の式より $q_n = s_n$ であり、これを適用すると

$$\begin{cases} p_n = p_{n-1} + \frac{1}{2}q_{n-1} + \frac{1}{2}r_{n-1} \\ q_n = \frac{1}{2}q_{n-1} \\ r_n = \frac{1}{2}q_{n-1} + \frac{1}{2}r_{n-1} \\ s_n = \frac{1}{2}s_{n-1}. \end{cases}$$

$q_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot q_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$s_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$\therefore\ r_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}r_{n-1}$

$2^n\cdot r_n = \frac{1}{2} + 2^{n-1}r_{n-1}.$

数列 $2^n r_n$ は初項 $2\cdot\frac{1}{4}$ 公差 $\frac{1}{2}$

$\therefore\ 2^n\cdot r_n = \frac{1}{2} + (n-1)\frac{1}{2}$

よって $r_n = \frac{1}{2}n\cdot\left(\frac{1}{2^n}\right)$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot n$

$p_n = 1 - q_n - r_n - s_n$ なので

$p_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot n$

$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(n+2).$

よって、結果をまとめると、

$$\begin{cases} p_n = 1-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ q_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ r_n = n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ s_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{cases}$$

//

漸化式の作成→解く の一連の作業.
実際に図を書いて、0,1,2,3 (mod 4) の移りかわりをはあくすることが大切.
$q_n = s_n$ を気づけるかもpoint!!

33 A, B の２名で次のゲームを行う。A, B はそれぞれ表に 1 から n までの数字がひとつづつ書かれた n 枚のカードを持っている (裏には何も書かれていない)。A は自分のすべてのカードを表を下にして並べる。B は，A が並べたそれぞれのカードの前に自分のカードを表を上にして１枚ずつ並べる。次に A のカードを表向きにし，B は数字が一致したカードの枚数だけ得点を得る。確率変数 X を B が１回のゲームで得る点数とするとき次の問いに答えよ。

(1) $n=5$ のとき確率 $P(X=2)$ を求めよ。

(2) B のカードのうち数字が１のものが一致する確率を p とする。

$$p=\sum_{k=1}^{n} a_k P(X=k)$$

と表すとき，$a_k (k=1,\ 2,\ \cdots, n)$ を求めよ。

(3) 期待値 $E(X)$ を求めよ。

(1999-6)

A：1〜nまで書かれたカード うらにして並べる.
B：1〜nまで書かれたカード おもてにして並べる.
数字が一致した分だけ point を get.
X：Bが1回のゲームで得る点数.

(1) $n=5$ のとき $P(X=2)$.
5枚のカードの並べ方は 5! 通り.
2枚一致するとき、その2枚の選び方は ${}_5C_2$ 通り.
残り3枚の並べ方は、

$$\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & a & b & c \\ | & | & | & | & | & | \\ b & c & a & c & a & b \end{array}$$

の2パターン
よって、求めるかくりつは、

$$P(X=2)=\frac{{}_5C_2\cdot 2}{5!}=\frac{1}{6}\ //$$

(2) $a_k P(X=k)$ は、1を含む k 枚のカードが一致するかくりつであり、その確率の1から k までの和をとると、数字1のものが一致する確率 p となる。
このことより、a_k は、k 枚の数字が一致する条件下で、その k 枚のうち1枚が1であるという条件付確率である。
k 枚のカードの選び方は ${}_nC_k$.
1以外のカードの選び方は ${}_{n-1}C_{k-1}$

よって $a_k=\dfrac{{}_{n-1}C_{k-1}}{{}_nC_k}=\dfrac{k}{n}\ //$

(3) $E[X]=\sum_{k=1}^{n} k\cdot P(X=k)$ である.
ここで $k=n\cdot a_k$ である ((2)より).
ゆえに
$E[X]=\sum_{k=1}^{n} n\cdot a_k\cdot P(X=k)$.

$=n\cdot p$.
ここで、数字1が一致するかくりつは
$p=\frac{1}{n}$.

ゆえに
$E[X]=n\cdot\frac{1}{n}=1\ //$

(2) は実験あるのみ.
(3) は (2) をうまく使う!

34 下の図のように円周を 12 等分する点 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L が与えられている。
これらの中から相異なる 3 点を選んで線分で結ぶと三角形が得られる。例えば，A, D, I を選べば，図のような三角形が得られる。
このとき，次の問いに答えよ。

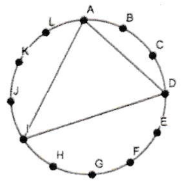
(1) 正三角形を与えるような 3 点の選び方の総和を求めよ。

(2) 二等辺三角形を与えるような 3 点の選び方の総和を求めよ。

(3) 直角三角形を与えるような 3 点の選び方の総和を求めよ。

(4) 3 点を選んで得られる三角形のうち，互いに合同でないものは全部でいくつあるか。

(1998-2)



(1) 正三角形を作るには、
△AEI、△BFJ、△CGK、△DHL
の4種類である。
∴ 4通り。//

(2) 正三角形でない二等辺三角形は、
頂点1つにつき底辺の選び方が4つある。
実際、頂点Aに対し、辺HF, DJ, CK, BL
を選ぶと正三角形でない二等辺三角形が
できる。
これをすべての点で考えて、
$4 \times 12 = 48$ 通り。
これに正三角形の個数を加えて、二等辺三角形は
$48 + 4 = 52$ 通り //

(3) 円において、半径は直角三角形の斜辺である。
斜辺1つにつき、直角三角形を作る点は、10コとれる。
また、斜辺は6通りとれるので、求める直角三角形
の総和は、$6 \times 10 = 60$ 通り //

(4) 点Aを頂点にもつ三角形を考える。
点Aとある点を結んでできる線分を最大辺とする
三角形を考えて互いに合同でない三角形を見つける。

最大辺	残りの点のとり方
AG	B, C, D
AF	B, C, J, K
AE	B, C, I
AD	B
AC	B

以上より、互いに合同でない三角形は
12通り //

35 n 個の袋があり，それぞれの袋には金色のカード 3 枚と銀色のカード $(3n-3)$ 枚入っている。それぞれの袋から 1 枚ずつカードを抜き出すとき，確率変数 X_n を抜き出された金色のカードの枚数とおく。

(1) X_4 が値 3 をとる確率 $P(X_4=3)$，および，値 2 をとる確率 $P(X_4=2)$ を求めよ。

(2) 金色のカードを 1 枚抜き出すごとに賞金 100 円を受け取る。$n=4$ のときに受け取る賞金の期待値を求めよ。

(3) 一般の n $(n \geqq 3)$ について，X_n が値 3 を取る確率 $P(X_n=3)$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P(X_n=3)$ を求めよ。

(1997-8)

1枚　n袋

金 3
銀 3n-3
……

(1) $X_4=3$：4コの袋のうち、3コの袋から金を引く。
1つの袋から金を引くかくりつは、12枚のうち3枚のいずれかを引くので $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.
4個のうち金を引く袋を選ぶと ${}_4C_3$ 通り.

$$\therefore P(X_4=3) = {}_4C_3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4^3}$$

$X_4=2$ のとき、同様に

$$P(X_4=2) = {}_4C_2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3^3\cdot 2}{4^4}$$

(2) (1)と同様に

$$P(X_4=0) = \left(1-\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{3^4}{4^4}$$
$$P(X_4=1) = {}_4C_1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3}$$
$$P(X_4=4) = \left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$\therefore E[X_4] = \sum_{n=0}^{4} 100\cdot n\cdot P(X_4=n)$$
$$= 100\times\left(1\cdot\frac{3^3}{4^3} + 2\cdot\frac{2\cdot 3^3}{4^4} + 3\cdot\frac{3}{4^3} + 4\cdot\frac{1}{4^4}\right)$$
$$= \frac{100}{4^3}\cdot(3^3+3^3+3^2+1)$$
$$= \frac{100}{4^3}\cdot 64 = 100 \quad //$$

(3) 1個の袋から金のカードを引くのは、3n枚のうち3枚の金のカードいずれかを引くので $\frac{3}{3n}=\frac{1}{n}$.
また、nコの袋のうち、3コ金を引く袋が選ぶので、その総和は ${}_nC_3$ 通り.
よって求める確率は

$$P(X_n=3) = {}_nC_3\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-3}$$
$$= \frac{n\cdot(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)^{n-3}}{n^{n-3}}$$
$$= \frac{(n-1)^{n-2}\cdot(n-2)}{6n^{n-1}} \quad //$$

(4)
$$P(X_n=3) = \frac{(n-1)^{n-2}(n-2)}{6n^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-2}\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{\frac{n}{n-1}}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} P(X_n=3) = \frac{1}{6e} \quad //$$

使った定義.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

(4)の式変形で上の定義のnをn−1にしたものを使うことに気づくのがpoint!!

36 1から9までの数字が1つずつ書いてあるカードが，それぞれ1枚ずつ，合計9枚ある。これらを3枚ずつの3つのグループに無作為に分け，それぞれのグループからもっとも小さい数の書かれたカードを取り出す。
次の問いに答えよ。

(1) 取り出された3枚のカードの中に4が書かれたカードが含まれている確率を求めよ。

(2) 取り出された3枚のカードに書かれた数字の中で4が最大である確率を求めよ。

(1996-4)

(1) 取り出される3枚のカードの中に
4が含まれる為には、4のカードが含まれるグループの残りのカードは 5〜9 のうち2枚であればよい.

$_5C_2$（通り）.

4のカードのグループで 4のカードが最小という条件を除くと、4以外の8枚から2枚選択

$_8C_2$（通り）

よって求める確率は

$$\frac{_5C_2}{_8C_2} = \frac{5\cdot4}{8\cdot7} = \frac{5}{14} \quad //$$

(2) 取り出された3枚のカードの中に4が含まれる
つまり、4のカードのグループでは4が最小である条件の下で考える.
題意の余事象について考える.
つまり「取り出された3枚のカードに書かれた数字の中で4が最大でない」確率は、
4が含まれないグループのうち1つに
1, 2, 3 のカードが3つとも同時に含まれれば、
もう片方のグループの最小が5以上となり
4は最大でなくなる.
4の含まれるグループの数字は5〜9のうち2枚
$_5C_2$通り
残りのグループ分けは、1通りである.
一方で、4の含まれないグループを自由に分ける方法は $\frac{1}{2}{}_6C_3$通り.

よって求める確率は

$$P = \frac{5}{14}\cdot\left(1 - {}_5C_2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot{}_6C_3\cdot{}_5C_2}\right)$$

$$= \frac{5}{14}\cdot\left(1-\frac{2\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4}\right)$$

$$= \frac{9}{28} \quad //$$

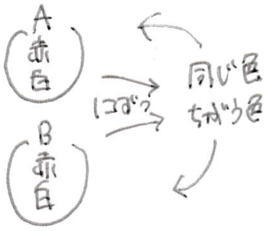
37 A, B どちらの袋にも，赤球と白球が 1 個ずつ入っているとして，次の操作を行う。2 つの袋から無作為に 1 個ずつ取り出し，同じ色なら 2 つとも A の袋に入れ，異なる色なら 2 つとも B の袋に入れる。この操作をどちらかの袋の球がなくなるまで続けるとする。n を自然数とし，$2n$ 回までこの操作が続いた後，A の袋に 4 個の球が入っている確率を p_n，赤，白の球が 1 個ずつ入っている確率を q_n，同じ色の球 2 個が入っている確率を r_n，球が入ってない確率を s_n とする。次の問いに答えよ。

(1) p_1，q_1，r_1，s_1 を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n，s_n を q_{n-1}，r_{n-1} を用いて表せ。

(3) p_n，q_n，r_n，s_n を求めよ。

(1995-5)



Aの袋に4コ ：p_n
赤白 1コずつ：q_n
同じ色 2コ：r_n
0コ ：s_n.

(1) (i) 2回後に Aに 4コの球.

1回目 A B	2回目 A B	確率.
赤 赤	白 白	$\cdots\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$
白 白	赤 赤	$\cdots\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

上の2つの状況であり、互いに排反より

$p_1=\frac{1}{12}\times 2=\frac{1}{6}$

(ii) 2回後に Aに 0コの球
1回目 2回目 ともに異なる色を取り出すので

$s_1=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{3}\times 2=\frac{1}{3}$

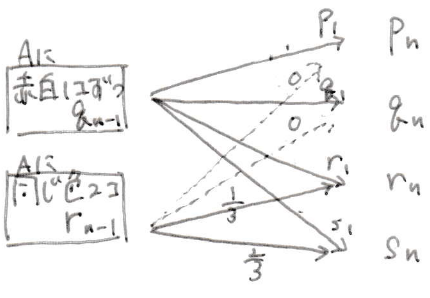
(iii) 2回後に Aに赤白1コずつ.
1回目同じ色をとり、2回目ちがう色を取り出す

$q_1=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{3}\times 2=\frac{1}{3}$

(iv) 2回後に Aに同じ色が2コ.
1回目ちがう色をとりもして、2回目同じ色.

$r_1=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}\times 2=\frac{1}{6}$ //

(2)



point.
(2) 遷移図を書く.
(3) $\{3^n r_n\}$を新たな数列とおきなおす.

$r_{n-1}\to r_n$ は、
ちがう色 → 同じ色の順に取ればよい.
$1\cdot 1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$r_{n-1}\to s_n$ は.
ちがう色 → ちがう色の順に取る.
$1\cdot 1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

左下の表より.

$$\begin{cases} p_n=\frac{1}{6}\cdot q_{n-1}. \\ q_n=\frac{1}{3}q_{n-1}. \\ r_n=\frac{1}{6}q_{n-1}+\frac{1}{3}r_{n-1} \\ s_n=\frac{1}{3}q_{n-1}+\frac{2}{3}r_{n-1}. \end{cases}$$ //

(3) q_n は、初項 $q_1=\frac{1}{3}$. 公比$\frac{1}{3}$ より

$\cdot\ q_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\cdot\ p_n=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\cdot\ r_n=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}r_{n-1}$

$3^n r_n=\frac{1}{2}.+3^{n-1}r_{n-1}.$

数列$\{3^n r_n\}$が初項 $\frac{1}{2}$. 公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列より.

$3^n r_n=\frac{1}{2}+(n-1)\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}n$

$\therefore r_n=\frac{n}{2\cdot 3^n}$

よって $s_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{2}{3}\cdot\frac{n-1}{2\cdot 3^{n-1}}=\frac{n}{3^n}$

ゆえに、結果をまとめると

$$\begin{cases} p_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ q_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ r_n=\frac{n}{2\cdot 3^n} \\ s_n=\frac{n}{3^n} \end{cases}$$

$n=1$でも成立. //

38 ３つのタイプからなる合計１０枚の同じ形状のカードがある。第１のタイプは３枚で両面が黒，第２のタイプは３枚で両面が白，第３のタイプは４枚で片面が白で他面が黒である。これらのカードの中から１枚を無作為に取り出すとき，次の問いに答えよ。

(1) 上面が白であったとき，下面が黒である確率を求めよ。

(2) 下面のカードの色を言い当てるゲームをするとき，答として

(i) 上面と同じ色を答える

(ii) 上面と異なる色を答える

(iii) 上面の色と無関係に平等な確率で白または黒と答える

場合を考える。それぞれの場合に答が当たる確率を求めよ。

(1994-5)

両面黒：3枚
両面白：3枚) 計10枚.
黒白：4枚

(1) 事象A：上面が白.
B：下面が黒.

求める確率は $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

$P(A) = \dfrac{10}{20}$

$P(A\cap B) = \dfrac{4}{20}$

$\therefore\ P_A(B) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$ //

(2) (i) 上面と同じ色で正解するのは.
第1 or 第2のタイプ.
各々10枚中3枚ずつで,
確率は $\frac{3}{10}$.
互いに排反なので
$P = \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10} = \dfrac{3}{5}$ //

(ii) 上面と異なる色で正解する.
第3のタイプ.
確率は $\dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$ //

(iii) 無作為に選択.
すべての面 20コ に対し、下面が
白である or 黒であるのは各々10通りずつ.
この確率は各々 $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ である.
また、平等な確率で白 or 黒というので
各々 $\frac{1}{2}$ の確率.
ゆえに白、黒で答が一致する確率は各々.
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
互いに排反より $P = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ //

答えが直観的に分かる問題.
こういう問題ほど説明に困る…。(笑)

39 xと書いた玉がa個，yと書いた玉がb個入っている袋がある。この中から２個取り出してxとyの個数を調べて元に戻す。ただし，$a \geqq 2$, $b \geqq 2$とする。このとき，xy平面上で点Pを

- ２個ともxならばx軸の正の方向に２，
- xが１個とyが１個ならばx軸, y軸の正の方向にそれぞれ１，
- ２個ともyならばy軸の正の方向に２，

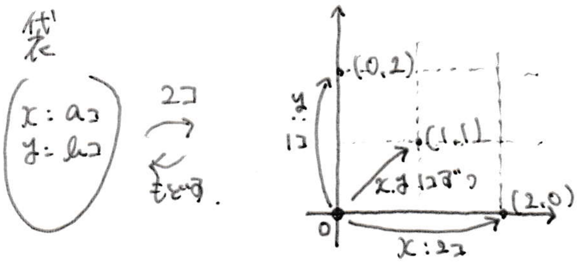
だけ進ませる試行を考える。点Pが原点(0, 0)から出発し，この試行を繰り返し行うとき，次の問いに答えよ。

(1) １回後に点Pが存在しうる点とその点に存在する確率をそれぞれ求めよ。

(2) ２回後に点Pが存在しうる点とその点に存在する確率をそれぞれ求めよ。

(3) $a=b$のとき２回後に点Pが存在する確率が一番大きな点を求めよ。

(1992-5)



$P((x,y))$：点(x,y)に点Pがある確率、とおく。

(1)
$$P((2,0)) = \frac{{}_aC_2}{{}_{a+b}C_2} = \frac{a\cdot(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$$
$$P((1,1)) = \frac{{}_aC_1\cdot{}_bC_1}{{}_{a+b}C_2} = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}$$
$$P((0,2)) = \frac{{}_bC_2}{{}_{a+b}C_2} = \frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)} \quad //$$

(2) A: x 2コ
B: x, y 1コずつ
C: y 2コ　取り出す事象とする。
2回後に点Pが存在しうる点は、上の3つの組み合わせにより、

A, A → (4, 0) … i)
A, B → (3, 1) … ii)
A, C → (2, 2) } … iii)
B, B → (2, 2)
B, C → (1, 3) … iv)
C, C → (0, 4) … v)　である。

以下、確率をもとめる。

i) (4, 0)
$$P((4,0)) = (P((2,0)))^2 = \frac{a^2(a-1)^2}{(a+b)^2(a+b-1)^2}$$

ii) (3, 1)
$$P((3,1)) = {}_2C_1\cdot P((2,0))\cdot P((1,1)) = \frac{4a^2b(a-1)}{(a+b)^2(a+b-1)^2}$$

iii) (2, 2)
$$P((2,2)) = {}_2C_1\cdot P((2,0))P((0,2)) + (P((1,1)))^2 = \frac{2ab(3ab-a-b+1)}{(a+b)^2(a+b-1)^2}$$

iv) (1, 3)
$$P((1,3)) = {}_2C_1\cdot P((0,2))\cdot P((1,1)) = \frac{4ab^2(b-1)}{(a+b)^2(a+b-1)^2}$$

v) (0, 4)
$$P((0,4)) = (P((0,2)))^2 = \frac{b^2(b-1)^2}{(a+b)^2(a+b-1)^2} \quad //$$

(3) $a=b$のとき
$$P((0,4)) = P((4,0)) = \frac{1}{4}\cdot\frac{(a-1)^2}{(2a-1)^2}$$
$$P((3,1)) = P((1,3)) = \frac{a(a-1)}{(2a-1)^2}$$
$$P((2,2)) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(3a^2-2a+1)}{(2a-1)^2} = \frac{a^2+\frac{1}{2}(a-1)^2}{(2a-1)^2}$$

$\frac{1}{4}(a-1)^2$, $a(a-1)$, $a^2+\frac{1}{2}(a-1)^2$ の大小関係を比較する。
$$a(a-1) - \frac{1}{4}(a-1)^2 = (a-1)\left(\frac{3}{4}a+\frac{1}{4}\right) > 0.$$
$$\left\{a^2+\frac{1}{2}(a-1)^2\right\} - a(a-1) = a^2 - \frac{1}{2}(a-1)(a+1) = \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2} > 0.$$

よって、
$$a(a-1) < \frac{1}{4}(a-1)^2 < a^2+\frac{1}{2}(a-1)^2$$
∴求める点は (2, 2) //

40 4枚の硬貨を投げる試行を考える。表の出た枚数を x，裏の出た枚数を y とする。$x > y$ ならば右に1歩，$x < y$ ならば左に1歩進み，$x = y$ のときはその場にとどまる。

(1) 3回の試行の後，はじめにいた場所から右に1歩進んだところにいる確率を求めよ。

(2) 3回の試行の後，はじめにいた場所から右に k 歩 ($k = 1,\ 2,\ 3$) 離れている場合の得点は k とし，それ以外の場合の得点は0とする。得点の期待値を求めよ。

(1990-3)

行動	(x, y)	確率	
右	$(4, 0)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	
	$(3, 1)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot {}_4C_1$	$\frac{5}{16}$
なし	$(2, 2)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot {}_4C_2$	$\frac{3}{8}$
左	$(1, 3)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot {}_4C_1$	$\frac{5}{16}$
	$(0, 4)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	

(1) 3回の試行の後に，右に1つ進んだところにいるには，

(右，右，左) …(i)

(右，なし，なし) …(ii) の 2パターン。

(i) $P_1 = \left(\frac{5}{16}\right)^2 \cdot \frac{5}{16} \cdot {}_3C_1 = \frac{3 \cdot 5^3}{2^{12}}$

(ii) $P_2 = \left(\frac{5}{16}\right) \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot {}_3C_1 = \frac{3^3 \cdot 5}{2^{10}}$

よって求める確率は

$$P = P_1 + P_2 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 61}{2^{12}} = \frac{915}{4096}$$ //

(2) 得点が k である確率を $P(k)$ とおく。

(1)より $P(1) = \frac{915}{4096}$

(i) $k = 2$.

3回の試行の後に，右に2つ進んだところにいるには

(右，右，なし) のみ。

$$\therefore P(2) = \left(\frac{5}{16}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} \cdot {}_3C_1 = \frac{3^2 \cdot 5^2}{2^{11}} = \frac{225}{2048}$$

(ii) $k = 3$.

(右，右，右) が得点3になる条件.

$$\therefore P(3) = \left(\frac{5}{16}\right)^3 = \frac{125}{4096}$$

よって求める期待値は．

$$E = 1 \cdot P(1) + 2 \cdot P(2) + 3 \cdot P(3) = \frac{915 + 2 \cdot 2 \cdot 225 + 3 \cdot 125}{4096} = \frac{2190}{4096} = \frac{1095}{2048}$$ //

$\boxed{41}$ m 枚の硬貨を同時に投げて，表が k 枚出るとき $X = a^k$ $(a > 0)$ とする。

(1) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ に対して，$\dfrac{\sqrt{V(X)}}{E(X)} = \sqrt{\dfrac{2^m(1+a^2)^m}{(1+a)^{2m}} - 1}$ が成り立つことを示せ。

(2) a が $a > 0$ の範囲を動くとき，$\dfrac{\sqrt{V(X)}}{E(X)}$ のとりうる範囲を求めよ。

(1989-4)

(1) 確率変数 $X = a^k$ の確率は

$$P(X = a^k) = \frac{{}_mC_k}{2^m}.$$

期待値は

$$E[X = a^k] = \sum_{k=0}^{m} a^k \cdot P(X = a^k).$$

$$= \frac{1}{2^m} \cdot \sum_{k=0}^{m} {}_mC_k \cdot a^k$$

$$= \frac{1}{2^m} \cdot (1+a)^m \quad (\text{二項定理より}).$$

同様にして

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{m} a^{2k} \cdot P(X = a^k).$$

$$= \frac{1}{2^m} \cdot (1+a^2)^m$$

よって分散は

$$V[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2$$

$$= \left(\frac{1}{2^m}\right)^2 \{2^m \cdot (1+a^2)^m - (1+a)^{2m}\}$$

以上より

$$\frac{\sqrt{V[X]}}{E[X]} = \sqrt{\frac{V[X]}{\{E[X]\}^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2^m}\right)^2 \cdot \{2^m(1+a^2)^m - (1+a)^{2m}\}}{\left(\frac{1}{2^m} \cdot (1+a)^m\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2^m \cdot (1+a^2)^m - (1+a)^{2m}}{(1+a)^{2m}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2^m \cdot (1+a^2)^m}{(1+a)^{2m}} - 1}. \quad //$$

(2)

$$\frac{\sqrt{V[X]}}{E[X]} = \sqrt{\left(\frac{2(1+a^2)}{(1+a)^2}\right)^m - 1}.$$

$$f(a) = \frac{2(1+a^2)}{(1+a)^2} \text{ とおく.}$$

$$f'(a) = \frac{4a(1+a)^2 - 2(1+a^2) \cdot 2 \cdot (1+a)}{(1+a)^4}.$$

$$= \frac{4(a-1)}{(a+1)^3}$$

増減表は，$\lim_{a \to \infty} f(a) = 2$. より.

a	0		1		∞
f'	/	$-$	0	$+$	/
f	2	↘	1	↗	2

上の増減表より

$$1 \leq f(a) \leq 2.$$

$$1 \leq f(a)^m \leq 2^m$$

$$0 \leq f(a)^m - 1 \leq 2^m - 1.$$

$$0 \leq \sqrt{f(a)^m - 1} \leq \sqrt{2^m - 1}.$$

よって.

$$0 \leq \frac{\sqrt{V[X]}}{E[X]} \leq \sqrt{2^m - 1}. \quad //$$

二項定理.

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, a^k b^{n-k}.}$$