42 p, q は共に整数であるとする。２次方程式 $x^2+px+q=0$ が実数解 α, β を持ち，条件 $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)\neq 0$ を満たしているとする。このとき，数列 $\{a_n\}$ を

$\{a_n\}=(\alpha^n-1)(\beta^{n}\cancel{-n}-1)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

によって定義する。以下の問いに答えよ。

(1) a_1, a_2, a_3 は整数であることを示せ。

(2) $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)>0$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ は整数であることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるとき，p と q の値を全て求めよ。ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

(2012-4)

(1) $a_1=(\alpha-1)(\beta-1)$

$=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$.

$a_2=(\alpha^2-1)(\beta^2-1)$

$=(\alpha\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)+1$.

$=(\alpha\beta)^2-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+1$

$a_3=(\alpha^3-1)(\beta^3-1)$

$=(\alpha\beta)^3-(\alpha^3+\beta^3)+1$.

$=(\alpha\beta)^3-\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}+1$.

ここで解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-p$. $\alpha\beta=q$. が成立.

よって.

$a_1=q+p+1$

$a_2=q^2-(p^2-2q)+1$.

$a_3=q^3-(-p^3+3qp)+1$.

p, q：整数より. a_1, a_2, a_3 も整数//.

(2) $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)>0$

$\Leftrightarrow$「$|\alpha|>1$ かつ $|\beta|>1$」 … i)

or

「$0\leq|\alpha|<1$ かつ $0\leq|\beta|<1$」 … ii)

i) $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\dfrac{(\alpha^{n+1}-1)(\beta^{n+1}-1)}{(\alpha^n-1)(\beta^n-1)}\right|$

$=\left|\dfrac{(\alpha-\frac{1}{\alpha^n})(\beta-\frac{1}{\beta^n})}{(1-\frac{1}{\alpha^n})(1-\frac{1}{\beta^n})}\right|$

$|\alpha|>1$, $|\beta|>1$ より

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\beta^n}=0$.

ゆえに.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(\alpha-0)(\beta-0)}{(1-0)(1-0)}\right|=|\alpha\beta|$

よって整数.

ii) $0\leq|\alpha|, |\beta|<1$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha^n=\lim_{n\to\infty}\beta^n=0$.

ゆえに.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(0-1)(0-1)}{(0-1)(0-1)}\right|=1$

よって整数.

i) ii) より. 題意を示せた//.

解と係数の関係

$x^2+px+q=0$ の解 α, β.

$\begin{cases}\alpha+\beta=-p.\\ \alpha\beta=q\end{cases}$

極限値.

$|\alpha|<1 \Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0$

$|\alpha|>1 \Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha^n}=0$.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるときは，

(2)で示した命題の対偶．

「$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ が整数でないとき，$(|\alpha|-1)(|\beta|-1)\le 0$．」

と，$(|\alpha|-1)(|\beta|-1)\neq 0$ を用いて，

$(|\alpha|-1)(|\beta|-1)<0$ となることがわかる。

このようになるのは，

$0\le|\alpha|<1<|\beta|$ or $0\le|\beta|<1<|\alpha|$．

ここで a_n は α,β の対称式なので

$0\le|\alpha|<1<|\beta|$ の場合を考えても一般性は失われない．

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha^{n+1}-1)(\beta^{n+1}-1)}{(\alpha^n-1)(\beta^n-1)}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha^{n+1}-1)\left(\beta-\frac{1}{\beta^n}\right)}{(\alpha^n-1)\left(1-\frac{1}{\beta^n}\right)}\right|$$

$$= \left|\frac{(0-1)(\beta-0)}{(0-1)(1-0)}\right| = |\beta|$$

よって $|\beta| = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ \beta = \pm\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(i) $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき，

$2\beta-1=\sqrt{5}$．

辺々2乗して，整理すると

$\beta^2-\beta-1=0$．…①

β は2次方程式 $x^2+px+q=0$ の実数解より

$\beta^2+p\beta+q=0$．

①の式より

$(\beta+1)+p\beta+q=0$．

$(p+1)\beta+(q+1)=0$．

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}(p+1)+(q+1)=0$．

$(p+2q+3)+\sqrt{5}(p+1)=0$．

p,q：共に整数より，$\sqrt{5}$ は無理数なので

$p+1=0$，$p+2q+3=0$．

$\therefore\ p=-1,\ q=-1$．

このとき

$\alpha\beta=p$ より

$|\alpha|=\left|\dfrac{p}{\beta}\right|=\left|\dfrac{1}{\beta}\right|<1$．$(\because |\beta|>1)$．

より，

$0\le|\alpha|<1$ をみたす。

(ii) $\beta=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき

$2\beta+1=-\sqrt{5}$

辺々2乗して整理すると，

$\beta^2+\beta-1=0$

(i)と同じ手順で，

$(1-\beta)+p\beta+q=0$．

$(p-1)\beta+(q+1)=0$

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}(p-1)-(q+1)=0$．

$(p-2q-3)+\sqrt{5}(p-1)=0$．

p,q 共に整数で $\sqrt{5}$ は無理数より，

$p-1=0$，$p-2q-3=0$．

$\therefore\ p=1,\ q=-1$．

このとき

$|\alpha|=\left|\dfrac{p}{\beta}\right|=\dfrac{1}{|\beta|}<1$ $(\because |\beta|>1)$．

より

$0\le|\alpha|<1$ をみたす．

(i)(ii)より求める p と q の値は

$(p,q)=(-1,-1),(1,-1)$ //

- 真な命題の対偶は真であることを使う。
- a_n が α,β の対称式であること。
- β が $x^2+px+q=0$ の実数解であったこと。
- (有理数)×▲ + (無理数)×■ $=0$ $\iff$ ▲$=0$，■$=0$．

43 数列 a_1, a_2, $\cdots a_n$, $\cdots$ は

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1-a_n^2} \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

を満たしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，一般項 a_n を求めよ。

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3) $a_1 = \tan\dfrac{\pi}{20}$ とするとき，
$a_{n+k} = a_n$, $n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$
を満たす最小の自然数 k を求めよ。

(2011-3)

(1)
$$a_2 = \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{3}.$$

$$a_3 = \frac{2\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}.$$

$$a_4 = \frac{2(-\sqrt{3})}{1-3} = \sqrt{3}$$

a_nは、$n-1$項が$\sqrt{3}$のとき $-\sqrt{3}$.
$n-1$項が$-\sqrt{3}$のとき $\sqrt{3}$ となる.
ただし、初項は $\frac{1}{\sqrt{3}}$ である.
よって求める一般項は.

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}. & (n=1) \\ (-1)^n\cdot\sqrt{3} & (n\geqq 2) \end{cases} \quad //$$

(2)
$$\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\cdot\tan\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$
$$= 2-\sqrt{3}. \quad //$$

tanの加法定理

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

(3) $a_n = \tan\theta_n$とおく.

$$a_{n+1} = \frac{2\cdot\tan\theta_n}{1-\tan^2\theta_n}$$
$$= \tan 2\theta_n. \quad \text{である.}$$

ゆえに、

$a_1 = \tan\frac{\pi}{20}$

$a_2 = \tan 2\cdot\frac{\pi}{20} = \tan\frac{\pi}{10}$

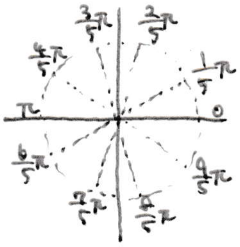
$a_3 = \tan 2\cdot\frac{\pi}{10} = \tan\frac{\pi}{5}$

$a_4 = \tan 2\cdot\frac{\pi}{5} = \tan\frac{2}{5}\pi.$

$a_5 = \tan\frac{4}{5}\pi$

$a_6 = \tan\frac{8}{5}\pi$

$a_7 = \tan\frac{16}{5}\pi = \tan\frac{6}{5}\pi.$



$\tan\frac{\pi}{5} = \tan\frac{6}{5}\pi$ より.
$a_3 = a_7$.
よって、数列$\{a_n\}$は、$n\geqq 2$において
$a_2 \sim a_6$をくり返しする数列である.
よって、求める自然数kは
$k=4$ //

44 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は, $a_1 = b_1 = 1$ および, 関係式

$$a_{n+1} = 2a_n b_n$$
$$b_{n+1} = 2a_n^2 + b_n^2$$

を満たすものとする。

(1) $n \leqq 3$ のとき, a_n は3で割り切れるが, b_n は3では割り切れないことを示せ。

(2) $n \leqq 2$ のとき, a_n と b_n は互いに素であることを示せ。

(2006-3)

(1) 〈証明〉.

数学的帰納法を用いて示す.

(i) $n=3$ のとき.

$a_2 = 2$

$b_2 = 2+1 = 3$

$a_3 = 2\cdot 2\cdot 3 = 12$

$b_3 = 2\cdot 2^2 + 3^2 = 17$

ゆえに, $n=3$ のときは成立.

(ii) $n=k$ のとき $(k \geq 3)$ 成立と仮定.

つまり.

$a_k \equiv 0 \pmod 3$.

$b_k \equiv b \ (b = 1 \text{ or } 2) \pmod 3$.

このとき.

$a_{k+1} \equiv 2\cdot 0\cdot b = 0 \pmod 3$.

$b_{k+1} \equiv 2\cdot 0^2 + b^2 = b^2 \pmod 3$.

$b = 1, 2$ より

$b^2 = 1, 4 \equiv 1 \pmod 3$.

$\therefore b_{k+1} \equiv 1 \pmod 3$.

ゆえに, $n=k+1$ のときも成立する.

(i), (ii) より.

$n \geq 3$ のとき, a_n は3で割り切れ, b_n は3ではわり切れない

//.

(2) 〈証明〉.

背理法を用いて示す.

$b_{n+1} = 2a_n^2 + b_n^2$ より

$b_{n+1} - b_n^2 = 2a_n^2$ (偶数).

よって, b_n が偶数のとき b_n^2 も偶数より

b_{n+1} も偶数. 逆に b_n が奇数のとき b_{n+1} も奇数.

ただし, $b_1 = 1$ より b_n は奇数.

$n=2$ のときは, $a_2 = 2$, $b_2 = 3$ より互いに素.

$n = m \geq 3$ のとき成立しないと仮定する. $(m \in \mathbb{N})$.

つまり, a_m と b_m は互いに素でないので

公約数として素数 p が存在.

b_m は奇数より $p \neq 2$ である.

このとき, $a_m = 2a_{m-1}b_{m-1}$ において,

a_m は p を因数にもつので, $p \neq 2$ より

a_{m-1} もしくは b_{m-1} は p を因数にもつ.

(i) a_{m-1} が素数 p を因数にもつとき

$b_{m-1}^2 = b_m - 2a_{m-1}^2$ において,

b_m と a_{m-1} が p を因数にもつので

b_{m-1}^2 が p でわり切れ, b_{m-1} も p で

わり切れる.

(ii) b_{m-1} が素数 p を因数にもつとき.

$2a_{m-1}^2 = b_m - b_{m-1}^2$ において.

b_m と b_{m-1} が p を因数にもつので

$2a_{m-1}^2$ が p でわり切れ, $p \neq 2$ より

a_{m-1} が p でわり切れる.

(i), (ii) より

$a_m = 2a_{m-1}b_{m-1}$ において a_{m-1}, b_{m-1} は

ともに素数 p でわり切れる. このことより,

「a_m, b_m はともに素数 p でわり切れる」とき

「a_{m-1}, b_{m-1} もともに素数 p でわり切れる」

これをくり返すと

「a_2, b_2 がともに素数 p でわり切れる」と言える.

しかし a_2 と b_2 は互いに素であり矛盾.

よって $n \geq 2$ のときは a_n と b_n は互いに素. //

45 座標平面上で，x 座標と y がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし，辺の長さが1である正方形(周は含まない)を単位正方形と呼ぶことにする。p, n を自然数とし，領域

$$D_n = \{(x,\ y) | 0 \leqq x,\ x^p \leqq y \leqq n\}$$

を考え，その面積を S_n とする。L_n と M_n を，それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

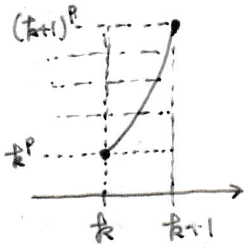
(1) グラフ $y = x^p$ $(0 \leqq x \leqq n^{\frac{1}{p}})$ と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ。

(2) 不等式 $M_n < S_n < M_n + n$ を示せ。また，面積 S_n を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n$ を求めよ。

(2003-3)

(1) 〈証明〉 $[x]$ は x を超えない最大の自然数とする.



k：自然数とし、$k+1 \leq n^{\frac{1}{p}}$ とする.

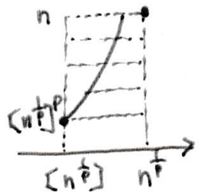
区間 $[k, k+1]$ において、y の値は k^p から k^{p+1} まで動く.

このとき通過する単位正方形の個数は.
$((k+1)^p - k^p)$ コ.
また、k, $k+1$ が自然数より k^p, $(k+1)^p$ も自然数.
つまり (k, k^p), $(k+1, (k+1)^p)$ は格子点

$1 \leq k+1 \leq [n^{\frac{1}{p}}]$ で k を動かすと、
通過する単位正方形は

$$(1^p - 0^p) + (2^p - 1^p) + \cdots + ([n^{\frac{1}{p}}]^p - ([n^{\frac{1}{p}}] - 1)^p)$$
$$= [n^{\frac{1}{p}}]^p \text{ コ}.$$

$[n^{\frac{1}{p}}] \leq k+1 \leq n^{\frac{1}{p}}$ において、



グラフ $y = x^p$ は、
$n - [n^{\frac{1}{p}}]^p$ コの単位正方形を
通過する.

以上より、$y = x^p$ は、$(0 \leq x \leq n^{\frac{1}{p}})$ で
$(n - [n^{\frac{1}{p}}]^p) + [n^{\frac{1}{p}}]^p = n$ コの単位正方形と交わる. //

(2) 〈証明〉.
領域 D_n の面積が S_n であり.
領域 D_n に含まれる単位正方形の個数が M_n より
$S_n > M_n$ は明らか.
また、$y = x^p$ と交わる単位正方形は、$0 \leq x \leq n^{\frac{1}{p}}$
において $y = x^p$ をおおいつくし、その個数は
(1) より n 個. ゆえに
$S_n < M_n + n$.
よって $M_n < S_n < M_n + n$ +.

$$S_n = \int_0^{n^{\frac{1}{p}}} (n - x^p)\,dx.$$
$$= \left[nx - \frac{1}{p+1} x^{p+1} \right]_0^{n^{\frac{1}{p}}}$$
$$= n \cdot n^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p+1} \cdot n^{\frac{p+1}{p}}$$
$$= \frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}}$$
//

(3)

D_nに含まれる格子点の個数 L_n は、
単位正方形の右下の格子点とその単位正方形を
一対一対応させて考えると、
その単位正方形の数と、$x=0$ 上の格子点と
$y=n$ 上の格子点の数の和なので、

$L_n = M_n + m + [n^{\frac{1}{p}}] + 1$.

より

$M_n = L_n - m - [n^{\frac{1}{p}}] - 1$.

(2)の結論より、

$$\underbrace{L_n - m - [n^{\frac{1}{p}}] - 1 < \frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}}}_{①} < L_n - [n^{\frac{1}{p}}] - 1 .$$

②

①より、

$L_n < \frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}} + n + [n^{\frac{1}{p}}] + 1$.

②より

$\frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}} + [n^{\frac{1}{p}}] + 1 < L_n$

よって、

$$\frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}} + [n^{\frac{1}{p}}] + 1 < L_n < \frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}} + n + [n^{\frac{1}{p}}] + 1$$

各々に $n^{-\frac{p+1}{p}}$ をかける。

$$\frac{p}{p+1} + n^{-\frac{p+1}{p}}[n^{\frac{1}{p}}] + n^{-\frac{p+1}{p}} < n^{-\frac{p+1}{p}} L_n < \frac{p}{p+1} + n^{1-\frac{p+1}{p}} + n^{-\frac{p+1}{p}}[n^{\frac{1}{p}}] + n^{-\frac{p+1}{p}} \quad \cdots (※)$$

$n^{-\frac{p+1}{p}}[n^{\frac{1}{p}}]$ について考える。

$n^{\frac{1}{p}} - 1 < [n^{\frac{1}{p}}] \leq n^{\frac{1}{p}}$

辺々に $n^{-\frac{p+1}{p}}$ をかける。

$n^{-1} - n^{-\frac{p+1}{p}} < n^{-\frac{p+1}{p}}[n^{\frac{1}{p}}] \leq n^{-1}$

$\lim_{n\to\infty} n^{-1} = 0$. $\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{p}} = 0$.

なので

$\lim_{n\to\infty} (n^{-1} - n^{-\frac{p+1}{p}}) = 0$

はさみうちの原理により、

$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}}[n^{\frac{1}{p}}] = 0$.

(※)の式において

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{p}{p+1} + n^{-\frac{p+1}{p}}[n^{\frac{1}{p}}] + n^{-\frac{p+1}{p}}\right) = \frac{p}{p+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{p}{p+1} + n^{-\frac{1}{p}} + n^{-\frac{p+1}{p}}[n^{\frac{1}{p}}] + n^{-\frac{p+1}{p}}\right) = \frac{p}{p+1}$$

はさみうちの原理より、

$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n = \frac{p}{p+1}$ //

誘導に沿って解いていけばOK.
(2)より、(3)ではさみうちの原理を使うことに
気づければ勝ち。

46 自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2) a_1, a_2, $\cdots$, a_6 を求めよ。

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N を全て求めよ。

(i) N を十進法で表示したとき 6 桁となる。

(ii) N を十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を除くと 2016 となる。

(iii) N は 13 で割り切れる。

(2016-4)

(1) $10^n \equiv a_n \pmod{13}$ より.

$10^n \times 10 \equiv 10a_n \equiv (10a_n$ を13で割った余り$) \pmod{13}$.

$10^{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{13}$ より.

よって

$a_{n+1} = (10a_n$ を13で割った余り$)$. //

(2)

$10^1 = 10$ より $a_1 = 10$

$10^2 = 100 \equiv 9 \pmod{13}$ より $a_2 = 9$

$10^3 \equiv 9 \cdot 10 \equiv 12 \pmod{13}$ より $a_3 = 12$.

$10^4 \equiv 12 \cdot 10 \equiv 3 \pmod{13}$ より $a_4 = 3$.

$10^5 \equiv 3 \cdot 10 \equiv 4 \pmod{13}$ より $a_5 = 4$

$10^6 \equiv 4 \cdot 10 \equiv 1 \pmod{13}$ より $a_6 = 1$. //

(3) (i), (ii) の条件をみたす N は、自然数 b, c $(1 \leq b \leq 9,\ 0 \leq c \leq 9)$ を用いて.

$N = b \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + c$

と表せる.

(2) の結論を用いて,

$N \equiv b \cdot a_5 + 2 \cdot a_4 + 0 \cdot a_3 + 1 \cdot a_2 + 6 \cdot a_1 + c$

$= 4b + c + 75$

$\equiv 4b + c + 10 \pmod{13}$.

(iii) の条件より.

$4b + c + 10 \equiv 0 \pmod{13}$.

これを満たす b, c を求める.

$4b + c + 10 = 26$.

$4b + c + 10 = 39$.

$4b + c + 10 = 52$.

b, c の範囲条件より上の3パターン.

$4b+c+10$	b	c
26	2	8
	3	4
	4	0
39	5	9
	6	5
	7	1
52	9	6

よって求める N は,

220168, 320164, 420160,

520169, 620165, 720161,

920166. //

誘導に沿って解けば簡単に解けるはず.
合同式の利用に慣れているなら合同式で解くのがいい?

47 初項 $a_1=1$，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7 の倍数である項の個数を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7^2 の倍数である項の個数を求めよ。

(3) 初項から第 n 項までの積 $a_1a_2\cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

(2017-3)

(1) 初項 1，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=4n-3$．

a_n が 7 の倍数となるのは，自然数 k を用いて

$4n-3=7k$．

$4(n+1)=7(k+1)$．

4，7 が互いに素より．

$n+1=7l$，
$k+1=4l$ （l：整数）

と表せるので

$n=7l-1$，$k=4l-1$．

$1\leqq n\leqq 600$，$1\leqq k$ より．

$1\leqq 7l-1\leqq 600$． $1\leqq 4l-1$．

∴ $\frac{1}{2}\leqq l\leqq \frac{601}{7}=85+\frac{6}{7}$

よって $l=1, 2, \cdots, 85$．なので

7 の倍数は 85 コ //．

(2) (1) より．a_n が 7 の倍数のとき

$n=7l-1$．と表せる．

$b_l=a_{7l-1}$ とおくと 数列 b_l は

a_n のうち 7 の倍数を順に並べた数列となる．

一般項は $b_l=4(7l-1)-3$
$=7(4l-1)$． （$l=1, 2, \cdots, 85$）．

a_n が 7^2 の倍数となるには．

自然数 m を用いて．

$7(4l-1)=49m$．

$4l-1=7m$．

$4(l-2)=7(m-1)$．

4，7 は互いに素より．

$l-2=7p$
$m-1=4p$ （p：整数）．

と表せるので

$l=7p+2$．$m=4p+1$．

$1\leqq l\leqq 85$，$1\leqq m$ より．

$1\leqq 7p+2\leqq 85$，$1\leqq 4p+1$．

∴ $0\leqq p\leqq \frac{83}{7}=11+\frac{6}{7}$．

よって $p=0, 1, \cdots, 11$ より

7^2 の倍数は 12 コ． //

(3) a_n が 7 の倍数のとき，$n=7l-1$．なので

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
n	6	<u>13</u>	20	27	34	41	48	55	<u>62</u>	69	76	83	$\cdots$

このうち．7^2 の倍数は，$l=7p+2$ より．

上の表の下線部を引いた所である．

さらに，a_n が 7^3 の倍数となるのは，

(2) と同様にして．

$4p+1=7q$ （$q\geqq 0$：整数）．

これをみたす最小の (p, q) は $(5, 3)$ である．

このときの l は，$7\cdot 5+2=37$．

ゆえに 7^3 の倍数は $l=37$ ではじめて出てくる．

まず $l<37$ の範囲では，7 の倍数は 36 コ．

そのうちで 7^2 の倍数は

$7p+2<37$． $p<5$ より．

$p=0, 1, 2, 3, 4$ の 5 コ．

∴ $b_1b_2\cdots b_{36}$ は $7^{(36+5)}=7^{41}$ の倍数

$l=37$ は 7^3 の倍数より．

$b_1b_2\cdots b_{37}$ は 7^{44} の倍数．

ゆえに．7^{45} の倍数になるには．$l\geqq 38$．

このときの n の値は

$7\cdot 38-1=266-1=265$．

よって．求める自然数 n は 265 //

数列と整数の融合問題．

$\boxed{48}$ 関数 $f(x)=1-x^2$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f(a)=a$ を満たす正の実数 a を求めよ。

(2) a を (1) で求めた実数とする。

$$x \geqq \frac{1}{2} \text{ ならば，} |f(x)-f(a)| \geqq \frac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$$

となることを示せ。

(3) a を (1) で求めた実数とする。

$\frac{1}{2} \leqq x_1 \leqq 1$ として，

$x_{n+1}=f(x_n),\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,$

で決まる数列 $\{x_n\}$ を考える。すべての n に対して $\frac{1}{2} \leqq x_n \leqq 1$ がなりたつならば $x_1=a$ であることを示せ。

(1999-4)

(1) $f(a)=a$ より

$1-a^2=a$

$a^2+a-1=0$

$a=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

a: 正の実数より

$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ //

(2) 〈証明〉

$|f(x)-f(a)|=|(1-x^2)-(1-a^2)|$

$=|x^2-a^2|$

$=|x-a||x+a|.$

ここで，$x\geq\frac{1}{2}$，$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ であり．

$\frac{1}{2}+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ なので

$x+a\geq\frac{\sqrt{5}}{2}.$

ゆえに，

(与式) $=|x-a|\cdot|x+a|$

$\geq\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot|x-a|$ //.

(3)

$f(a)=a$，$x_{n+1}=f(x_n)$ より

$|x_n-a|=|f(x_{n-1})-f(a)|.$

$\geq\frac{\sqrt{5}}{2}|x_{n-1}-a|$ （∵ すべての n に対し $\frac{1}{2}\leq x_n\leq 1$，(2)）

⋮

$\geq\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}|x_1-a|.$ … ①

$x_n-a=x_n+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$ より．

$1-\frac{\sqrt{5}}{2}\leq x_n-a\leq\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$

∴ $|x_n-a|\leq\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$ … ②

① ② より．

$\frac{3-\sqrt{5}}{2}\geq|x_n-a|\geq\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}|x_1-a|.$

各辺に $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n-1}$ をかける．

$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n-1}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\geq|x_1-a|.$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n-1}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}=0$ より．

$|x_1-a|\geq 0$ なので はさみうちの原理により

$x_1=a$. //.

49 (1) 自然数 $n = 1, 2, \cdots$ について，次の等式が成り立つことを示せ。

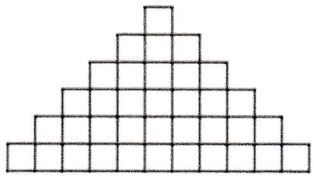
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2) 辺の長さ 1 の正三角形のタイルをいくつか用意して，辺の長さが自然数 m の正三角形をタイルで張りつめたい。

(i) $m = 2, 3, 4$ のとき，どのようにタイル張りすれば良いか図示せよ。

(ii) 一般に，辺の長さ m の正三角形をタイルで張りつめるのに必要なタイルの個数を m に形で表し，その式が成り立つ理由を述べよ。

(3) 辺の長さ 1 の正三角柱のブロックをいくつか用意して隙間なく並べて高さ 1 の正三角柱の台を作る。このような台を n 段積み上げ，高さ n の台を作る。この台を真横から見たとき下図のように見えたという。ただし，図の小四角形はすべて辺の長さ 1 の正方形である。このとき台全体の体積を求めよ。



(1998-5)

(1) 〈証明〉.

$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.

辺を $k=1$ から n までの和をとると,

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3 - k^3\} = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 3k + 1).$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\sum_{k=1}^{n}k + n.$$

$$= 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n.$$

よって,

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2 = (n+1)^3 - 1 - 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - n.$$

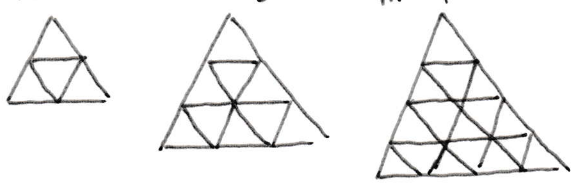
$$= n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$= \frac{1}{2}n(2n+1)(n+1)$$

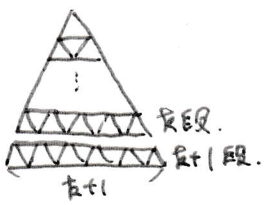
ゆえに,

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad //.$$

(2) (i) $m=2$ $m=3$ $m=4$



(ii) 辺の長さ m の正三角形に必要なタイルの数 S_m とする。



1辺の長さが k の正三角形から, $k+1$ の正三角形を作るのに必要なタイルは, 上底が k, 下底が $k+1$ の台形分のタイルなので

$k + (k+1) = 2k+1$ コ.

$1 \leq k \leq m$ の範囲で和をとればよい.

よって, $S_m = \sum_{k=1}^{m}(2k+1)$.

$$= 2\cdot\frac{1}{2}m(m-1) + m$$

$$= m^2 \quad //.$$

(3) 上から k 段目の正三角柱の底辺の一辺の長さは $(2k-1)$ である. ゆえに, (2) の結果をもちいて, 上から k 段目で必要なブロックの数は,

$(2k-1)^2$ コ である.

これを n 段積み上げるので, 必要なブロックの総和は,

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(4k^2 - 4k + 1)$$

$$= 4\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2 - 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$$

$$= 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 4\,\frac{1}{2}n(n+1) + n$$

$$= \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1).$$

また, ブロックの体積 V は.

$$V = \frac{1}{2}\times1\times1\times\sin 60^\circ \times 1.$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

よって求める体積は

$$V_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}n(2n-1)(2n+1) \quad //$$

(1) は帰納法でも解ける.
(3) のイメージをつかむのに少しとまどうかな…?

$\boxed{50}$ (1) $2^m \leqq 4m^2$ であるが，$2^{m+1} > 4(m+1)^2$ である最小の自然数 m を求めよ。

(2) m を (1) で求めた自然数とする。そのとき，$m < n$ を満たす全ての自然数 n について，$4n^2 < 2^n$ が成り立つことを示せ。

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 4k^2$ とする。n を動かしたときの S_n の最小値を求めよ。

(1997-3)

(1)

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^m	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$4m^2$	4	16	36	64	100	144	196	256	324.

上の表より 求める自然数 $m=8$. //

(2) 〈証明〉

数学的帰納法を用いる.

i) $n=9$のとき.

上の表より成立.

ii) $k \geqq 9$で $4k^2 \leqq 2^k$が成立と仮定する.

$$2^{k+1}-4(k+1)^2 = 2\cdot 2^k - 4k^2 - 4k - 4$$
$$= (2^k - 4k^2) + 2^k - 4k - 4$$
$$\geqq 0 + 4k^2 - 4k - 4$$
$$= (2k-1)^2 - 5$$
$$\geqq (2\cdot 8 - 1)^2 - 5 = 220.$$

より.

$2^{k+1} - 4(k+1)^2 > 0$ が成立.

i) ii)より. $n \geqq 9$なる自然数nに対して

$4n^2 < 2^n$ が成立する. //

(3) (1) (2) より.

$$\begin{cases} 1 \leqq k \leqq 7. & 2^k - 4k^2 < 0. \\ k=8 & 2^k - 4k^2 = 0. \\ 9 \leqq k & 2^k - 4k^2 > 0. \end{cases}$$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2^k - 4k^2)$ より.

$S_1 > S_2 > \cdots > S_7 = S_8 < S_9 <$

よって S_n は $n=7, 8$で最小をとる.

$n=7$のとき,

$$S_7 = \sum_{k=1}^{7} (2^k - 4k^2)$$
$$= \frac{2(2^7-1)}{2-1} - 4\cdot\frac{1}{6}\cdot 7\cdot(7+1)(14+1).$$
$$= -306$$ //

(1) 式変形してもややこしくなりそうなので
列挙で解いてみた。
実際に式変形しても
$$2^n - 4n^2 = (2^{\frac{n}{2}} - 2n)(\underbrace{2^{\frac{n}{2}} + 2n}_{>0}).$$

微分法を用いた近似式

51 正の数 c の k 乗根 $\sqrt[k]{c}$ (k は2以上の整数) の近似値を求めるため

$$f(x) = x^k - c,\ g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\ (x > 0)$$

とおき，

$\sqrt[k]{c} < a_1,\ a_{n+1} = g(a_n),\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

とする。

(1) $\sqrt[k]{c} < a_n$ ならば，$\sqrt[k]{c} < a_{n+1} < a_n$ を示せ。

(2) $k = 3$ のとき，$\sqrt[3]{c} < a_n$ ならば，

$$a_{n+1} - \sqrt[3]{c} < \frac{1}{\sqrt[3]{c}}(a_n - \sqrt[3]{c})^2$$ を示せ。

(3) $k = 3,\ c = 2,\ a_1 = 1.3$ のとき，$a_5 - \sqrt[3]{2} < \dfrac{1}{2^5 \cdot 10^{16}}$ を示せ。

(1997-11)

(1) $f'(x) = kx^{k-1}$.

$$g(x) = x - \frac{x^k - c}{kx^{k-1}}$$

$$a_n - a_{n+1} = a_n - g(a_n) = \frac{a_n^k - c}{k a_n^{k-1}} > 0$$

$(\because\ a_n > \sqrt[k]{c})$.

$\therefore\ a_{n+1} < a_n$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{k} - \frac{c}{k}\cdot(k-1)\cdot\frac{1}{x^k}$$

$g'(x) = 0$ とおくと

$x^k = c$. $x = \sqrt[k]{c}$. $(\because x > 0)$.

増減表は.

x	0	$\cdots$	$\sqrt[k]{c}$	$\cdots$
g'	/	$-$	0	$+$
g	/	$\searrow$	$\sqrt[k]{c}$	$\nearrow$

$a_n > 0$ より. 上の増減表から.

$g(a_n) > \sqrt[k]{c}$.

$\therefore\ a_{n+1} > \sqrt[k]{c}$ //.

(2)
$$\frac{(a_n - \sqrt[3]{c})^2}{\sqrt[3]{c}} - (a_{n+1} - \sqrt[3]{c})$$

$$= \frac{(a_n - \sqrt[3]{c})^2}{\sqrt[3]{c}} - \left(a_n - \frac{a_n^3 - c}{3a_n^2} - \sqrt[3]{c}\right)$$

$$= \frac{(a_n - \sqrt[3]{c})^2}{\sqrt[3]{c}} - \frac{2a_n^3 - 3\sqrt[3]{c}\,a_n^2 + c}{3a_n^2}$$

$$= \frac{(a_n - \sqrt[3]{c})^2}{\sqrt[3]{c}} - \frac{(2a_n + \sqrt[3]{c})(a_n - \sqrt[3]{c})^2}{3a_n^2}.$$

$$= \frac{3a_n^2(a_n - \sqrt[3]{c})^2 - \sqrt[3]{c}(2a_n + \sqrt[3]{c})(a_n - \sqrt[3]{c})^2}{3\cdot\sqrt[3]{c}\cdot a_n^2}$$

$$= \frac{(a_n - \sqrt[3]{c})^2(a_n - \sqrt[3]{c})(3a_n + \sqrt[3]{c})}{3\cdot\sqrt[3]{c}\cdot a_n^2} > 0.$$

より. 題意は示せた.

(3) (2) をくり返して,

$$a_5 - \sqrt[3]{c} < \frac{1}{\sqrt[3]{c}}(a_4 - \sqrt[3]{c})^2$$
$$< \left(\frac{1}{\sqrt[3]{c}}\right)^3 (a_3 - \sqrt[3]{c})^4$$
$$< \left(\frac{1}{\sqrt[3]{c}}\right)^7 (a_2 - \sqrt[3]{c})^8$$
$$< \left(\frac{1}{\sqrt[3]{c}}\right)^{15} (a_1 - \sqrt[3]{c})^{16}$$
$$= \frac{1}{2^5}\cdot(1.3 - \sqrt[3]{2})^{16}$$

ここで,

$1.2 < \sqrt[3]{2} < 1.3$.

$\therefore\ 0 < 1.3 - \sqrt[3]{2} < \frac{1}{10}$.

ゆえに

(与式) $< \dfrac{1}{2^5}\cdot\dfrac{1}{10^{16}}$ //.

(1) が少し難.

(3) は (2) を使う証明問題. 「誘導に気づけるか?」が鍵.

52 0と1を有限個並べたものを語ということにする。語の例としては，0, 010, 00101, 100110 などがある。いま2つの語 $A=1$, $B=10$ をもとにして

$$C_1=A,\ C_2=B,\ C_n=C_{n-2}C_{n-1}C_{n-2}\quad (n\geqq 3)$$

のように定める。例えば，$C_3=1101$ である。次の問いに答えよ。

(1) $n\geqq 3$ のとき，語 C_n に対して，最初，または最後の数字を1個か2個取り去ると，残りは同じ語が循環して現れている。このことを数学的帰納法により示せ。

(2) 語 C_n に現れる0の個数を a_n とし，1の個数を b_n とする。$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ を求めよ。

(1996-5)

~実験~

$C_1=A.\quad C_2=B.$
$C_3=ABA.\ -\ 1101.$
$C_4=BABAB\ -\ 10110110$
$C_5=ABA\ BABAB\ ABA\ \cdots\ 110110\cdots1101$
n:奇 → $ABA\cdots ABA$
n:偶 → $BAB\cdots BAB$

(1) m:自然数，$m\geq 2$ とする．

$$\begin{cases} C_{2m}=BAB\cdots BAB \\ C_{2m-1}=ABA\cdots ABA \end{cases}\quad\cdots(※)$$

と予想する．
これが正しいことを数学的帰納法により示す．

(i) $m=2$ のとき．
$C_{2\cdot2-1}=C_3=C_1C_2C_1=ABA.$
$C_{2\cdot2}=C_4=C_2C_3C_2=BABAB.$
より成立．

(ii) $m=k$ のとき
(※)が成立と仮定する．
つまり
$$\begin{cases} C_{2k-1}=ABA\cdots ABA \\ C_{2k}=BAB\cdots BAB \end{cases}$$
が成立していると仮定．

$C_{2k+1}=C_{2k-1}C_{2k}C_{2k-1}$
$=ABA\cdots ABA\ BAB\cdots BAB\ ABA\cdots ABA$
$C_{2k+2}=C_{2k}C_{2k+1}C_{2k}$
$=BAB\cdots BAB\ ABA\cdots ABA\ BAB\cdots BAB.$
であり成立．

(i)(ii)より．$m\geq2$ のすべての自然数 m で(※)が成立．
よって，$n\geq3$ のとき，C_n の最初もしくは最後の A か B を除くと，同じ語 $AB=110$ もしくは $BA=101$ が循環する

//

(2) 語 C_n に現れる A の数を M_n，
B の数を N_n とおく．
すると，$A=1$，$B=10$ より
$$\begin{cases} a_n=N_n \\ b_n=M_n+N_n+1. \end{cases}$$

(i) $n=2m-1\quad(m\geq1)$ のとき．
$M_{2m-1}=N_{2m-1}+1$
$$\begin{cases} a_{2m-1}=N_{2m-1} \\ b_{2m-1}=M_{2m-1}+N_{2m-1}.=2N_{2m}+1. \end{cases}$$

(ii) $n=2m$ のとき．
$N_{2m}=M_{2m}+1$
$$\begin{cases} a_{2m}=N_{2m} \\ b_{2m}=M_{2m}+N_{2m}=2N_{2m}-1. \end{cases}$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a_{2m-1}}{b_{2m-1}}=\frac{N_{2m-1}}{2N_{2m-1}+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{N_{2m-1}}}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a_{2m}}{b_{2m}}=\frac{N_{2m}}{2N_{2m}-1}=\frac{1}{2-\frac{1}{N_{2m}}}=\frac{1}{2}$$

$(\because \lim_{m\to\infty}N_{2m}=\lim_{m\to\infty}N_{2m-1}=\infty).$

より．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{2}\quad //.$$

1,0の循環で考えるのではなく，A，Bの循環で考える方がよい。
最初に実験をすることも大切!!

53 $n>2$ とする。1 から n までの数字を k 個の空でない部分に分割する方法の数を $S_n(k)$ で表す。たとえば $n=3,\ k=2$ のとき分割は $\{1\}\cup\{2,\ 3\}$, $\{2\}\cup\{1,\ 3\}$, $\{3\}\cup\{1,\ 2\}$ となるので $S_3(2)=3$ である。次の問いに答えよ。

(1) $S_n(n-1)$ を求めよ。

(2) $S_n(n-2)$ を求めよ。

(3) $S_n(2)$ を求めよ。

(4) $k>1$ のとき $S_{n+1}(k)$ を $S_n(k-1)$ と $S_n(k)$ を用いて表せ。

(1993-3)

(1) 1からnまでの数字を $(n-1)$ 個の空でない集合に分割するので、1つの集合だけ数字が2つ入り、残りは1つの数字の集合。
数字を2つもつ集合の元の選び方は ${}_nC_2$ 。
残りは1通り。
$\therefore\ {}_nC_2=\frac{1}{2}n\cdot(n-1)$ (通り) //

(2) 1からnまでの数字を $(n-2)$ 個の空でない集合に分割するので、
(i) 1つの集合だけ数字が3つ。
(ii) 2つの集合が数字2つ。
の2パターン。
(i) ${}_nC_3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$
(ii) ${}_nC_2\times{}_{n-2}C_2\times\frac{1}{2!}=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$.
(i)(ii)は互いに排反なので

$$S_n(n-2)=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)+\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$$
$$=\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(3n-5)\ //$$

(3) $1,2,\cdots,n$ を A, B 2つのグループに分ける方法は 2^n 通り。
また、AもしくはBが空である2通りを除くと 2^n-2 通り。
さらに、A, B の区別をなくすと

$$S_n(2)=\frac{2^n-2}{2!}=2^{n-1}-1\ //.$$

(4) 1〜n+1までの数字を k 個の空でない集合に分ける方法の数 $S_{n+1}(k)$ は、
1からnまでの数字が、
(i) $k-1$ コの空でない集合に分割
(ii) k コの空でない集合に分割
されている場合に場合分けできる。
(i) 数字 $(n+1)$ を k コ目の集合として分割を1つ増やせばよいので その方法は $S_n(k-1)$ 通り。
(ii) 数字 $(n+1)$ を k コの分割されている集合のいずれかに入れるので、その方法は $k\cdot S_n(k)$ 通り。

(i)(ii)より

$$S_{n+1}(k)=S_n(k-1)+k\cdot S_n(k)\ //$$

(4)は、$S_{n+1}(k)$ を $S_n(k-1)$ と $S_n(k)$ であらわす理由を少し考えれば、場合分けする方法を検討できる!!

54 直線 L は，L 上の異なる k 個 $(k \geqq 1)$ の点によって $P_1(k) = k-1$ 個の長さが有限な部分と 2 個の長さが有限でない部分に分かれる。平面 Π 上に k 本の直線が，どの 2 本も平行でなく，どの 3 本も 1 点で交わらないように与えられている。Π はこれらの直線によって $P_2(k)$ こ の大きさが有限な部分と何個かの大きさが有限でない部分に分かれるとする。このとき次の問いに答えよ。個.

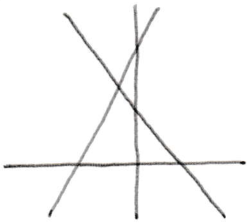
(1) $P_2(4)$, $P_2(5)$ を求めよ。

(2) $P_2(k)$ と $P_2(k+1)$ の関係式を求めよ。

(3) $P_2(k)$ を k で表せ。

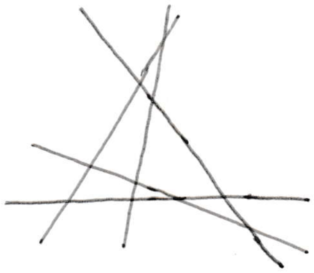
(1991-2)

(1)



左図より．条件をみたす
4本の直線により．
有限な部分は 3コある．
$\therefore P_2(4) = 3$.

右図より．条件をみたす
5本の直線により
有限な部分は
6コある .
$\therefore P_2(5) = 6$.



(2) k本の直線によって $P_2(k)$ 個の有限な部分
に分けられていたとき．
$(k+1)$本目の直線を引いたとき，条件より．
どの直線とも平行でなく，3直線が1点で交わることもないので，
この直線は k本の直線と交わって，
$(k-1)$ 個の線分と，2個の半直線に分かれる．
線分が 1つ増えると有限な部分も1個増える．
$(k-1)$個線分が増えたので
$P_2(k+1) = P_2(k) + (k-1)$ //.

(3) (2) の結果より．

$P_2(k) = P_2(k-1) + (k-2)$

$P_2(k-1) = P_2(k-2) + (k-3)$.

⋮

$P_2(4) = P_2(3) + (4-2)$

$P_2(3) = 1$.

辺々たして．

$P_2(k) = (k-2) + (k-3) + \cdots + 2 + 1$.

$= \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$.　　$(k \geqq 3)$ ……(※)

ここで，$P_2(2) = P_2(1) = 0$ であり．
(※) では，
$P_2(2) = 0$ ，$P_2(1) = 0$ となり．
(※) は $k = 1, 2$ でも成立．

よって　$P_2(k) = \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ //

(1) は図示で調べる．

55 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right)$ で定めるとき，次の問いに答えよ。

(1) すべての n に対して $a_n > 1$ および $a_{n+1} < a_n$ が成り立つことを示せ。

(2) a_3 の値を求めよ。また，$n \geqq 3$ のとき $a_{n+1} - 1 \geqq \dfrac{20}{41}(a_n - 1)^2$ が成り立つことを示せ。

(3) $p_n = 2^{n-3}$ とし，$b_n = \dfrac{41}{20}\left(\dfrac{1}{82}\right)^{p_n}$ とおく。$n \geqq 3$ のとき，$a_n - 1 \geqq b_n$ を示せ。

(1991-4)

(1) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ とおく．

$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$f'(x) = 0$ とおくと

$x = 1$．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
f'		$-$	0	$+$
f	/	↘	1	↗

また、$x - f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$x > 1$ において

$x - \frac{1}{x} > 0$ なので

$x \geq 1$ で $x > f(x)$．

ゆえに関数 f は、1以上の値を入れると1以上の値を返し、更に、返された値は入れた値よりも小さくなる。 —(※)

$f(a_n) = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$ とおくと

$a_{n+1} = f(a_n)$．

関数 f の(※)の性質より．

すべての n に対し $a_n > 1$．および $a_{n+1} < a_n$ が成立 //

(2) $a_1 = 2$．

$a_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{5}{4}$

$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4} + \frac{4}{5}\right)$

$= \frac{41}{40}$ //.

$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) - 1$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n^2 - 2a_n + 1}{a_n}$

$= \frac{(a_n - 1)^2}{2a_n}$

(1)より $a_{n+1} < a_n$ より $n \geq 3$ で

$a_n \geq \frac{41}{40}$．

$\therefore a_{n+1} - 1 \geq \frac{(a_n - 1)^2}{2 \cdot \frac{41}{40}}$

$= \frac{20}{41}(a_n - 1)^2$ //

(3) $a_n - 1 = A_n$ とおく．

$A_n \geq \frac{20}{41} \cdot A_{n-1}^2$

$\geq \left(\frac{20}{41}\right)^3 \cdot A_{n-2}^4$

$\geq \left(\frac{20}{41}\right)^7 \cdot A_{n-3}^8$

$\vdots$

$\geq \left(\frac{20}{41}\right)^{2^{n-3}-1} \cdot A_3^{2^{n-3}}$

$A_3 = a_3 - 1 = \frac{41}{40} - 1 = \frac{1}{40}$

$\therefore A_n \geq \left(\frac{20}{41}\right)^{2^{n-3}-1} \cdot \left(\frac{1}{40}\right)^{2^{n-3}}$

$= \frac{41}{20} \cdot \left(\frac{1}{82}\right)^{p_n}$ //

(1) なんとなく関数にあてはめて解いてみた．こんな解き方もあることを知ってみいて!! 数学的帰納法が妥当？

$\boxed{56}$ 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n \times \left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right)$ $(n \geqq 1)$ で定める。

(1) a_2，a_3 を計算し，答を小数でかけ。

(2) $n \geqq 2$ のとき $a_n \leqq 0.9$ かつ $a_n - a_{n+1} \leqq \dfrac{9}{10^{n+1}}$ が成り立つことを示せ。

(3) すべての n に対して $a_n > 0.89$ が成り立つことを示せ。

(1990-2)

(1) $a_2 = a_1 \times \left(1 - \frac{1}{10}\right)$

$= 1 \times \frac{9}{10} = 0.9$

$a_2 = a_2 \times \left(1 - \frac{1}{10^2}\right)$

$= 0.9 \times \frac{99}{100} = 0.891$ //

(2) $a_n \leq 0.9$ を数学的帰納法で示す。

(i) $n=2$のとき

$a_2 = 0.9$ より成立。

(ii) $n=k$のとき成立と仮定

つまり $a_k \leq 0.9$。

$a_{k+1} = a_k \cdot \left(1 - \frac{1}{10^k}\right)$

$\leq 0.9 \cdot \left(\frac{10^k - 1}{10^k}\right)$

≤ 0.9

(i)(ii)より，$n \geq 2$ なる自然数 n で

$a_n \geq 0.9$ は成立。

$a_n - a_{n+1} = a_n - a_n\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

$= a_n \cdot \frac{1}{10^n}$

$\leq 0.9 \cdot \frac{1}{10^n}$ $(\because a_n \geq 0.9)$.

$= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10^{n+1}}$ //

(3) (2)より.

$a_{n-1} - a_n \leq \frac{9}{10^n}$

$a_{n-2} - a_{n-1} \leq \frac{9}{10^{n-1}}$

$\vdots$

$a_2 - a_3 \leq \frac{9}{10^3}$

辺々たして

$a_2 - a_n \leq 9 \cdot \left(\frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n}\right)$

$= 9 \cdot \frac{1}{10^3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n-2}}{1 - \frac{1}{10}}$

$= \left(\frac{1}{10}\right)^2 - \left(\frac{1}{10}\right)^n$

$\therefore a_n \geq a_2 - \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^n$

$> 0.9 - \left(\frac{1}{10}\right)^2$

$= 0.89$.

よって $a_n > 0.89$ //

誘導に沿って丁寧に解けばよい。